МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.О.проректора по учебно-методическому комплексу
_____В.В.Зубов

Бедрина С.А.

ОСНОВЫ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

методические указания
к практико-ориентированным заданиям для направления бакалавриата
21.03.02. Землеустройство и кадастры

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Геодезии и кадастров	Горно-технологического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой	Председатель
(подпись)	*(подпись)*
Акулова Е.А.	Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 09.09.2024	Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 00899356C4B8E7194321D0149160B2398C
Владелец: Зубов Владимир Владимирович
Действителен: с 26.06.2024 до 19.09.2025

Екатеринбург, 2024 г

Аннотация

Данное пособие предназначено для студентов направления **Землеустройство и кадастры**, изучающих дисциплину **Основы проектной деятельности**. В пособии представлен краткий теоретический материал в схемах и таблицах, который поможет успешно выполнить проектную работу. В пособии кратко излагаются основные теоретические вопросы, представлены примеры самостоятельной работы, образцы заполнения структуры проекта, критерии оценки проекта.

Содержание

Аннотация	2
ВОПРОС 1 Введение в проектную деятельность	4
ВОПРОС 2 Выбор темы проекта и проблемы исследования	4
ВОПРОС 3 Типология проектов	8
ВОПРОС 4 Продукты проектной деятельности	9
ВОПРОС 5. Этапы проектной деятельности	10
ВОПРОС 6 Методы научного познания.	12
ВОПРОС 7 Требования и подготовка публичного выступления	14
ВОПРОС 8 Требования к составлению презентаций	15
ВОПРОС 9 Отличие проектной работы от научного исследования	23
ВОПРОС 10 Критерии оценки проектной работы	24
Список литературы	28

ВОПРОС 1 Введение в проектную деятельность

Цель: знакомство с понятием проект

ПРОЕКТ переводиться как замысел, брошенный вперед, это пять «п»:



Проект - дает возможность максимального раскрыть свой творческий потенциал. Эта деятельность, позволит проявить себя индивидуально или в группе, попробовать свои силы, приложить свои знания, принести пользу, показать публично достигнутый результат. Это деятельность, направленная на решение интересной проблемы, сформулированной зачастую самими студентамив виде задачи, когда результат этой деятельности — найденный способ решения проблемы — носит практический характер, имеет важное прикладное значение и, что весьма важно, интересен и значим для самих открывателей.

ВОПРОС 2 Выбор темы проекта и проблемы исследования

Задание №1. Прочитай рекомендации о выборе темы проекта. Выбрать тему оказывается несложно, если точно знаешь, что тебя интересует в данный момент, какая проблема волнует тебя больше других. Попробуй задать себе следующие вопросы:

1. Что мне интересно больше всего?
2. Чем я хочу заниматься в первую очередь.
3. Чем я чаще всего занимаюсь в свободноевремя?
4. Что из изученного в школе хотелось быузнать глубже?
5.. Есть ли что-тотакое, чем я особенно горжусь?

Если эти вопросы не помогли, обратитесь педагогам, или друзья подскажут интересную идею.

Основные критерии выбора темы:

1. Сначала надо найти проблему, которую можно исследовать и которую хотелось бы разрешить. Она-то и подскажет, как сформулировать тему исследования. А что значит - найти проблему? Древнегреческое слово «problema» переводится как «задача», «преграда», «трудность». Главная задача любого исследователя - найти что-то необычное в обычном, увидеть сложности и противоречия там, где другим все кажется привычным, ясным и простым.

2. Выбор темы должен быть обоюдно мотивирован интересом к ней студента и педагога

3. Тема должна быть реализуема в имеющихся условиях. Это значит, что по выбранной теме должны быть доступны оборудование и литература.

4. Формулировка темы должна отражать сосуществование в науке уже известного и еще не исследованного, т.е. процесс развития научного познания

Какими могут быть темы исследования?

Все темы можно условно объединить в три группы:

фантастические - темы о несуществующих, фантастических объектах и явлениях

экспериментальные – темы, предполагающие проведение собственных наблюдений и экспериментов

теоретические - темы по изучению и обобщению сведений, фактов, материалов, содержащихся в разных теоретических источниках: книгах, кинофильмах и др.

Требования к выбору темы проекта

- ✓ актуальность, отражение злободневных проблем современной науки и практики, соответствие насущным запросам общества;
- ✓ содержательность, информативность и разработанность в науке;
- ✓ возможность поиска достаточного количества литературы, наличие элемента новизны (работа в какой-то степени должна выходить за рамки

изученного, ибо только тогда она сможет вызвать интерес;

- ✓ формулировка темы должна содержать какой-то спорный момент, подразумевать столкновение различных точек зрения на одну проблему.Подобная «проблемность» может быть отражена уже в самом заглавии работы или в его подзаголовках;
- ✓ название работы может и не включать в себя слово проблема, но, тем не менее, проблемность должна подразумеваться;
- ✓ тема должна быть конкретной.
- ✓ Возможными источниками проблемы могут выступать противоречия: между известным и неизвестным;
- ✓ между знаниями и умениями;
- ✓ между сложностью задачи и наличием способа ее решения; между потребностями и возможностями их реализации
- ✓ Проблемные ситуации возникают там, где имеется несоответствие между имеющимися знаниями и новыми требованиями. Примером такого противоречия
- ✓ может служить открытие новых фактов, которые не вписываются в известные теории, еще более типичный случай этого противоречия — расхождение между житейскими представлениями и научными знаниями.
- ✓ Проще говоря, ситуация может приобрести проблемный характер если:
- ✓ имеются те или иные противоречия, которые необходимо разрешить, требуется установить сходства и различия,
- ✓ важно установить причинно-следственные связи, необходимо обосновать выбор,
- ✓ требуется подтверждение закономерностей примерами из собственногоопыта и примеров из опыта — теоретическими закономерностями,
- ✓ стоит задача выявления достоинств и недостатков того или иного решения. Проблема обязательно должна быть взята из реальной жизни, знакомая изначимая и ее решение должно быть важно

Задание №2. Заполни шаблон «МОЙ ПУТЬ К ИССЛЕДОВАНИЮ»

1.ПРОАНАЛИЗИРУЙ СВОИ ЗНАНИЯПО ИМЕЮЩИМСЯ ДИСЦИПЛИНАМ
2.МНЕ НАИБОЛЕЕ ИНТЕРЕСНЫПРЕДМЕТЫ И НАПРАВЛЕНИЯ
3.СВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ Я МОГУНАПРАВИТЬ В РУСЛО
4.ПЕДАГОГИ МНЕ СОВЕТУЮТ
5.РУКОВОДИТЕЛЬ МНЕПРЕДЛОЖИЛ
6.РОДИТЕЛИ ВЫСКАЗАЛИ СВОЕ МНЕНИЕ
Мои очередные шаги **Мои сомнения и мысли**

Дайте понятие *проблема исследования это,* приведите примеры. Из представленных сформулированных проблем исследования, выберите те, которыеявляются верными, обоснуйте свой выбор. Является ли отсутствие проблемы, отсутствием проекта

Примеры

1. Тема актуальна в связи с высоким падением рождаемости в селе. Раньше в нашем поселке был обычай иметь много детей, неимение детей считалось самым большим несчастьем и рассматривалось как наказание.

2. СМС придумали в начале 90-х годов специалисты одной английской компании. В Англии СМС настолько популярны, что для них появилось даже отдельное слово: "texting" и глагол: "to text". Популярность приводит к хорошим заработкам. И за кажущейся дешевизной СМСок стоят грандиозные доходы тех, кто эти услуги предлагает. СМС - индустрия растет и растет. СМС можно посылать по телефону, через сеть, через КПК. Стоит ли удивляться, что количество СМС - зависимых людей становится все больше. А некоторые даже идут на рекорды. Поэтому изучение данной темы очень актуально.

3.Актуальность нашей исследовательской работы заключается в том, что у всех детей возникает проблема, когда надо выучить большой объем информации.

4. Мы считаем, что исследований, посвященных изучению диалектизмов как стилистического средства, недостаточно. Специальных исследований,

посвященных изучению диалектизмов в творчестве В.П. Астафьева нет. Поэтому, тему нашей работы считаем актуальной

5. В зеленой зоне поселка с каждым годом увеличивается число пораженных насекомыми и их личинками деревьев. Есть необходимость в сохранении, восстановлении и расширении зеленого массива. Так как рыжие лесные муравьи являются «санитарами» леса и могут помочь его сохранению, проведение моего исследования актуально.

ВОПРОС 3 Типология проектов

Проект - это совокупность определенных действий, документов, предварительных текстов, замысел для создания реального объекта, предмета, создания разного рода теоретического продукта. В таблице представлены основные типы проектов

ТИПЫ ПРОЕКТОВ ПО ДОМИНИРУЮЩЕЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ	Исследовательские Творческие Прикладные Информационные Приключенческие, игровые, ролевые.
ПО ПРЕДМЕТНО-СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ	**Монопроекты** - проект в рамках одного учебного предмета М**ежпредметные -** использование знаний по двум и более областям **Надпредметный** проект на стыке областей знаний и за рамками содержания предметов
ПО ХАРАКТЕРУ КООРДИНАЦИИ	открытые закрытые
ПО КОЛИЧЕСТВУ УЧАСТНИКОВ	Индивидуальные Парные Групповые
ПО ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ	Краткосрочный Среднесрочный Долгосрочный
ПО УРОВНЮ КОНТАКТОВ	Район, область, рай, регион, межрегиональные, международные

Шаблон паспорта проекта

Сроки реализации проекта	
Участники проекта (возраст)	

Тип проекта	
по доминирующей деятельности	
по предметно-содержательной области	
по числу участников	
по продолжительности	
по характеру координации проекта	
Цель проекта	
Задачи проекта	
Ожидаемые результаты и конечный продукт проекта	
Форма презентации проекта	
Оснащение и средства обучения необходимые для проекта	

ВОПРОС 4 Продукты проектной деятельности

Результаты выполненных проектов должны быть, что называется «осязаемыми»: если это теоретическая проблема, то конкретное ее решение, если практическая – конкретный результат, готовый к использованию, Вам представлены продукты проектной деятельности.

Прочитав их предложи свои варианты?

Внешние продукты проектной деятельности	
Web-сайт - Веб-сайт, Анализ данных социологического опроса Атлас Бизнес-план- план Видеофильм Видеоклип Электронная газета Электронный журнал Законопроект- Карта Коллекция Дизайн Модель Музыкальное произведение - сочинение: Мультимедийный продукт Прогнозы	Серия иллюстраций,Сказка СправочникСловарь Сравнительно-сопоставительный анализ Статья Сценарий Виртуальная экскурсияСборник сочинений- Дневник путешествий Костюм ВыставкаИгра Фотоальбом Пакет рекомендацийПисьмо Прогноз

Публикация	
Внутренние продукты проектной деятельности.	
- Вербально-лингвистические. - Логико-математические. - Визуально-пространственные. - Натуралистические.	- Моторно-двигательные. - Межличностные. - Внутриличностные. - Музыкально-ритмические.

ВОПРОС 5 Этапы проектной деятельности

Процедуру работы над проектом можно разбить на несколько этапов. Этапы работы над проектом можно представить в виде следующей схемы:



На каждом этапе роль руководителя и участника будет разной

Педагог	**Студент**
1-й этап – погружение в проект	
Формулирует	*осуществляет*
1) проблему проекта 2)сюжетную ситуацию 3)цель и задачи	1)личностное присвоение проблемы 2)вживание в ситуацию 3)принятие, уточнение и конкретизация цели и задач
2-й этап – организация деятельности	
Организует деятельность – предлагает:	*Осуществляют:*
4)организовать группы 5)распределить амплуа в группах 6)спланировать деятельность по решению задач проекта 7)возможные формы презентации результатов	4)разбивку на группы 5)распределение ролей в группе 6)планирование работы 7)выбор формы и способа презентации предполагаемых результатов
3-й этап – осуществление деятельности	
Не участвует, но:	*Работают активно и самостоятельно:*
8)консультирует участников по необходимости 9)ненавязчиво контролирует 10) дает новые знания, когда у участников возникает в этом необходимость 11) репетирует с участниками предстоящую презентацию результатов	8)каждый в соответствии со своим амплуа и сообща 9)Консультируются по необходимости 10) «добывают» недостающие знания 11)подготавливают презентацию результатов
4-й этап - презентация	
Принимает отчет:	*Демонстрируют:*
12)обобщает и резюмирует полученные результаты 13)подводит итоги обучения 14) оценивает умения: общаться. Слушать, обосновывать свое мнение и др. (по тесту и карте наблюдений)	12)понимание проблемы, цели и задачи 13)умение планировать и осуществлять работу 14)Найденный способ решения проблемы 15)рефлексию деятельности и результата 16)дают взаимооценку деятельности и ее результативности

ВОПРОС 6 Методы научного познания

Метод - это совокупность действий, призванных помочь достижению желаемого результата. ***Ни один проект не должен остаться без того или иного вида исследования, иначе он превратиться в обычный реферат.***

№	Метод	Суть метода
1.	***Анализ***	Расчленение целостного предмета на составляющие части (стороны, признаки, свойства или отношения) с целью их всестороннего изучения. Может использоваться источниковедческий, историографический, искусствоведческий, архитектурный, стилистический, семантико-семиотический, содержательный анализ.
2.	***Дедукция***	Вид умозаключения от общего к частному, когда из массы частных случаев делается обобщенный вывод о всей совокупности таких случаев.
3.	***Индукция***	Метод исследования и способ рассуждения, в котором общий вывод строится на основе частных посылок (от частного к общему).
4.	***Классификация***	Разделение всех изучаемых предметов на отдельные группы в соответствии с каким-либо важным для исследователя признаком.
5.	***Моделирование***	Изучение объекта путем создания и исследования его копии (модели), замещающей оригинал с определенных сторон, интересующих познание. Модель всегда соответствует объекту-оригиналу в тех свойствах, которые подлежат изучению, но в то же время отличаются от него по ряду других признаков.
6.	***Наблюдение***	Целенаправленное восприятие явлений объективной действительности, в ходе которого получают знания о внешних сторонах, свойствах и отношениях изучаемых объектов.
7.	***Обобщение***	Прием мышления, в результате которого устанавливаются общие свойства и общий признак объектов.
8.	***Описание***	Фиксация средствами естественного или искусственного языка сведений об объектах.
9.	***Прогнозирование***	Специальное научное исследование конкретных перспектив развития какого-либо явления.
10	***Синтез***	Соединение ранее выделенных частей (сторон, признаков, свойств или отношений) предмета в единое целое.
11.	***Эксперимент***	Метод познания, при помощи которого в контролируемых и

		управляемых условиях исследуются явления действительности. В зависимости от способа проведения выделяют главным образом три вида экспериментов: · Лабораторный эксперимент. · Полевой, или естественный эксперимент. · Формирующий, или психолого-педагогический эксперимент.
12.	***Опыт***	Исследование какого-либо явления природы с вмешательством в процесс явления со стороны исследователя.
13.	***Опрос***	Наиболее распространенная и важнейшая форма сбора данных в маркетинге. Опрос может быть устным (личным) или письменным.
14.	***Интервью***	Наиболее гибкий метод сбора социологической информации, предполагающий проведение беседы (по определенному плану), основанной на непосредственном, личном контакте с респондентом. При формализованном интервью используется опросный лист, содержащий заранее подготовленные четкие формулировки вопросов и продуманные модели ответов на них.
15.	***Анкетирование***	Метод получения информации с помощью специального набора вопросов, на которые испытуемый дает письменные ответы. ***Анкета*** - социологический инструментарий, представляющий собой структурированную систему вопросов, логически связанных между собой, а также с задачами и целями исследования.
16.	***Краеведческий поиск***	Комплексное научно-исследовательское изучение определенной территории и накопление знаний о ней. При этом на географической базе объединяются знания по географии, экологии, истории, археологии, геральдике, этнографии, филологии, искусствознания.
17.	***Атрибуция***	Проблема атрибуции какого-либо произведения заключается в определении его автора. Под произведением может пониматься любой связанный набор знаков, в том числе фильм, картина, аудио-произведение, письмо.
18.	***Реконструкция***	Воспроизведение процессов, происходивших в прошлом, на основе некоторой модели и предпосылок.

ВОПРОС 7. Требования и подготовка публичного выступления

Общие рекомендации.

- ✓ Тщательно продумайте план вашего выступления. Оно должно включать введение,основную часть и заключение. Укажите, чему вы научились, возможные пути
- ✓ дальнейшего изучения.
- ✓ Составьте ваше выступление так, чтобы рассказ занимал по времени 5-7 минут.
- ✓ Помните, что хорошо воспринимается эмоциональное и короткое по времениизложение материала с использованием интересных примеров.
- ✓ Не забывайте о том, что последовательное изложение позволяет слушателям лучше понять выступающего.
- ✓ Употребляйте только понятные вам термины.
- ✓ Хорошо воспринимается рассказ, а не чтение текста.

Подумайте и составьте возможные вопросы.

Техника подготовки.

- ✓ Проведите репетицию своего выступления и доведите его до нужнойпродолжительности.
- ✓ Выпишите на отдельные карточки ту часть содержания, которая прозвучит ввыступлении, и разложите их по порядку.
- ✓ Заранее продумайте детали своего рабочего места.
- ✓ Приготовьте чёткий и красочный наглядный материал.
- ✓ Проведите тренировочные выступления перед друзьями, родственниками.

1. **Рекомендации выступающему.**
   - ✓ Начните свое выступление с приветствия.
   - ✓ Огласите название вашего проекта, сформулируйте основную идею и причинувыбора темы.
   - ✓ Не забывайте об уважении к слушателям в течение своего выступления (говоритевнятно).
   - ✓ Поблагодарите слушателей за внимание, а руководителя – за помощь.
   - ✓ Старайтесь ответить на все вопросы.

Вопросы оппонентов.

- ✓ Помните о возможности попросить о повторении вопроса.
- ✓ Не обязательно торопиться с ответом, можно подумать,

посоветоваться с соисполнителями проекта, посмотреть свои материалы.

- ✓ На поставленный вопрос следует отвечать кратко.
- ✓ Будьте правдивы. Хуже лукавить, чем прямо ответить на вопрос «Не знаю» или «Это находилось вне поля нашего исследования».
- ✓ Ответ на вопрос удобно начинать так: «Как было сказано в докладе».
- ✓ После выступления оппонентов поблагодарите их за оценку работы, высказанныезамечания.
- ✓ Согласитесь с тем, что в проекте действительно не отработано. Лучше открытопризнать упущения в проекте.

ВОПРОС 8. Требования к составлению презентаций

Практически все публичные мероприятия сегодня проводятся с использованием программы PowerPoint. Количество презентаций с каждым годом растёт, а вот качество подчас оставляет желать лучшего. Обидно бывает, когда видишь презентацию, но понимаешь, что демонстрирующийся «шедевр» вызывает только чувство раздражения. Автор вроде бы и старался донести материал лучше, а получился скучный трудно воспринимаемый продукт.

Чтобы таких недоразумений не случалось, предлагаем ознакомиться и принять к сведению современные требования, которые предъявляются к презентациям PowerPoint.

№		Требования	Примечания
1.	**Основные слайды презентации**	Структура презентации: • *Для любого типа презентации*: 1-ый слайд – титульный лист – тема, автор, логотип; 2-ой слайд – сведения об авторе; 3-ий слайд – содержание презентации с кнопками навигации; в конце – список используемых источников и завершающий слайд – повторение контактной информации об авторе. • *Для учебной презентации*: 3-ий слайд: содержание презентации с кнопками навигации , 4-ый слайд: цель и задачи презентации; 5-ый слайд – список литературы по теме, предзавершающий слайд с общим выводом.	На 2-ом слайде размещается фотография автора, информация о нём и контактная информация. Кнопки навигации нужны для быстроты перемещения внутри презентации – к любому слайду можно добраться в 2 щелчка. Соблюдайте основные правила цитирования и авторские права!!! (обязательно указание первоисточников материалов: откуда взяли иллюстрации, звуки, тексты, ссылки; кроме интернет-ссылок, указываются и печатные издания)

2.	**Виды слайдов**	Для обеспечения наглядности следует использовать разные способы размещения информации и разные виды слайдов: • с текстом • с иллюстрациями; • с таблицами; • с диаграммами; • с анимацией (если уместно).	
3.	**Шрифт**	**Текст должен быть хорошо виден.** Размер шрифта должен быть максимально крупным на слайде! Самый «мелкий» для презентации – шрифт 24 пт (для текста) и 40 пт (для заголовков). Лучше использовать шрифты **Arial, Verdana, Tahoma, Comic Sans MS**	Желательно устанавливать ЕДИНЫЙ СТИЛЬ шрифта для всей презентации.
		Интервал между строк – полуторный.	
4.	**Расположение информации на странице**	Проще считывать информацию расположенную горизонтально, а не вертикально. Наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана. Форматировать текст нужно по ширине страницы.	Уровень запоминания информации зависит от её расположения на экране. **В левом верхнем углу слайда располагается самая важная информация.**
5.	**Содержание информации**	При подготовке текста презентации в обязательном порядке должны соблюдаться общепринятые правила орфографии, пунктуации, стилистики и правила оформления текста (отсутствие точки в заголовках и т.д.), а также могут использоваться общепринятые сокращения. Форма представления информации должна соответствовать уровню знаний аудитории слушателей, для которых демонстрируется презентация.	**В презентациях точка в заголовках ставится.**

<table>
<tr><td>6.</td><td>Объем информации</td><td>Не допустимо заполнять один слайд слишком большим объемоминформации:
единовременно человеку трудно запомнить более трех фактов, выводов или
определений.
Наибольшая эффективность передачи содержания достигается,когда ключевые пункты
отображаются по одному на каждомотдельном слайде.</td><td>Размещать много мелкого текста на слайде недопустимо!
Существует мнение, что на слайде должно быть размещено не более 290 знаков (включаю пробелы).
Проверить «формальные» критерии презентации можно с помощью программы Текстозавр</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Способы выделения информации</td><td>Следует наглядно размещать информацию: применять рамки,границы, заливку,
разные цвета шрифтов,
штриховку, стрелки. Если хотите привлечь особое внимание, используйте рисунки,диаграммы, схемы, таблицы,
выделяйте опорные слова.</td><td>Важно не нарушать чувства меры: не перегружать слайды, но в то же время и не размещать сплошной текст.
<table><tr><td>33%</td><td>28%</td></tr><tr><td>16%</td><td>23%</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Использование списков</td><td>Списки из большого числа пунктов не приветствуются. Лучше использовать списки по 3-7 пунктов.
Большие списки и таблицыразбивать на 2
слайда.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ЧЕМ ПРОЩЕ, ТЕМ НАГЛЯДНЕЕ!</td><td></td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Разветвлённая навигация</td><td>Используйте навигацию для обеспечения интерактивности и нелинейной структуры презентации.Это расширит ее область применения (навигация – это
переход на нужный раздел из оглавления).</td><td>Навигация по презентации должна осуществляться за 3 щелчка.</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Воздействие цвета</td><td>Важно грамотное сочетание цвета впрезентации!
На одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов:один для фона, один для заголовков,один для текста.
Для фона и текста используйтеконтрастные
цвета.
Учитывайте, что цвет влияет на восприятие различных групп слушателей по-разному (дети, взрослые, деловые партнеры,</td><td>Цвет может увеличить или уменьшить кажущиеся размеры объектов.
Информацию о правилах сочетания цветов можно найти на сайте «Всё о цвете»
Обратите внимание на цвет гиперссылок (до и после использования).</td></tr>
</table>

		участники конференции и т.д.).	
11.	**Цвет фона**	Для фона выбирайте более холодные тона (предпочтительнее)со светлым шрифтом или светлый фон и темные надписи. **Пёстрый фон не применять.**	Текст должен быть хорошо виден на любом экране! Не забывайте, что презентация отображается по-разному на экране монитора и через проектор(цветовая гамма через проектор искажается, будет выглядеть темнее и менее контрастно)
12.	**Размещение изображений и фотографий**	В презентации размещать только оптимизированные (уменьшенные)изображения. Картинка должна иметь **размер неболее 1024*768** Иллюстрации располагаются на слайдах так, чтобы слева, справа, сверху, снизу от края слайда оставались неширокие свободныеполя. Перед демонстрацией ОБЯЗАТЕЛЬНО проверять, насколько четко просматриваются изображения.	Для уменьшения объема самой презентации рекомендуется соблюдать правила: • оптимизировать объем изображений (для уменьшения «веса» картинки можно использовать Microsoft Office Picture Manager); • вставлять картинки, используя специальные поля PowerPoint, а не просто перетаскивать их в презентацию; • обрезать картинку лучше в специализированной программе (Photoshop или др.), а не непосредственно средствами PowerPoint Как правило, картинка (не фотография) весит меньше в формате gif / png,нежели в jpg и т.д. **Плохой** считается презентация, которая: • долго загружается и имеет большой размер, • когда фотографии и картинки растянуты и имеют нечеткие изображения! Помните, что анимированные картинки не должны отвлекать внимание от содержания!
13.	**Анимационные эффекты**	**Анимация не должна бытьнавязчивой!** **Не допускается** использование ***побуквенной*** анимации и вращения,а также использование более 3-х анимационных эффектов на одном слайде. **Не рекомендуется** применять эффекты анимации к заголовкам,особенно такие, как «Вращение»,	В информационных слайдах анимация объектов допускается только в случае, если это необходимо для отражения изменений и если очередность появления анимированных объектов соответствует структуре презентации и теме выступления. Исключения составляют специально созданные, динамические презентации.

		«Спираль» и т.п. При использовании анимации следует помнить о **недопустимости**пересечения вновь появляющегося объекта с элементами уже присутствующих объектов на экране.	
14.	**Звук**	**Не допускается** сопровождениепоявления текста звуковыми эффектами из стандартного наборазвуков PowerPoint. Музыка должна быть ненавязчивая,а её выбор оправдан!	Звуковое сопровождение слайдов подбирайте с осторожностью, только там, где это действительно необходимо. Того же правила придерживайтесьпри использовании анимационных эффектов.
15.	**Единство стиля**	Для лучшего восприятия старайтесьпридерживаться ЕДИНОГО ФОРМАТА СЛАЙДОВ (одинаковый тип шрифта, сходнаяцветовая гамма). **Недопустимо** использование в одной презентации разных шаблонов оформления!	
	Сохранение презентаций	Сохранять презентацию лучше как «Демонстрация PowerPoint». С расширением **.pps**	Тогда в одном файле окажутся ВСЕ приложения (музыка, ссылки, текстовые документы и.т.д.)
ОСНОВНЫЕ ОШИБКИ В ОФОРМЛЕНИИ ПРЕЗЕНТАЦИИ			
1.	**Структура презентации**	Нет титульного листа. Не указан автор и контактная информация. Нет содержания. Нет выводов. Линейный тип презентации, не настроена навигация.	**При защите недопустимо считывание текста с презентации, т.е. напечатанный и произносимый текст не должны дублировать друг друга!**
2.	**Оформление презентации**	Используются разные шаблоны. Пёстрые фоны, на которых не виден текст. Много мелкого текста. Нечеткие, растянутые картинки и иллюстрации.	**Стиль и дизайн презентации должен быть единым!**
		Много неоправданных различных технических эффектов (анимации, звуковых и видео- файлов), которые отвлекают внимание от содержательной части. Нечитаемые объекты WordArt, особенно с тенями и с волной. В тексте применяется подчёркивание	Осторожно использовать объекты WordArt, которые нередко затрудняют чтение текста. Не применять подчеркивание, т.к. оно похоже на ссылки.
		Курсив может затруднять	

		чтение и замедлять скорость восприятия информации, поэтому курсив использовать с осторожностью, лучшее - избегать его вообще *(особенно полужирный)* Не злоупотребляйте ЗАГЛАВНЫМИ БУКВАМИ – тоже затрудняет восприятие. Проверяйте правильность написания и оформления текстов – орфографию, пунктуацию и стилистику, правила по оформлению текстов, библиографию и т.д.!	
Критерии		1. Полнота раскрытия темы. 2. Применимость содержания презентации длявыбранной целевой аудитории. 3. Наглядность представленной информации. Оригинальность оформления презентации. 4. Соотношение текста и изображений 5. Наличие фото, рисунков, диаграмм *6.* Единый стиль презентации (шрифты, цвета,шаблон, другие элементы)	Критерии оценивания
оценивания		7. Быстросрабатывающие ссылки, логическиепереходы, уместное применение анимации 8. Все элементы презентации легко читаются,хорошо видны 9. Выдержано время представления презентации *10.* Докладчик говорит отчетливо, громко, идеи презентации ясны и понятны слушателям.	выступления
публичных			презентации на любую
презентаций			тему в большинстве
(доклад, отчет,			схожи и имеют
представление…)			Аналогичные характеристики.

Критерии оценивания образовательных презентаций	1. Полнота раскрытия темы. 2. Применимость презентации для выбраннойцелевой аудитории. 3. Наглядность представленной информации.Оригинальность оформления презентации. 4. Структуризация информации. 5. Единый стиль слайдов. 6. Отсутствие грамматических, орфографических и речевых ошибок; 7. Отсутствие фактических ошибок, достоверность представленной информации; 8. Наличие и правильность оформления обязательных слайдов (титульный, о проекте, список источников, содержание, выводы); 9. Обоснованность и рациональность использования средств мультимедиа и анимационных эффектов; 10. Грамотность использования цветового оформления; 11. Использование авторских иллюстраций,фонов, фотографий, видеоматериалов, при использовании неавторских материалов – наличие ссылок на источники. 12. Наличие, обоснованность и грамотностьиспользования фонового звука. 13. Размещение и комплектование объектов. Докладчик говорит отчетливо, громко, идеипрезентации ясны и понятны слушателям.	

	«%»	«;4»	«»3»	«»2»
Содержание	Работа полностью завершена	Почти полностью, сделаны наиболее важные компоненты работы	Не все важнейшие компоненты работы выполнены	Работа сделана фрагментарно и с помощью преподавателя
Научность	Работа демонстрирует глубокое понимание описываемых процессов	Работа демонстрирует понимание основных моментов, хотя детали не уточняются	Работа демонстрирует понимание, но неполное	Работа не демонстрирует понимание предмета исследования
	Даны интересные дискуссионные материалы. Грамотно используется научные факты, терминология	Имеются некоторые материалы дискуссионного характера. Научная лексика используется.	Дискуссионные материалы есть в наличии, но не способствуют пониманию проблемы. Научная терминология или используется мало или используется некорректно.	Минимум дискуссионных материалов. Минимум научных терминов
Дизайн	Дизайн логичен и очевиден. Прослеживается стиль работы. Работа выполнена с соблюдением всех правил оформлен я презентаций	Дизайн используется. Применялись правила оформления презентаций	Дизайн случайный, правила соблюдались, но не в полном объеме, с нарушениями	Дизайн не ясен, оформление не отвечает требованиям
	Имеются постоянные элементы дизайна. Дизайн подчеркивает содержание	Имеются постоянные элементы дизайна. Дизайн соответствует содержанию	Нет постоянных элементов дизайна. Дизайн может и не соответствовать содержанию	Элементы дизайна мешают содержанию, накладываясь на него
	Все параметры шрифта хорошо подобраны (текст хорошо читается)	Параметры шрифта подобраны. Шрифт читаем	Параметры шрифта недостаточно хорошо подобраны, могут мешать восприятию	Параметры не подобраны. Делают текст трудночитаемым

Иллюстрации	Хорошо подобраны, соответствуют содержанию, обогащают содержание. Размещены по всем правилам	Графика соответствует содержанию	Графика мало соответствует содержанию	Графика не соответствует содержанию
Грамотность	Нет ошибок: ни грамматических, ни пунктуационных, ни стилистических	Минимальное количество ошибок	Есть ошибки, мешающие восприятию	Много ошибок, делающих материал трудночитаемым

ВОПРОС 9 Отличие проектной работы от научного исследования

Основные этапы проведения научного исследования и проектных работ

Проект	**Научное исследование**
Выбор сферы деятельности, доказательство актуальности планируемых работ	
Формулировка замысла проекта: описание продукта проектной работы и его соответствие условиям будущего использования	Осознание проблемы, существующей в данной научной сфере. Формулировка гипотезы, направленной на разрешение данной проблемы
Формулировка целей	
Направлены на выполнение замысла проекта	Направлены на решение научной проблемы
Постановка задач	
Нацелены на получение конкретного продукта проектных работ	Нацелены на разностороннее научное исследование объекта изучения
Выбор методов	

Выбор методов обработки изделия. Выбор основных и вспомогательных материалов. Выбор инструментов, приспособлений и оборудования.	Выбор общенаучных методов исследовательской деятельности. Выбор специфических методов исследовательской деятельности.
Проведение проектных или исследовательских работ	
Реализация проектных работ в соответствии с замыслом, целями и задачами, с использованием выбранных материалов и инструментов. Получение конкретного продукта проектной деятельности.	Проведение научного исследования, направленного на решение существующей научной проблемы. Экспериментальная проверка выдвинутой гипотезы, достижение поставленных целей исследования. Решение задач, конкретизирующих цели исследования.
Оценка свойств разработанного продукта. Разработка рекомендаций к использованию полученного продукта	Анализ, обработка результатов научного исследования. Оформлениерезультатов исследования.
Проверка возможности использования изделия в конкретных условиях	Обсуждение полученных результатов исследования с компетентными лицами.

ВОПРОС 10 Критерии оценки проектной работы

Исходя из представленных критериев,
Вы можете успешно подготовить свой проект

Оценочный лист экспертной оценки проектной (НИС) работы

Показатели	Градация	Баллы
1.**Соответствие** требованиям к оформлению работ участников окружной НПК.	Оформление работы полностью соответствует требованиям	**2**
	Оформление работы не полностью соответствует требованиям	**1**
	Оформление работы не соответствует требованиям	**0**

2. **Обоснованность темы** проекта – целесообразность аргументов, подтверждающих актуальность темы проекта	обоснована; аргументы целесообразны	**2**
	обоснована; целесообразна часть аргументов	**1**
	не обоснована; часть аргументов отсутствуют	**0**
3. **Конкретность,** ясность формулировки цели, задач, а также их соответствие теме проекта	конкретны, ясны, соответствуют	**2**
	неконкретны, неясны или не соответствуют	**1**
	цель и задачи не поставлены явно нецелесообразна или отсутствует	**0**
4. **Теоретическая** и **практическая** значимость обзора – представлена и обоснована модель объекта, показаны её недостатки	модель полная и обоснованная	**2**
	модель неполная и слабо обоснованная	**1**
	модель объекта отсутствует	**0**
5. **Обоснованность методик доказана** логически и/или ссылкой на авторитеты и/или приведением фактов	применение методик обосновано	**2**
	методики обоснованы недостаточно	**1**
	методики не обоснованы	**0**
6.**Доступность методик для** самостоятельного выполнения автором проекта (учащимся или учащимися)	выполнимы самостоятельно	**2**
	выполнимы под наблюдением специалиста	**1**
	выполнимы только специалистом	**0**
7. **Логичность и обоснованность** эксперимента (наблюдения), обусловленность логикой изучения объекта	эксперимент логичен и обоснован	**2**
	встречаются отдельные неувязки	**1**
	эксперимент не логичен и не обоснован	**0**
8. **Наглядность (многообразие способов) представления результатов – графики,** гистограммы, схемы, фото	использованы все возможные способы	**2**
	использована часть способов	**1**
	использован только один способ	**0**
9. **Дискуссионность (полемичность)** обсуждения полученных результатов с разных точек зрения, позиций	приводятся и обсуждаются разные позиции	**2**
	разные позиции приводятся без обсуждения	**1**
	приводится и обсуждается одна позиция	**0**
10. **Оригинальность позиции автора** –	позиция автора полностью оригинальна	**2**

наличия собственной позиции, методов решения задачи, исследования, точки зрения на полученные результаты, выводов	автор усовершенствует позицию другого исследователя	**1**
	используются традиционные методы решения	**0**
11. **Новизна** решаемой задачи	поставлена новая задача	**2**
	задача имеет элементы новизны	**1**
	задача известна давно	**0**
12. **Соответствие** содержания выводов содержанию цели и задач; оценивание выдвинутой гипотезы	соответствуют; гипотеза оценивается	**2**
	частично; гипотеза только упоминается	**1**
	не соответствуют; гипотеза не оценивается	**0**
13. **Уровень проработанности** исследования, решения задачи	задача решена полностью и подробно с выполнением всех необходимых элементов исследования	**2**
	недостаточный уровень проработанности решения	**1**
	решение не может рассматриваться как удовлетворительное	**0**
14. **Достоверность результатов**	результаты достоверны	**2**
	не все результаты достоверны	**1**
	результаты недостоверны	**0**
15. **Конкретность выводов и уровень** обобщения – отсутствие рассуждений, частностей, общих мест, ссылок на других	выводы конкретны	**2**
	отдельные выводы неконкретны	**1**
	выводы неконкретны	**0**
Итого сумма баллов		

Максимальное количество баллов за рукопись научно-исследовательской работы (проекта) – **30 баллов**

ОЦЕНОЧНЫЙ ЛИСТ ЗАЩИТЫ ПРОЕКТА (НИС) РАБОТЫ

	Показатели	Градация	Баллы
выступление	1. **Соответствие** сообщения заявленной теме, целям и задачам проекта	соответствует полностью	**2**
		есть несоответствия (отступления)	**1**
		в основном не соответствует	**0**
	2.**Структурированность (организация**) сообщения, которая обеспечивает понимание его содержания	структурировано, обеспечивает	**2**
		структурировано, не обеспечивает	**1**
		не структурировано, не обеспечивает	**0**
	3. **Культура выступления** – чтение с листа или рассказ, обращенный к аудитории	рассказ без обращения к тексту	**2**
		рассказ с обращением к тексту	**1**
		чтение с листа	**0**
	4. **Доступность** сообщения о содержании проекта, его целях, задачах, методах и результатах	доступно без уточняющих вопросов	**2**
		доступно с уточняющими вопросами	**1**
		недоступно с уточняющими вопросами	**0**
	5. **Целесообразность**, инструментальность наглядности, уровень ее использования	наглядность целесообразна	**2**
		целесообразность сомнительна	**1**
		наглядность не целесообразна	**0**
	6. **Соблюдение** временного регламента сообщения (не более 7 минут)	Соблюдён (не превышен	**2**
		превышение без замечания	**1**
		превышение с замечанием	**0**
дискуссия	7. **Четкость и полнота** ответов на дополнительные вопросы по существу сообщения	все ответы четкие, полные	**2**
		некоторые ответы нечеткие	**1**
		все ответы нечеткие/неполные	**0**
	8. **Владение** специальной терминологией по теме проекта, использованной в сообщении	владеет свободно	**2**
		иногда был неточен	**1**
		ошибался не владеет	**0**
	9**. Культура дискуссии** – умение понять собеседника и аргументировано ответить на его вопрос	ответил на все вопросы	**2**
		ответил на большую часть вопросов	**1**
		не ответил на большую часть вопросов	**0**

Максимальное количество баллов оценку публичного выступления научно-исследовательской работы (проекта) – **18 баллов**

Список литературы и интернет ресурсов

1. **Джонс Дж.К.** Методы проектирования. М., 1986.
2. **Дюбченко Н. Ю.** Основы проектной деятельности. Методические указания: пособие, Сергиевск, 2017.
3. **Килпатрик У.Х.** Метод проектов. Применение целевой установки в педагогическом процессе. - Л. Брокгауз-Ефрон, 1925.
4. **Колесникова И.А., Горчакова-Сибирская М.П.** Педагогическое проектирование: учебное пособие для высших учебных заведений. - М.: издательский центр "Академия", 2005.
5. **Круглова О.С.** Технология проектного обучения//Завуч. - 1999.- №6
6. **Новиков А.М., Новиков Д.А.** Образовательный проект: методология образовательной деятельности. - М.,2004.
7. **Пахомова Н.Ю.** Метод учебного проекта в образовательном учреждении: Пособие для учителей и студентов педагогических вузов. - М.: АРКТИ,2003.
8. **Пахомова Н.Ю.** Методика использования учебных проектов для изучения отдельной темы или крупного блока содержания. /Глобальные телекоммуникации в образовании" сб. докладов научно-практической конференции. М., 1996.
9. **Пахомова Н.Ю.** Методология учебного проекта. /Учитель №1, 2000г.

Интернет-ресурсы

«Обучонок» Обучающий проект по исследовательской деятельности	http://obuchonok.ru/
Научно- техническое творчество и научно-исследовательская работа	http://ntt.asurso.ru/
Интеллект наше достояние	http://intellectportal.ru/
Фонд Д.И.Менделеева	http://www.bfnm.ru/
Интеллектуально- творческий потенциал России	http://future4you.ru/
Фонд В.Е. Вернадского	http://www.vernadsky.ru/

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ

И.о.проректора по УМР

_____В.В.Зубов

Ю.Г.Германович

ПОЧВОВЕДЕНИЕ И ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОЛОГИЯ

методические указания
по выполнению контрольной работы
для направления бакалавриата
21.03.02. Землеустройство и кадастры
(заочное обучение)

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией факультета
Геодезии и кадастров	Горно-технологического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Акулова Е.А.	Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 09.09.2024	Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 4
1. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ..... 4
2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ …..... 6
3. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ГЕОЛГИЧЕСКОЙ КОЛОНКИ…….. 9
4. ГЕОХРОНОЛОГИЧЕСКАЯ ШКАЛА..... 13
Приложение. Вариант 11. Образец выполненной работы…….. 16

ВВЕДЕНИЕ

Целью выполнения контрольной работы является закрепление знаний по общей геологии, умение решать простейшие задачи инженерной геологии, приобретение студентами навыков построения и интерпретации графических материалов геологического содержания.

Желательно выполнить работу в любом из доступных графических редакторов, можно воспользоваться программой nanoCAD.

В противном случае работа выполняется в туши на листе ватмана формата А4

1. Порядок выполнения работы

Во время выполнения контрольной работы студент должен:

– изучить стратиграфическую колонку (рис.1), обращая внимание на то, какие горные породы и какого возраста были вскрыты скважиной.

– ознакомится с условными знаками, необходимыми для выполнения работы;

– изучить описание горных пород, пройденных буровой скважиной (согласно варианту);

– установить параметры чертежа (при выполнении в программном продукте) или подготовить чертежные инструменты и принадлежности (для работы тушью, в этом случае сначала вся работа выполняется карандашом, а затем контура поднимаются тушью).

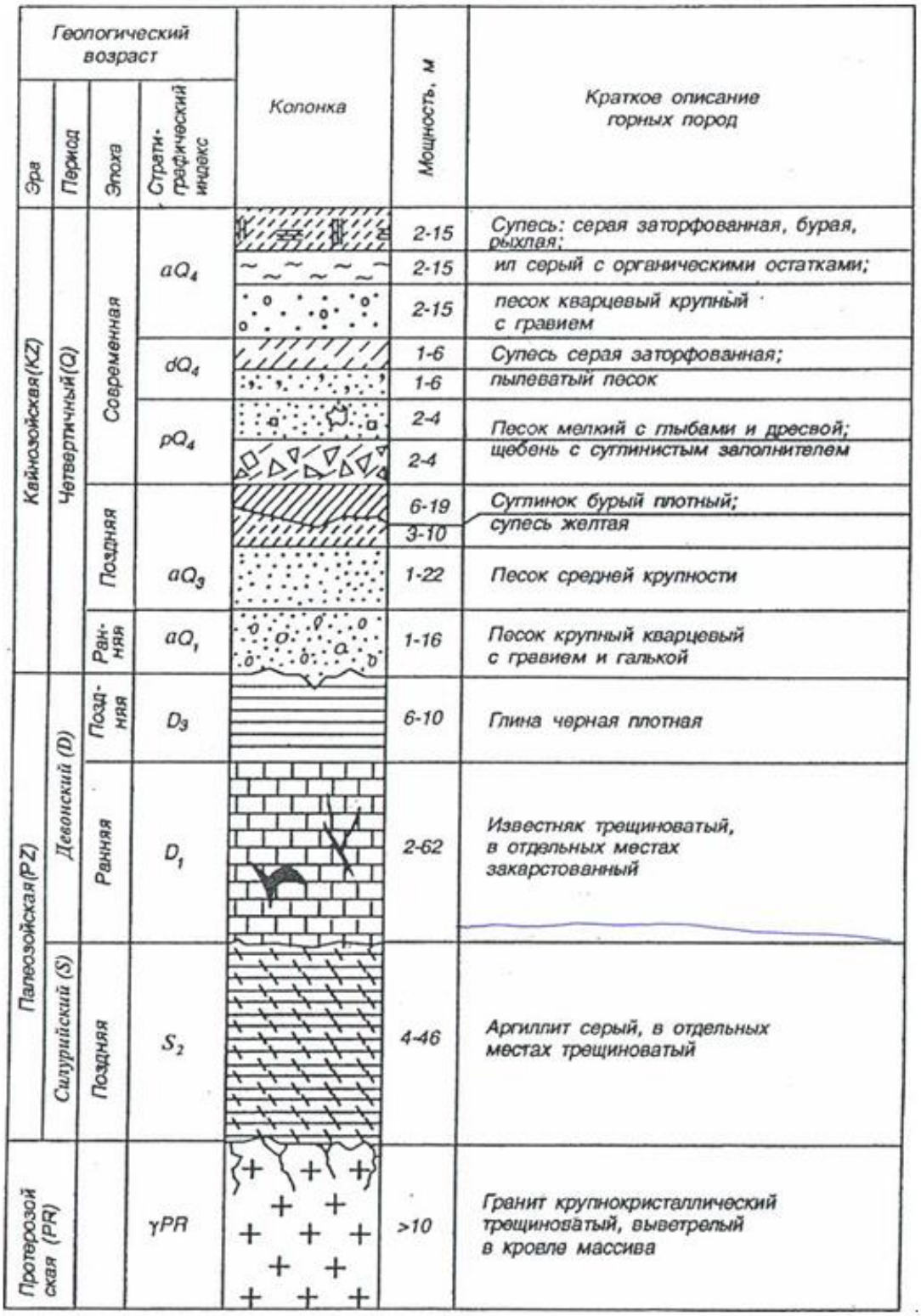


Рисунок 1 - Стратиграфическая колонка

2. Варианты заданий

Номер скважины и абсолютная отметка устья	Номер слоя	Геологический возраст	Описание горных пород	Глубина залегания подошвы слоя, м	Глубина залегания уровня воды, м (дата замера 2018 г.)	
					появившегося	установившегося
1	2		4	5	6	7
1	1	aQ4	Супесь серая заторфованная текучая	2,0	0,8 (06.01)	0,3 (18.09)
102,3	2	aQ4	Ил серый текучий	5,9		
	3	aQ4	Песок мелкий иловатый сред, плотности	10,1		I
	4	aQ3	Песок сред, крупности, сред, плотности	11,7		
	5	D1	Известняк трещиноватый	25,0*		
2	1	aQ4	Супесь серая текучая	6,0	5,0(10.01)	5,0(18.09)
106,4	2	aQ4	Песок мелкий иловатый сред, плотности	14,0		
	3	aQ3	Песок средней крупности плотный	19,0		
	4	Di	Известняк трещиноватый закарстованный	34,9		
	5	s2	Аргиллит серый	58,7	58,7(18.01)	12,2 над устьем (19.01)
	6	γPR	Гранит крупнокристаллический трещиноватый, до глубины 2 м выветрелый	65,0		
3	1	daQ4	Супесь серая заторфованная, пластичная	2,2	0,6(10.01)	0,6(18.09)
141,3	2	Ds	Глина черная плотная, твердая	8,8		
	3	D,	Известняк трещиноватый	69,8	40,1 (25.01)	40,7 (18.09)
	4	s2	Аргиллит серый	89,3		
	5	γPR	Гранит крупнокристаллический трещиноватый, выветрелый до 90,6 м	92,0	89,3 (28.01)	22,6 (29.01)
4	1	daQ4	Супесь серая заторфованная, пластичная	3,1	0,6(10.01)	0,6(18.09)
144,1	2	D3	Глина черная твердая	11,3		
	п	Di	Известняк трещиноватый, закарстованный	72,8	45,0 (06.02)	45,6 (18.09)
	4	s2	Аргиллит серый	97,9		
	5	γPR	Гранит трещиноватый крупнокристаллический, выветрелый до 98,2 м	99,6	97,9(11.02)	25,8 (12.02)
5	1	eQ4	Супесь серая заторфованная, пластичная	3,5	0.4(15.02)	0,0(18.09)
144,6	2	D3	Глина черная полутвердая	12,1		
	3	D,	Известняк трещиноватый	73,2	46,2 (17.02)	46,8 (18.09)
	4	s2	Аргиллит серый	94,9		
	5	γPR	Гранит трещиноватый, выветрелый до 95,5 м	97,4	94,9 (11.02)	26,1 (21.02)
6	1	aQ3	Суглинок бурый полутвердый	4,7		
116,7	2	aQ3	Супесь желтая пластичная	13,9		
	3	aQ3	Песок средней крупности плотный	20,8	15,8 (13.03)	16,2(18.09)
	4	D,	Известняк трещиноватый закарстованный	45,4		
	5	s2	Аргиллит серый слаботрещиноватый	65,2		
	6	γPR	Гранит крупнокристаллический трещиноватый, выветрелый	67,0	65,2 (18.03)	1,3 (19.03)
7	1	aQ_4	Песок мелкий с глыбами известняка и	3,8	1,9 (21.03)	1,5(18.09)

101,1			дресвой, рыхлый			
	2	aQ_3	Песок средней крупности плотный	5,3		
	3	aQi	Песок крупный средней плотности	6,4		
	4	D,	Известняк трещиноватый, закарстованный	29,6		
	5	s_2	Аргиллит серый	65,2		6,5 над
	6	yPR	Г ранит трещиноватый крупно кристаллический, выветрелый до 71 м	70,0	65,2 (28.03)	устьем (29.03)
8	1	aQ_4	Песок мелкий рыхлый	5,1	4,9(18.02)	5,2 (18.09)
94,6	2	aQ_4	Песок сред, крупности, сред, плотности	14,6		
	3	aQi	Песок крупный, средней плотности	25,0		19,8 над
	4	s_2	Аргиллит серый	44,6		устьем
	5	yPR	Гранит крупнокристаллический трещиноватый, выветрелый до 47,1 м	48,0	44,6 (26,02)	(27.02)
9	1	aQ_4	Песок мелкий рыхлый	8,7	1,9 (05.03)	2,2(18.09)
98,2	2	aQ_4	Песок крупный с гравием, рыхлый	10,7		
		aQ_3	Песок сред, крупности, сред, плотности	17,1		
	4	aQi	Песок крупный, средней плотности	22,3		
	5	Di	Известняк трещиноватый закарстованный	27,0		15,1 над
	6	s_2	Аргиллит серый	38,8		устьем
	7	yPR	Гранит трещиноватый выветрелый до 42 м	46,0	38,8 (08.03)	(09.03)
10	1	aQ_4	Песок мелкий рыхлый	12,0	2,6 (27.02)	2,9(18.09)
96,9	2	aQ_3	Песок средней крупности плотный	20,1		
	O	aQi	Песок крупный средней плотности	33,6		
ч	4	s_2	Аргиллит серый	35,0		
11	1	aQ_4	Супесь бурая текучая	5,8	4,1 (02.04)	4,6(18.09)
105,0	2	aQ_4	Песок мелкий кварцевый рыхлый	14,3		
	o	aQ_3	Песок средней крупности плотный	24,6		
	4	aQi	Песок крупный средней плотности	32,5		
	5	Di	Известняк трещиноватый	33,9		7,8 над
	6	s_2	Аргиллит серый	1 ~ 52,2		устьем
	7	yPR	Гранит трещиноватый выветрелый до 54 м	"61,0	52,2 (08.04)	(09.04)
12	1	aQ_4	Супесь бурая пластичная	7,2	4,9(11.04)	5,5 (18.09)
106,0	2	$^aQ_4$	Песок мелкий рыхлый	14,7		
	o	aQ_3	Песок средней крупности плотный	26,0		
	4	aQi	Песок крупный	32,6		
	5	Di	Известняк трещиноватый закарстованный	34,8		9,4 над
	6	s_2	Аргиллит серый	61,6		устьем
	7	yPR	Гранит трещиноватый, выветрелый до 63 м	66,0	61,6(19.04)	(19.04)
13	1	PQ4	Щебень известняка с суглинистым заполнителем	2,3		
107,9	2	aQ_4	Суглинок бурый полутвердый	9,6		
	3	aQ3	Песок средней крупности плотный	28,3	9,6 (23.04)	5,5 (18.09)
	4	aQi	Песок крупный кварцевый средней плотности	42,0		
	5	s_2	Аргиллит серый	56,0		5,7 над
	6	yPR	Г ранит крупнокристаллический трещиноватый, выветрелый до 58 м	59,0	56,0 (28.04)	устьем (29.04)

14	1	PQ4	Щебень известняка с суглинистым заполнителем	2,3		
106,6	2	aQ_4	Песок мелкий рыхлый	12,8	4,6 (04.05)	5,1 (18.09)
	o	aQ_3	Песок средней крупности плотный	25,9		
	4	aQi	Песок крупный с гравием ср. плотности	41,5		4,1 над
	5	s_2	Аргиллит серый	45,4		устьем
	6	yPR	Гранит трещиноватый выветрелый до 48 м	52,0	45,4 (11.05)	(12.05)
15	1	aQ_3	Суглинок бурый полутвердый	5,1		
116,5	2	aQ_3	Супесь желтая, пластичная	11,9		
	3	aQ_3	Песок средней крупности плотный	35,2	14,8 (15.05)	15,2(18.09)
	4	aQi	Песок крупный с гравием ср. плотности	48,3		
	5	s_2	Аргиллит серый	53,7		
	6	yPR	Г ранит крупнокристаллический выветрелый до глубины 54,2 м	58,0	53,7 (20.05)	4,6(21.05)
16	1	aQ_3	Суглинок бурый полутвердый	6,3		
115,6	2	aQ_3	Супесь желтая пластичная	13,5		
	->	aQ_3	Песок средней крупности плотный	35,7	14,1 (24.05)	14,5 (18.09)
	4	aQi	Песок крупный с гравием ср. плотности	48,0		
	5	s_2	Аргиллит серый	52,0		
17	1	aQ_3	Суглинок бурый пластичный	10,4	10,9 (03.06)	11,4(18.09)
112,8	2	aQ_3	Песок средней крупности плотный	32,0		
	3	aQi	Песок крупный с гравием и галькой, средней плотности	47,9		
	4	s_2	Аргиллит серый	64,6		1,4 над
	5	yPR	Гранит трещиноватый выветрелый до глубины 66,6 м	70,0	64,6 (10.06)	устьем (11.06)
18	1	aQ_3	Суглинок бурый полутвердый	10,5		
116,2	2	aQs	Песок средней крупности	26,3	11,7(14.06)	12,2(18.09)
	O	aQi	Песок крупный кварцевый средней плотности	42,4		
	4	Dj	Известняк трещиноватый, закарстованный	44,7		
	5	s_2	Аргиллит серый	51,8		
19	1	aQ_3	Суглинок бурый полутвердый	5,4		
117,1	2	aQ_3	Супесь желтая пластичная	12,6		
	3	aQ_3	Песок средней крупности плотный	34,7	14,1 (24.06)	14,6(18.09)
	4	aQi	Песок крупный средней плотности	38,3		
	5	Di	Известняк трещиноватый закарстованный	46,1		
	6	s_2	Аргиллит серый	55,3		
	7	yPR	Гранит трещиноватый, выветрелый до глубины 57,5 м	60,0	55,3 (28.06)	3,9 (29.06)
20	1	aQ_3	Суглинок бурый полутвердый	4,1		
116,0	2	aQ_3	Супесь желтая пластичная	14,9	13,2 (02.07)	13,8(18.09)
	o	aQ_3	Песок средней крупности плотный	32,8		
	4	aQi	Песок крупный средней плотности	38,1		
	5	Di	Известняк трещиноватый закарстованный	44,6		
	6	s_2	Аргиллит серый	62,2		
	7	yPR	Г ранит трещиноватый до глубины 62,5	70,0	62,2 (10.07)	2,5 (11.07)

3. Пример построения геологической колонки

Абсолютная отметка устья	Номер слоя	Геологический возраст	Описание горных пород	Глубина залегания подошвы слоя, м	Глубина залегания уровня воды, м (дата замера 2018 г.)	
					появившегося	установившегося
1	2	3	4	5	6	7
117,0	1	aQ_3	Суглинок бурый полутвердый	5,0	16,1 (25.01) 65,0 (30.01)	16,5 (10.09) 1,6(31.01)
	2	aQ_3	Супесь желтая пластичная	13,5		
	3	aQ_3	Песок средней крупности, плотный	20,8		
	4	D1	Известняк трещиноватый закарстованный	45,4		
	5	S_2	Аргиллит серый слаботрещиноватый	65,0		
	6	γPR	Гранит трещиноватый	67,2*		

* - Последняя цифра по скважине означает глубину до забоя скважины. Подошва последнего слоя проходит ниже забоя скважины.

Геологическая колонка - наглядная графическая форма представления первичной геологической документации (описания) скважины. Масштаб (вертикальный) колонки принимаем 1: 500, (рис. 2). В *графе 1* проставляем в заданном масштабе шкалу глубин от устья скважины (точка пересечения ствола скважины с поверхностью Земли) до забоя. Затем по данным графы 5 табл. ВАРИАНТЫ откладываем на шкале глубин глубину залегания подошвы каждого слоя и через полученные точки проводим горизонтальные линии (подошва - нижняя, а кровля - верхняя границы слоя). В *графе 2* проставляем порядковые номера слоев. В *графе 3* проставляем геологические индексы слоев (геологический возраст). В *графе 4* помещаете значение мощности каждого слоя. Мощность первого равна глубине залегания его подошвы. Мощность остальных слоев вычисляем как разность глубин залегания подошв последующего и предыдущего слоев. Например, для слоя 3 мощность равна 20,8 - 13,5 = 7,3 м. *В графе 5* проставляются абсолютные отметки подошвы слоя. Абсолютные отметки подошв слоев определяем как разность абсолютной отметки устья скважины и глубины

залегания подошвы соответствующего слоя. Например, для слоя 3 абсолютная отметка подошвы слоя равна 117,0 - 20,8 = 96,2 м. *В графе 6* помещается литологическая колонка. Для этого двумя тонкими линиями рисуем ствол скважины и с обеих сторон от ствола показываем условными обозначениями литологический состав пород каждого слоя. Эти обозначения берем из стратиграфической колонки (рис.1). Дополнительно к литологической нагрузке допускается цветовая раскраска по возрасту в соответствии с Геохронологической шкалой .

В графе 8 приводится характеристика горных пород слоя из таблицы ВАРИАНТЫ.

Заключительная стадия работы - гидрогеологическая характеристика скважины. Для этого *в графе* 7 по шкале глубин отмечаем глубины установившегося уровня воды первого (безнапорного) водоносного горизонта и двух уровней воды второго (напорного) водоносного горизонта. Пересчитываем глубины залегания подземных вод на абсолютные отметки (по аналогии с вычислением абсолютных отметок в графе 5) и проставляем их в соответствии с образцом (в числителе - абсолютная отметка уровня водоносного горизонта; в знаменателе - дата замера). Вертикальной линией со стрелкой на конце показываем высоту подъема напорных вод второго водоносного горизонта. *В графе 6* показываем область распространения воды в водоносных горизонтах (зону насыщения), затемняя в соответствии с вынесенными отметками ствол скважины. Зоной насыщения *первого безнапорного* водоносного горизонта будет область от УГВ (установившегося уровня грунтовых вод) до кровли водоупора, *второго напорного* горизонта - от подошвы водоупора до забоя (конца) скважины. Стволы скважин в интервалах развития водоносных слоев затемняем.

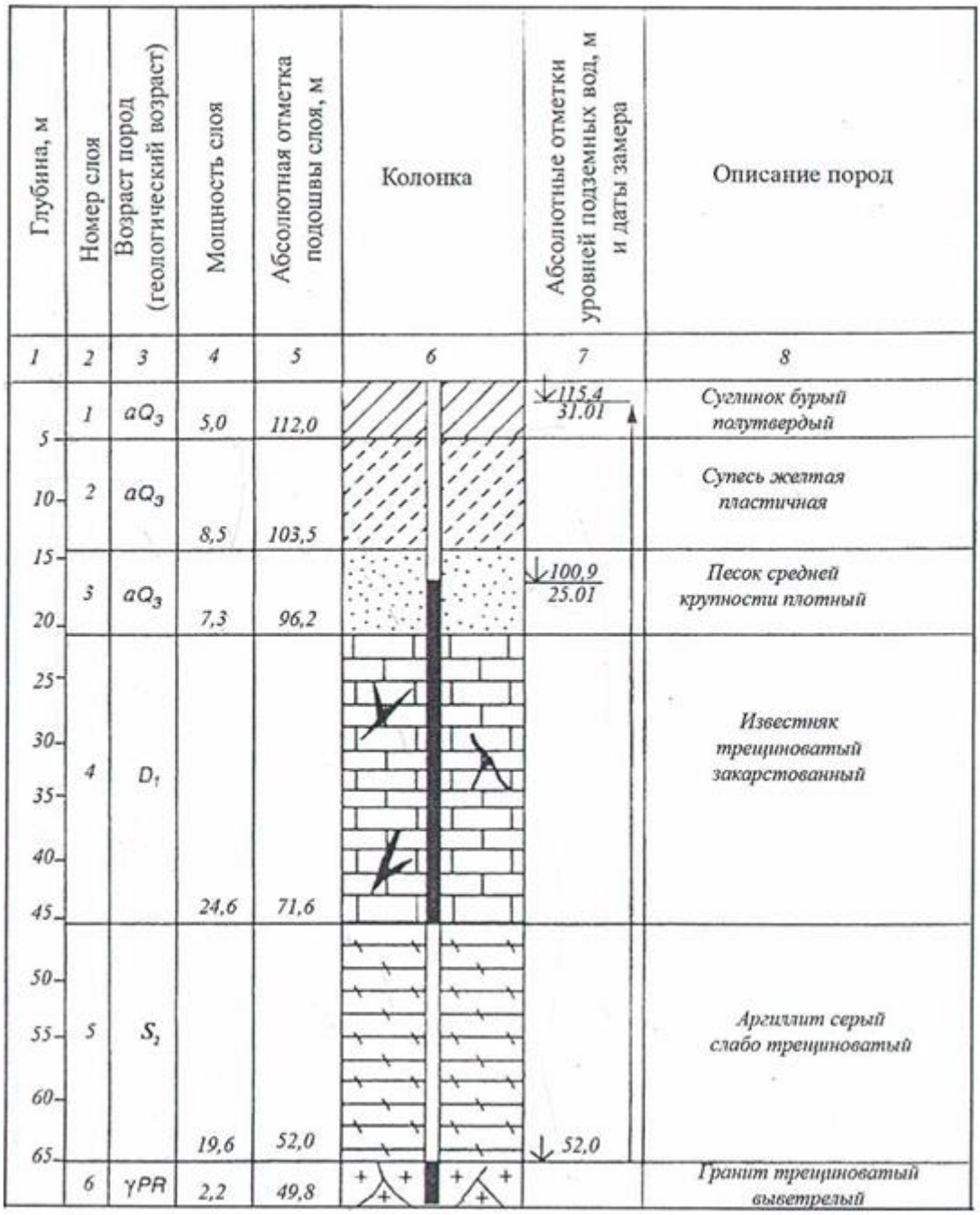


Рисунок 2 - Пример построения геологической колонки скважины

Масштаб 1: 500

Из описания видим, что скважиной вскрыты (сверху вниз) верхнечетвертичные отложения (aQ_3), представленные тремя слоями: суглинком бурым полутвердым, супесью желтой пластичной и песком средней крупности. Верхнечетвертичные отложения подстилаются

нижнедевонскими известняками трещиноватыми закарстованными (D1), ниже которых залегают верхнесилурийские аргиллиты слабо трещиноватые (S_2). Ниже залегают протерозойские граниты трещиноватые (γPR).

4. ГЕОХРОНОЛОГИЧЕСАЯ ШКАЛА

Эонотема (зон)	Эра	Система (период). Цвет	Отдел (эпоха)	Возраст млн. лет	Основные события
ФАНЕРОЗОЙСКАЯ	ПАЛЕОЗОЙСКАЯ, PZ	Четвертичная Q Желто-серый	Голоцен Q_{IV}	2,58	Конец Ледникового Периода. Возникновение цивилизаций
			Плейстоцен QI-QIII		Вымирание крупных млекопитающих. Появление современного человека
		Неогеновая N Желтый	Плиоцен N_2 Миоцен N1	23,3	Появились первые люди (род Homo).
		Палеогеновая Р Оранжево-желтый	Олигоцен	66	Появление первых человекообразных
			Эоцен Палеоцен		Появление первых «современных» млекопитающих
	МЕЗОЗОЙСКАЯ, MZ	Меловая К Зеленый	Верхний $К_2$ Нижний К.	145	Первые плацентарные млекопитающие. Вымирание динозавров
		Юрская J Синий	Верхний $]_3$ Средний J_2 Нижний J	201,3	Появление сумчатых млекопитающих и первых птиц. Расцвет динозавров.
		Триасовая Т Фиолетовый	Верхний $Т_3$ Средний $Т_2$ Нижний Т	252,2	Первые динозавры и яйцекладущие млекопитающие.
	ПАЛЕОЗОЙСКАЯ, PZ	Пермская Р Оранжево-коричневый	Татарский $Р_3$ Биармийский $Р_2$ Приуральский Р1	298,9	Вымерло около 95 % всех существовавших видов. Сформировалась Гондвана, при столкновении двух континентов образовались Пангея и Аппалачские горы. Океан Панталасса
		Каменноугольная С Серый	Верхний $С_3$ Средний $С_2$ Нижний С1	358,9	Появление деревьев и пресмыкающихся.
		Девонская D Коричневый	Верхний D_3 Средний D_2 Нижний D1	419,2	Появление земноводных и споровых растений. Начало формирования уральских гор
		Силурийская S Серо-зеленый	S 2 Пржидольский Лудловский	443,8	Ордовикско-силурийское вымирание. Выход жизни на сушу: скорпионы; появление челюстноротых
			S, Венлокский Лланловерийский		
		Ордовикская 0 Оливковый	Верхний 0_3 Средний 0_2 Нижний 01	485,4	Ракоскорпионы, первые сосудистые растения.
		Кембрийская е Голубовато-зеленый	Верхний $Č_3$ Средний $Č_2$ НИЖНИЙ Č|	535	Появление большого количества новых групп организмов («Кембрийский взрыв»).
Верхнепротерозой-ская PR2		Вендская Розовый	Верхний V_2 Нижний V 1	600	
	Рифейская R	Верхний RF_3 Средний RF_2 Нижний RF1 Розово-оранжевый		1030 1350 1650	
Нижнепротерозой -		Верхнекарельская KR_2		2100	

	Нижнекарельская KR1			2500	
Верхнеархейская AR_2 Лопийская LP	Сиреневато розовый			3200	
Нижнеархейская AR1 Саамская, SM				>3200	

Геохронологическая шкала является важнейшим документом, удовлетворяющим последовательность и время геологических событий в истории Земли.

1. Геохронологический возраст указан по «Глобальной шкале геологического времени» на 2015 г.

2. Геологическое время разделяется на эры и периоды, а толща горных пород - на соответствующие эратемы и системы. Названия эратем и систем повторяют названия эр и периодов, например: в каменноугольный период формировались залежи каменного угля, но каменноугольная система характеризуется распространением угленосных отложений. В первом случае речь идёт о времени, во втором - об отложениях.

3. Наиболее крупным подразделением является эонотема (эон). Выделяется 3 эонотемы: архейская (греч, «археос» - древнейший) - более 3,5-2,6 млрд. лет; протерозойская (греч, «протерос» - первичный) - 2,6 млрд. лет-570 млн. лет; фанерозойская (греч, «фанерос» - явный) - 570-0 млн. лет. Эонотемы подразделяются на эратемы (эры), а они в свою очередь на системы (периоды) и отделы (эпохи).

4. Фанерозойская эонотема (эон) подразделяется на эратемы (эры): палеозойскую (греч, «палеос» - древний, «зоо» - жизнь), состоящую из 6 систем (периодов); мезозойскую (греч, «мезос» - средний) из 3 систем и кайнозойскую (греч, «кайнос» - новый) из 3 систем. 12 систем (периодов) названы по той местности, где они впервые были выделены и описаны

(кембрийский, девонский, пермский, юрский), либо по имени племен, населявшим ту или иную территорию (ордовикский, силурийский), либо по характерным особенностям отложений (каменноугольный, меловый). Системы (периоды) делятся на отделы (эпохи).

5. Геологические периоды обладают разной длительностью от 20 до 100 млн. лет. Четвертичный период или антропоген (греч, «антропос» - человек) по длительности не превышает 1,8-2,0 млн. лет и ещё не окончен.

6. Все подразделения геохронологической и стратиграфической шкал ранга системы (периода) обозначаются по первой букве латинского наименования, например кембрий - e, ордовик - O, силур - S, девон - D и т.д., а отделы (эпохи) обозначаются цифрами - 1,2,3, которые ставятся справа внизу от индекса: нижняя юра J1, верхний мел - K_2 и т.д. Каждая система (период) показывается на геологической карте определенным общепринятым цветом.

Образец выполненной работы

Скв.11, отм. устья 105,0

Глубина, м	Номер слоя	Возраст пород (геологический возраст)	Мощность слоя	Абсолютная отметка подошвы слоя, м	Колонка	Абсолютные отметки уровней подземных вод, м и даты замера	Описание пород
1	2	3	4	5	6	7	8
						112.8 09.04.11	
5	1	aQ_4	5.8	99.2		100.4 18.09.11	*Супесь бурая текучая*
10	2	aQ_4	8.5	90.7			*Песок мелкий кварцевый рыхлый*
15 20	3	aQ_3	10.3	80.4			*Песок средней крупности плотный*
25 30	4	aQ_1	7.9	72.5			*Песок крупный средней плотности*
	5	D_1	1.4	71.1			*Известняк трещиноватый*
35 40 45 50	6	S_2	18.3	52.8		52.8	*Аргиллит серый*
55 60	7	γPR	8.8	44.0			*Гранит трещиноватый выветрелый до 54 м*

Масштаб 1:500

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о.проректора по УМР
_____В.В.Зубов

Ю.Г.Германович

ПОЧВОВЕДЕНИЕ И ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОЛОГИЯ

методические указания
по выполнению практических работ
для направления бакалавриата
21.03.02. Землеустройство и кадастры

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией факультета
Геодезии и кадастров	Горно-технологического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Акулова Е.А.	Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 09.09.2024	Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ№1…… 3
1.1. Классификация минералов по химическому составу……. 3
1.2. Построение разреза……. 4
1.3. Построение карты изогипс……. 8
2. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ№2……. 11
2.1 Схема строения почвенного профиля…… 11
2.2. Почва как компонент природной геосистемы…….. 15
ПРИЛОЖЕНИЕ. ГЕОХРОНОЛОГИЧЕСКАЯ ШКАЛА…….. 19

1. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ№1

1.1. Классификация минералов по химическому составу

Распределить предложенный список минералов в таблицу, состоящую из следующих столбцов: *Задание; Название минерала; Группа по химическому составу; Рудн., нерудн., породообраз.*

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1. Хромит	1. Сульфид ртути	1. Сульфид свинца
2. Карбонат марганца	2. Сульфат свинца	2. кварц
3. микроклин	3. Станум-о –два	3. цинк-эс
4. Оксид железа	4. Оксид меди	4. Родонит
5. Альбит	5. Оксид марганца	5. Сульфид меди
6. Пироп	6. Сульфид сурьмы	6. Сульфид меди
7. Опал	7. Дистен	7. Серпентин
8. FeAsS	8. Кварц	8. Гиперстен
9. Шеелит	9. Хризотил-асбест	9. Кварц
10. Карбонат железа	10. Волфрамит	10. Сапфир
11. Хлорид калия	11. Хлорид калия	11. Оксид марганца
12. Кальций-фтор-два	12. Тальк	12. Карбонат магния
13. Гиперстен	13. Микроклин	13. Сульфид молибдена
14. Серпентин	14. Купрум-три-феррум- эс-два	14. Дистен
15. Микроклин	15. Карбонат цинка	15. Оксид меди
16. кварц	16. Галенит	16. Халькопирит
17. Сульфид мышьяка	17. Плагиоклазы	17. Мирабилит
18. Оксид титана	18. Биотит	18. Хлорид натрия
19. Малахит	19. Сульфид цинка	19. Вольфрамит
20. Ag	20. Апатит	20. Плагиоклазы
21. Карбонат цинка	21. Доломит	21. Оливин
22. Вермикулит	22. Алмаз	22. Галит

4 вариант	5 вариант	6 вариант
1. Хромит	1. Арсенопирит	1. Кварц
2. Альбит	2. Сульфид мышьяка	2. Сульфид меди
3. Карбонат цинка	3. Сульфат бария	3. Оксид алюминия
4. Серпентин	4. Борнит	4. Купрум-два-о
5. Карбонат железа	5. Браунит	5. Лимонит
6. Сульфид ртути	6. Сульфид висмута	6. Магнетит
7. Оксид марганца	7. Ангидрит	7. Малахит
8. Тальк	8. Вольфрамит	8. SnO_2
9. Купрум-феррум-эс-два	9. Плюмбум-эс	9. MoS_2
10. Гиперстен	10. Гаусманит	10. Настуран
11. Оксид меди	11. Плюмбум-эс-о-четыре	11. Никелин
12. Карбонат магния	12. Гематит Fe_2O_3	12. Оливин
13. Сульфид меди	13. Горный хрусталь	13. Карбонат свинца
14. Галенит	14. Графит	14. $ZnCO_3$
15. Флюорит	15. Гюбнерит	15. Карбонат железа
16. Висмутин	16. Доломит	16. цинк-о
17. Au	17. Au	17. Сульфид цинка
18. Альмандин	18. Изумруд	18. Спессартин
19. Биотит	19. Ильменит	19. Флюорит
20. Кварц	20. Каинит	20. Циркон
21. Роговая обманка	21. Карбонат кальция	21. Сфен

Основой классификации минералов является химический состав минералов. По этому признаку различают такие классы минералов:

- Силикаты
- Оксиды

- Гидрооксиды (гидроокислы)
- Карбонаты
- Сульфаты
- Сульфиды
- Фосфаты
- Галоиды
- Самородные элементы
- Органические соединения

Катанаева Дарья			
4 вариант			
Задание	**Название минерала**	**группа**	**Рудн, нерудн и т.д.**
1. Хромит	Хромит	оксид	рудный
2. Альбит	Альбит	силикат	породообразующий
3. Карбонат цинка		карбонат	рудный
4. Серпентин	Серпентин	силикат	породообразующий
5. Карбонат железа	Сидерит	карбонат	рудный
6. Сульфид ртути	киноварь	Сульфид	нерудный
7. Оксид марганца	Манганит	оксид	рудный
8. Тальк	Тальк	силикат	нерудный
9. Купрум-феррум-эс-два	Халькопирит	сульфид	рудный
10. Гиперстен	Гиперстен	силикат	породообразующий
11. Оксид меди	Куприт	оксид	рудный
12. Хлорид натрия	Галит	Галоидные соединения	породообразующий
13. Сульфид меди	Ковеллит	Сульфид	рудный
14. Галенит	Галенит	Сульфид	рудный
15. Фторид кальция	флюорит	Галоидные соединения	нерудный
16. Висмутин	Висмутин	сульфит	нерудный
17. Au	Самородное золото	самородный элемент	рудный
18. Альмандин	Альмандин	силикат	нерудный
19. Биотит	Биотит	силикат	породообразующий
20. Кварц	Кварц	оксид	породообразующий
21. Роговая обманка	Роговая обманка	силикат	породообразующий

Рисунок 1 - Образец выполненной работы

1.2. Построение разреза

По данным схематической геологической карты построить разрез по линии АВ (*в графическом редакторе nanoCAD*).

Масштаб схематической геологической карты 1:5000, сплошные горизонтали проведены через 5м. Горизонтальный масштаб для разреза взять 1:5000, вертикальный 1:500, условный горизонт принять на несколько метров ниже минимальной отметки по линии разреза.

Порядок работы:

1. Получить у преподавателя схематичную геологическую карту в электронном виде в формате .dwg

2. Изучить элементы залегания, определить порядок залегания слоев, какая структура представлена в задании (синклинальная, антиклинальная складка или моноклинальное залегание слоев)

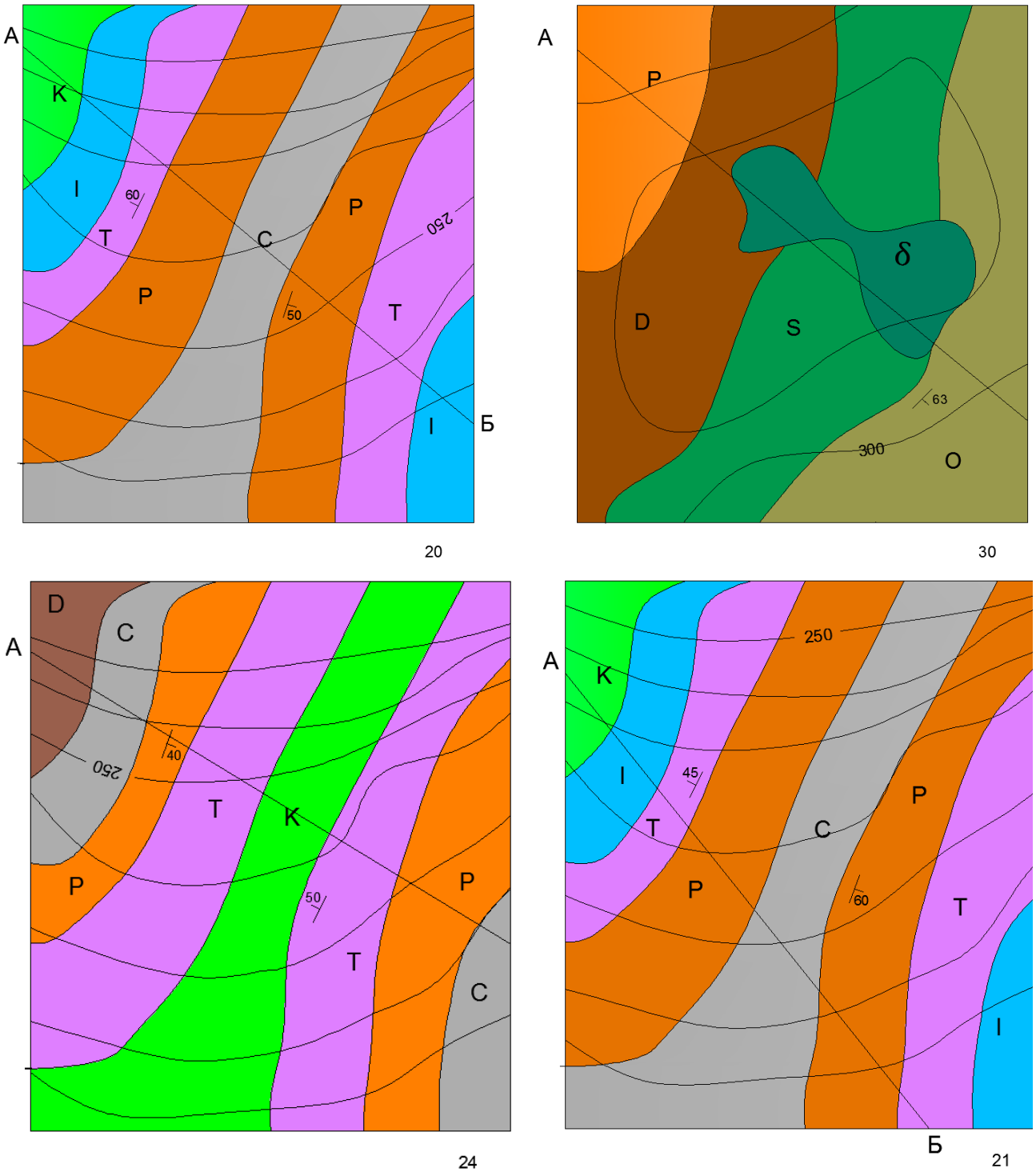


Рисунок 2 - Примерные варианты заданий

3. Определить, нарушено ли залегание слоев внедрившейся интрузией, если да, то какого она состава.

4.Определить соответствует ли раскраска буквенным индексам

5. Изменить параметры чертежа, увеличив их для размещения разреза по крайней мере до формата А3:

(Формат) → (Лимиты чертежа). После этого в командной строке появится следующий запрос:

Укажите нижний левый угол или [ВКЛ/ОТКЛ] <0.000, 0.000>:

Укажите верхний правый угол <420.000, 297.000>:

По умолчанию формат графического поля соответствует альбомной ориентации формата А3. Если вас это устраивает – нажмите «Enter», если нет – введите новые координаты правого верхнего угла и нажмите «Enter».

5. Определить угол проведения линии разреза по отношению к оси X:

(Сервис) → (Сведения) → (Расстояние)

6. Рассчитать, под каким углом нужно повернуть все изображение так, чтобы линия разреза расположилась горизонтально, повернуть под этим углом геологическую карту.

7. С помощью вертикальных линий перенести заложения на линию условного горизонта.

8. Построить вертикальную шкалу в масштабе 1:500, подписать отметки, провести вспомогательные горизонтальные линии.

9. По точкам пересечения вертикальных и горизонтальных линий командой (Рисование) → (Сплайн) нанести линию рельефа.

10. Провести вспомогательные вертикальные линии от точек пересечения линии разреза с границами разновозрастных пород.

11. Определить ядро складки, используя Геохронологическую шкалу (Приложение1). От ядра складки, в соответствии с элементами залегания нанести на разрез границы разновозрастных пород (крылья складки).

12. В случае синклинальной складки оформить ее ядро используя команду (Редактировать) → (Сопряжение).

13. Нижнюю часть разреза ограничить сплайном, довести границы разновозрастных пород до боковых границ разреза (Редактировать) → (Увеличить) → (Динамика)

14. На карте определить номера цветов разновозрастных пород (Щелчок на заливке) → (ПКМ) → (Свойства).

15. Аналогичные цвета выставить при заливке разновозрастных пород на разрезе (Рисование) → (Градиент)

Примечание: Если на карте видна внедрившаяся интрузия, то сначала надо вынести ее контуры, обрезать границы разновозрастных пород на разрезе, используя в качестве режущей кромки края интрузии (Редактировать) → (Обрезать).

16. Нанести индексы на разрез поверх заливки (Рисование) → (Текст).

17. Убрать все вспомогательные линии, поменять стиль точек (Формат) → (Отображение точек) на стандартный.

18. Развернуть геологическую карту назад так, чтобы она приняла первоначальное положение.

19. Сдать работу преподавателю, при положительной оценке распечатать работу, установив в окне печати масштаб 1:1

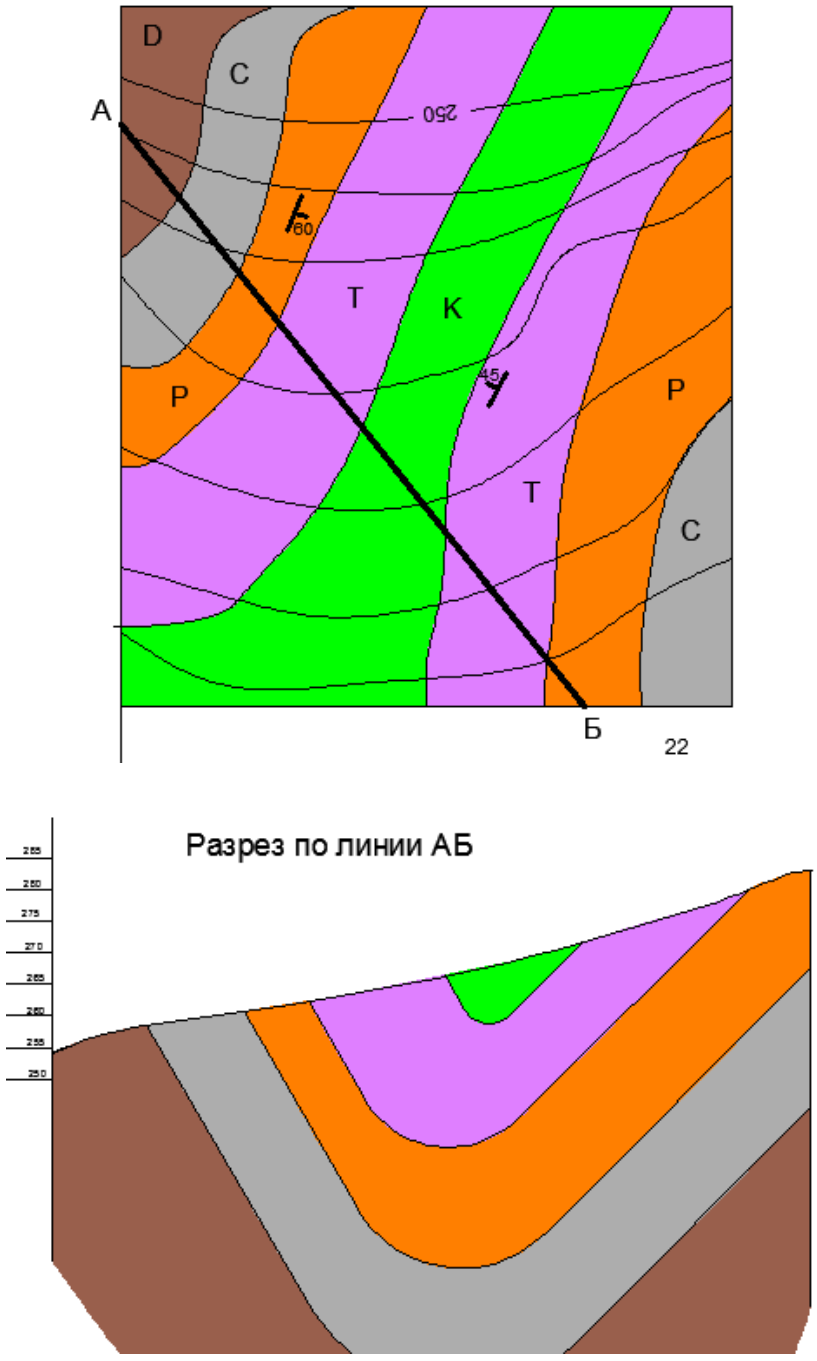


Рисунок 2 - Образец выполненной работы

1.3. Построение карты изогипс

По данным таблицы построить карту гидроизогипс масштаба 1:500, приняв сечение горизонталей и гидроизогипс через 1м. На карте показать направление потока и выделить участки с глубиной залегания грунтовых вод менее 2м (вероятной зоны подтопления). В таблице приведены данные по 12 скважинам, пробуренным по сетке на расстоянии 25м друг от друга (3 ряда по 4 скважины в каждом). В числителе указаны абсолютные отметки устьев, в знаменателе - глубина залегания уровней грунтовых вод.

Таблица 1 - Абсолютные отметки устьев скважин и результаты одновременного замера глубин залегания уровня грунтовых вод

Вариант	номер скважины											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	14,3 4,0	13,9 4,2	12,8 5,5	12,0 1,9	15,1 3,7	14.6 2.6	13,9 2,1	13,4 1,5	17.3 3.3	16,5 3,3	15,7 0,8	14,7 0,5
2	12,4 3,9	11,3 2,4	10,6 1,5	10,5 1,8	13,0 3,2	12,5 2,0	12,3 1,7	12,4 2,8	15,3 3,2	14,2 1,3	13,7 0,4	13,3 2,3
3	13.6 3.6	13,1 2,8	12,5 2,0	12,4 1,7	16,7 3,6	15,1 3,2	14,4 1,1	13,5 0,4	18,2 1,3	18,3 4,2	18,2 3,1	17.0 2.0
4	13,2 4,1	12,5 2,9	12,0 2,4	11,7 3,5	15.2 4.2	14.0 2.0	13,6 1,2	13,3 3,3	18,8 5,0	18,0 4,2	17,3 3,6	17.2 5.2
5	10,3 4,2	9,1 4,3	8,4 2,6	7,5 2,0	10,6 3,8	10,3 3,4	9,5 2,3	9,1 1,5	13,3 3,6	12,2 3,2	11,2 1,3	10,5 0,2
6	9,1 4,3	8,2 2,5	7.6 1.6	7,5 2,0	10,1 3,2	9,5 2,4	9,4 1,8	9,2 2,5	12,0 3,2	11,3 1,7	10,5 0,8	10.3 2.3
7	10,6 3,6	10,1 3,0	9,5 2,3	9,6 1,5	13,2 3,5	12,4 3,2	11,5 1,1	10,5 0,2	15,6 3,3	15,3 4,0	15,1 2,9	14,3 2,4
8	10,1 3,6	9,5 2,1	9.4 1.5	9,6 2,5	11,2 3,3	12,3 0,9	10,5 0,2	10.3 2.3	15,3 4,2	15,4 3,2	14,3 1,9	14,4 4,1
9	15,2 3,5	15,7 2,5	16,7 3,6	17,5 5,4	14,2 4,1	14,3 2,2	15,4 3,0	15,0 4,4	10,3 2,2	10,5 0,3	11,2 1,4	12,3 3,2
10	14,7 0,5	15,7 0,8	16,5 3,3	17.3 3.3	13,4 1,5	13,9 2,1	14.6 2.6	15,1 3,7	12,0 1,9	12,8 5,5	13,9 4,2	14,3 4,0
11	13.3 2.3	13,7 0,4	14,2 1,3	15,3 3,2	12,4 2,8	12,3 1,7	12,5 2,0	13,0 3,2	10,5 1,8	10,6 1,5	11,3 2,4	12,4 3,9
12	17.0 2.0	18,2 3,1	18,3 4,2	18,2 1,3	13,5 0,4	14,4 1,1	15,1 3,2	16,7 3,6	12,4 1,7	12,5 2,0	13,1 2,8	13.6 3.6
13	17.2 5.2	17,3 3,6	18,0 4,2	18,8 5,0	13,3 3,3	13,6 1,2	14.0 2.0	15.2 4.2	11,7 3,5	12,0 2,4	12,5 2,9	13,2 4,1
14	10,5 0,2	11,2 1,3	12,2 3,2	13,3 3,6	9,1 1,5	9,5 2,3	10,3 3,4	10,6 3,8	7,5 2,0	8,4 2,6	9,1 4,3	10,3 4,2
15	10.3 2.3	10,5 0,8	11,3 1,7	12,0 3,2	9,2 2,5	9,4 1,8	9,5 2,4	10,1 3,2	7,5 2,0	7.6 1.6	8,2 2,5	9,1 4,3
16	14,3 2,4	15,1 2,9	15,3 4,0	15,6 o o	10,5 0,2	11,5 1,1	12,4 3,2	13,2 3,5	9,6 1,5	9,5 2,3	10,1 3,0	10,6 3,6
17	14,4 4,1	14,3 1,9	15,4 3,2	15,3 4,2	10.3 2.3	10,5 0,2	12,3 0,9	11,2 3,3	9,6 2,5	9.4 1.5	9,5 2,1	10,1 3,6
18	12,3 3,2	11,2 1,4	10,5 0,3	10,3 2,2	15,0 4,4	15,4 3,0	14,3 2,2	14,2 4,1	17,5 5,4	16,7 3,6	15,7 2,5	15,2 3,5
19	15,7 2,2	16.6 3,7	17,5 5,3	18,2 5,4	13,3 2,1	15,0 2,8	15,2 4,4	15,4 3,3	10,5 0,2	11,2 0,9	12,3 3,2	13,4 3,5

20	17,3 3,3	16,5 3,3	15,7 0,8	14,7 0,5	15,1 3,7	14.6 2.6	13,9 4,2	13,4 1,5	14,3 4,0	13,9 4,2	12,8 5,5	12,0 1,9
21	15,3 3,2	14,2 1,3	13,7 0,4	13.3 2.3	13,0 3,2	12,5 2,0	12,3 1,7	12,4 2,8	12,4 3,9	11,3 2,4	10,6 1,5	10,5 1,8
22	18,2 1,3	18,3 4,2	18,2 3,1	17.0 2.0	16,7 3,6	15,1 3,2	14,4 1,1	13,5 0,4	13.6 3.6	13,1 2,8	12,5 2,0	12,4 1,7
23	18,8 5,0	18,0 4,2	17,3 3,6	17.2 5.2	15.2 4.2	14.0 2.0	13,6 1,2	13.3 3.3	13,2 4,1	12,5 2,9	12,0 2,4	11,7 3,5
24	13,3 3,6	12,2 3,2	11,2 1,3	10,5 0.2	10,6 3,8	10,3 3,4	9,5 2,3	9,1 1,5	10,3 4,2	9,1 4,3	8,4 2,6	7,5 2,0
25	12,0 3,2	11,3 1,7	10,5 0,8	10.3 2.3	10,1 3,2	9,5 2,4	9,4 1,8	9,2 2,5	9,1 4,3	8,2 2,5	7.6 1.6	7,5 2,0
26	15,6 3,3	15,3 4,0	15,1 2,9	14,3 2,4	13,2 3,5	12,4 3,2	11,5 1,1	10,5 0,2	10,6 3,6	10,1 3,0	9,5 2,3	9,6 1,5
27	15,3 4,2	15,4 3,2	14,3 1,9	14,4 4,1	11,2 ***3 , 3***	12,3 0,9	10,5 0,2	10.3 2.3	10,1 3,6	9,5 2,1	9.4 1.5	9,6 2,5
28	10,3 2,2	10,5 0,3	11,2 1,4	12,3 3,2	14,2 4,1	14,3 2,2	15,4 3,0	15,0 4,4	15,2 3,5	15,7 2,5	16,7 3,6	17,5 5,4
29	6,9 2,2	8,1 3,3	10,2 4,3	9,5 3,8	5,9 4,6	6,3 4,7	6,7 2,4	7,9 1,3	4,5 3,7	4,8 2,6	3,2 1,5	6,5 1,4
30	6,5 1,4	3,2 1,5	4,8 2,6	4,5 3,7	7,9 1,3	6,7 2,4	6,3 4,7	5,9 4,6	9,5 3,8	10,2 4,3	8,1 3,3	6,9 2,2

Пример построения карты гидроизогипс

Построим карту гидроизогипс, пользуясь планом расположения скважин, их абсолютными отметками и глубиной залегания грунтовых вод.

На рис. 3 показано расположение 12 скважин в углах квадратной сетки на расстоянии 25 м друг от друга. В табл. 1 приведены абсолютные отметки устьев скважин и результаты одновременного замера глубины залегания уровней грунтовых вод. Используя эти данные, построим топографическую основу и карту гидроизогипс в масштабе 1: 500, приняв сечение горизонталей и гидроизогипс через 1 м. На карте укажем направление потока и выделим участки с глубиной залегания уровня грунтовых вод менее 2 м.

В заданном масштабе наносим план расположения скважин, обозначая их кружками диаметром 2 мм. Слева от каждой скважины записывается ее номер, справа в числителе - абсолютная отметка устья, в знаменателе - абсолютная отметка уровня грунтовых вод (УГВ). Абсолютные отметки УГВ в каждой скважине вычисляем как разность между отметкой устья и глубиной залегания УГВ.

$$Нугв = Нз — h,$$

где *Нугв*- абсолютная отметка УГВ;

Нз - абсолютная отметка поверхности земли;

h - глубина залегания подземных вод.

Находим путем интерполяции между абсолютными отметками устьев скважин точки с абсолютными отметками, равными целому числу (сечение горизонталей и гидроизогипс через 1 м). Соединив точки с одинаковыми отметками плавными

линиями, получаем горизонтали рельефа (на рисунке обозначены тонкими линиями). Аналогично путем интерполяции находим точки с абсолютными отметками УГВ. Соединив точки с одинаковыми отметками УГВ плавными линиями, получим гидроизогипсы (на рис. 3 - жирные линии).

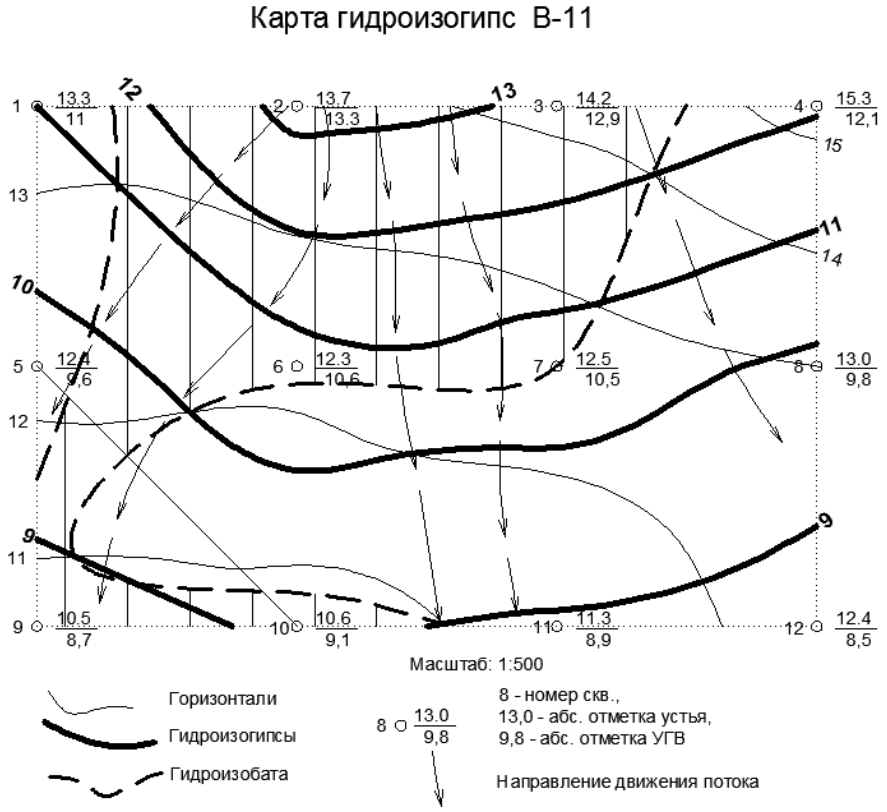


Рисунок 3 - Пример построения карты гидроизогипс

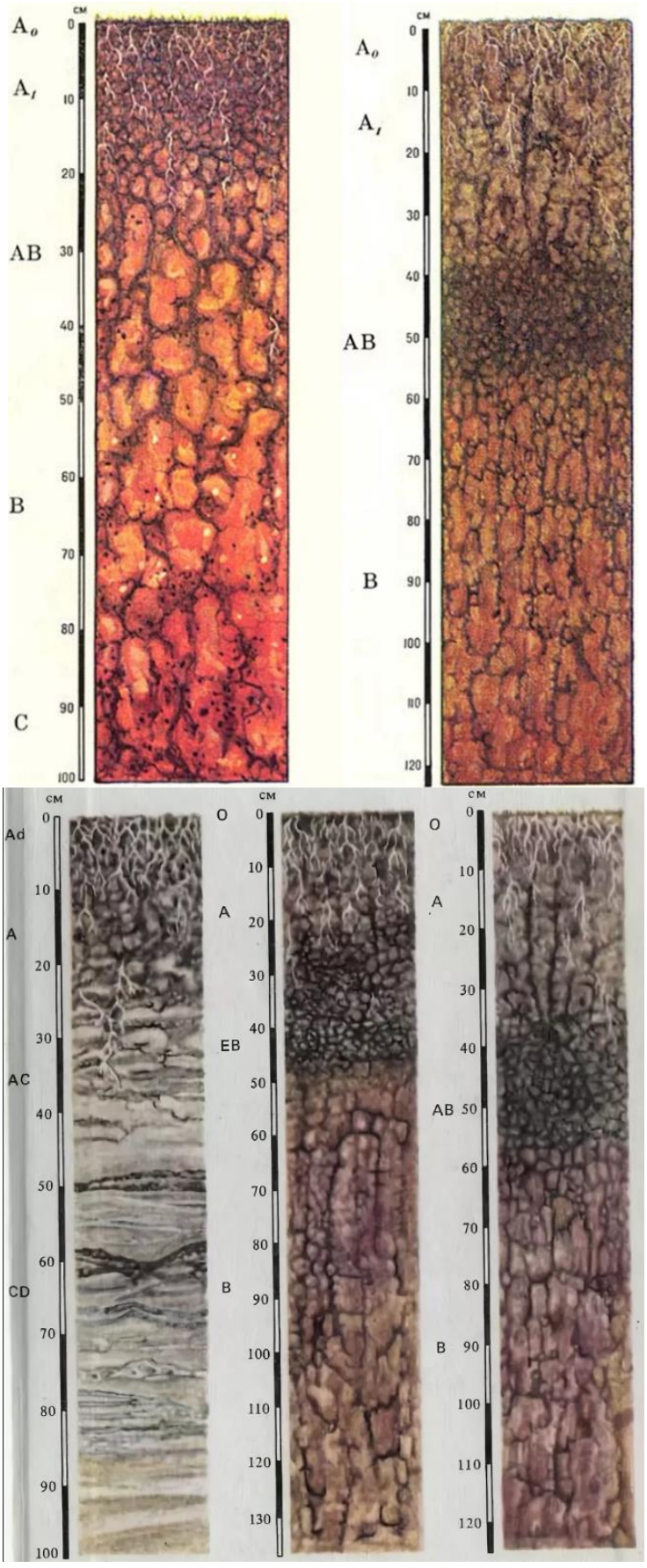
Для выделения участков с глубиной залегания УГВ менее 2 м находим точки пересечения горизонталей и гидроизогипс с разностью отметок 2 м. Линия, проведенная через эти точки, - гидроизобата - будет границей участка. На рис. 5 гидроизобата показана пунктирной линией, а участок с глубиной залегания УГВ менее 2 м заштрихован (вероятная зона подтопления).

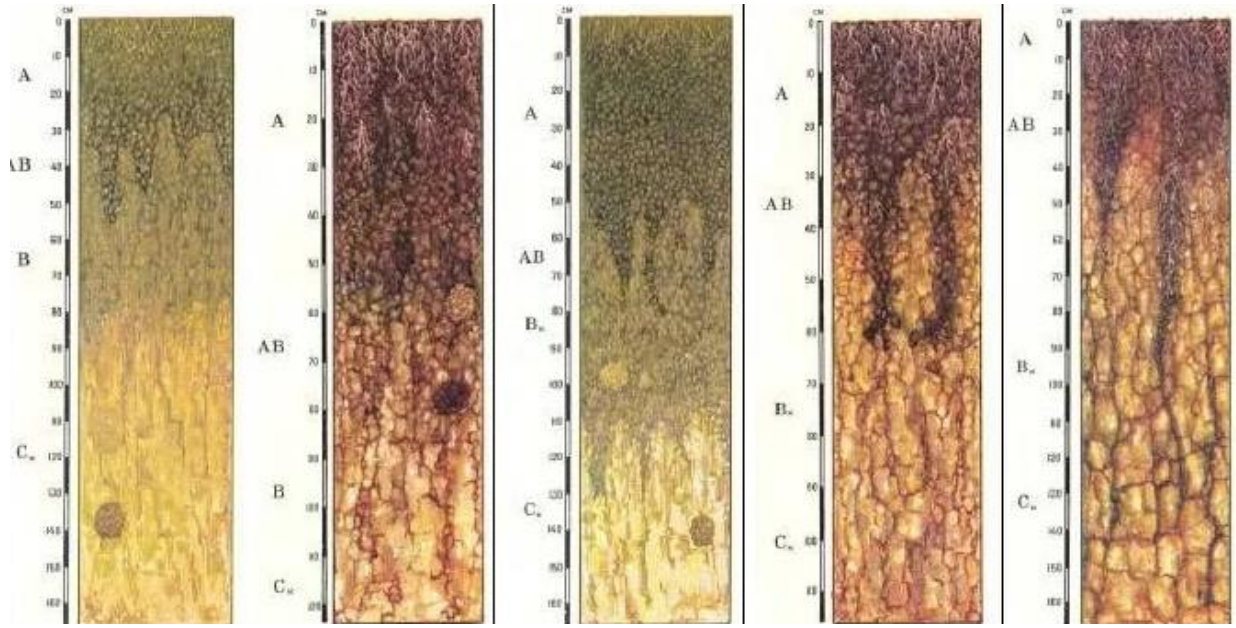
Определим направление движения потока. Направление определяется как перпендикуляр к 2-м смежным гидроизогипсам, от более высоких отметок уровня грунтовых вод к более низким. Направление потока устанавливаем по всему изучаемому участку, особо обращается внимание на зоны, где направление потока изменяется.

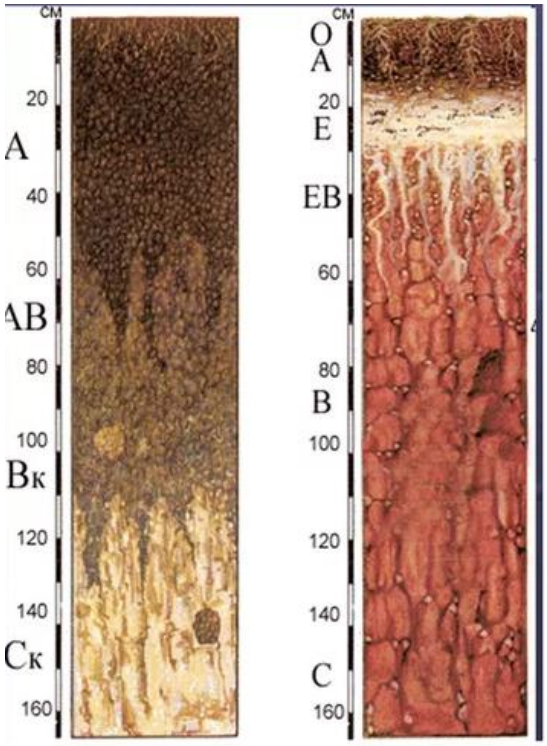
Для выделения участков с глубиной залегания УГВ менее 2 м находим точки пересечения горизонталей и гидроизогипс с разностью отметок 2 м. Линия, проведенная через эти точки, - гидроизобата - будет границей участка. На рис. 5 гидроизобата показана пунктирной линией, а участок с глубиной залегания УГВ менее 2 м заштрихован (вероятная зона подтопления).

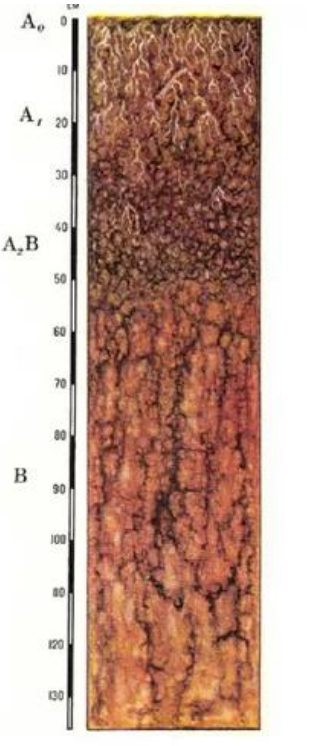
2. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ№2

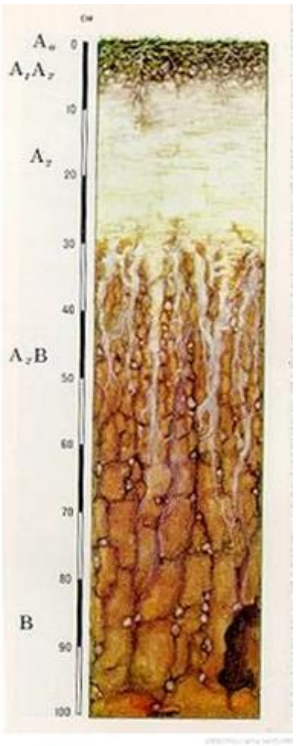
2.1. Опираясь на иллюстрацию составьте схему строения почвенного профиля

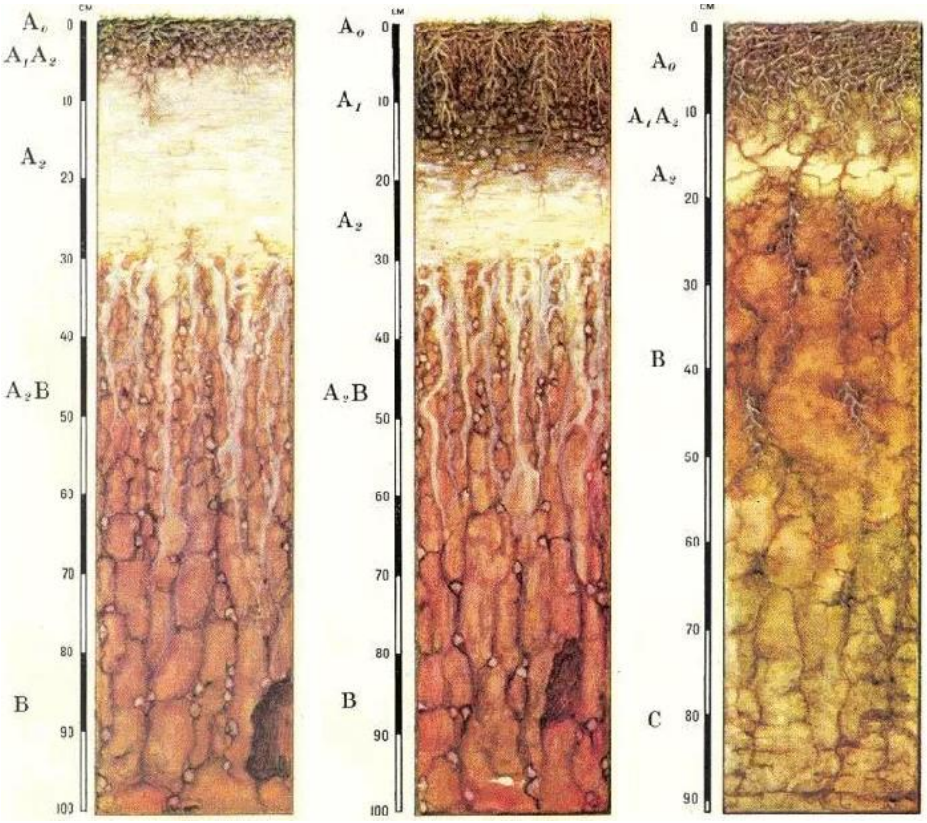


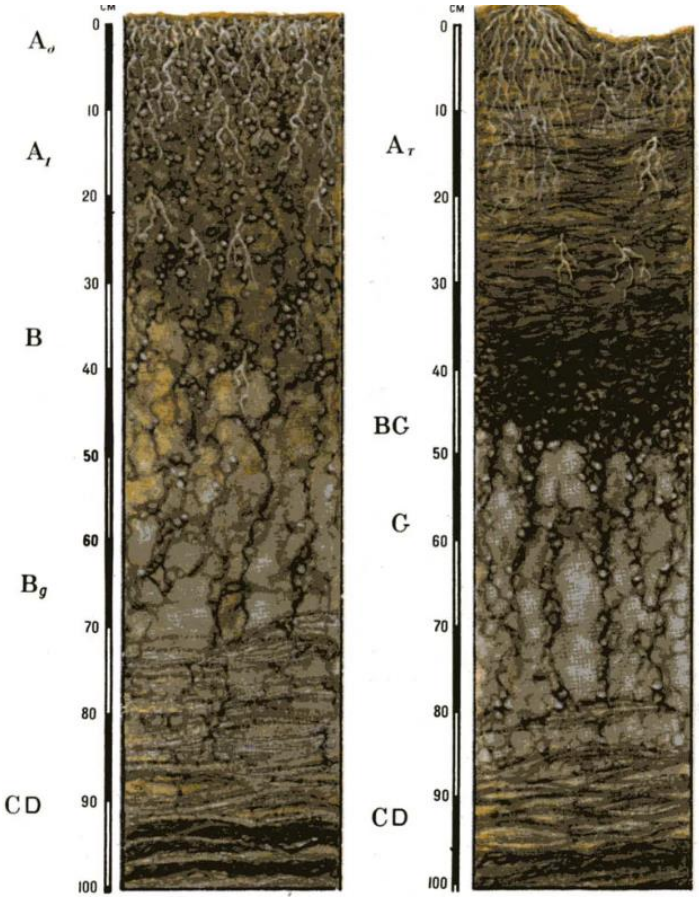

A
AB
B
$C_к$
A
AB
B
$C_к$
A
AB
$B_к$
$C_к$
A
AB
$B_к$
$C_к$
A
AB
$B_к$
$C_к$

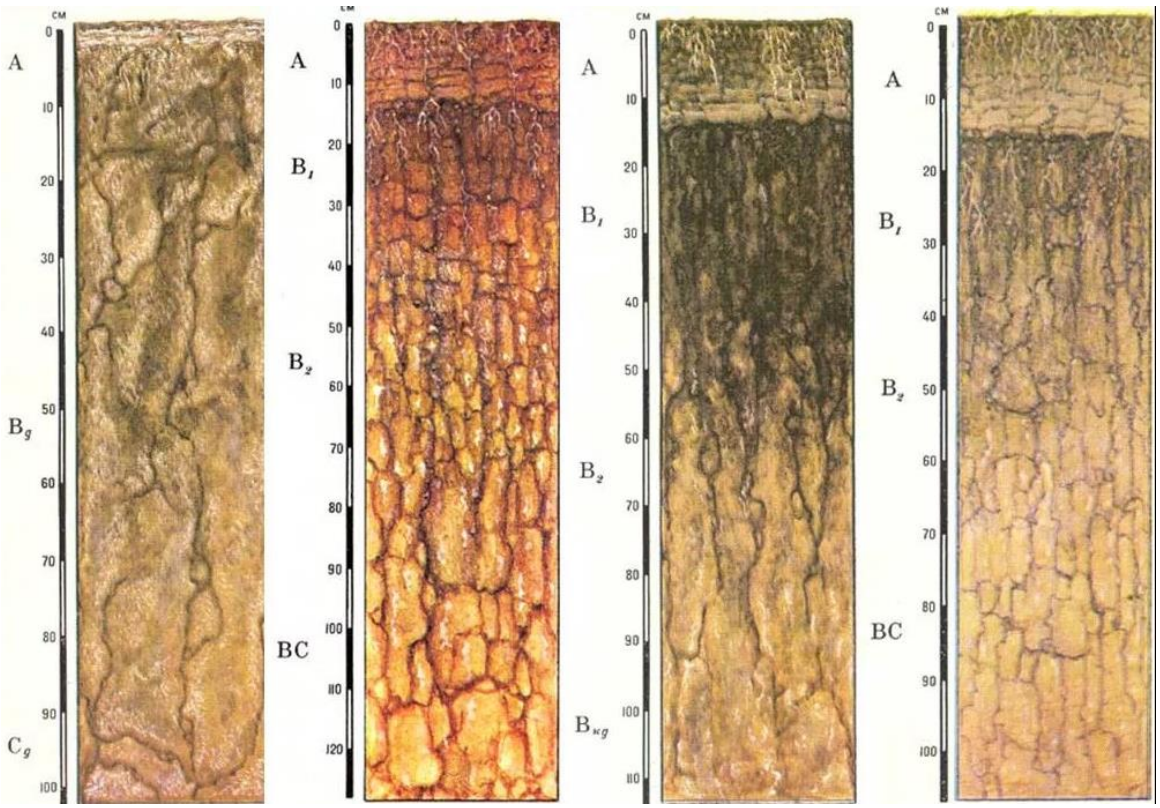

CM
20
A
40
60
AB
80
100
Bк
120
140
Cк
160
CM
O
A
20
E
EB
60
80
B
100
120
140
C
160

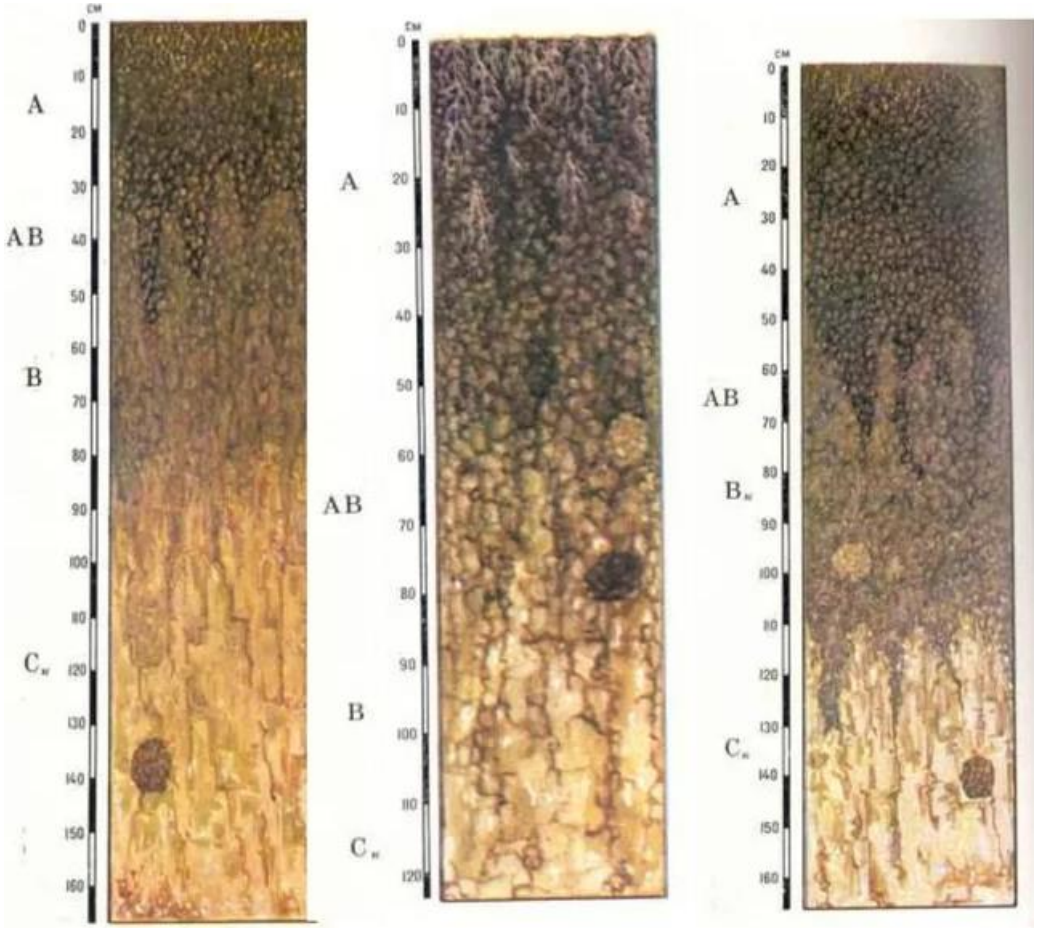

A_0
A_1
A_2B
B


A_0
A_1A_2
A_2
A_2B
B

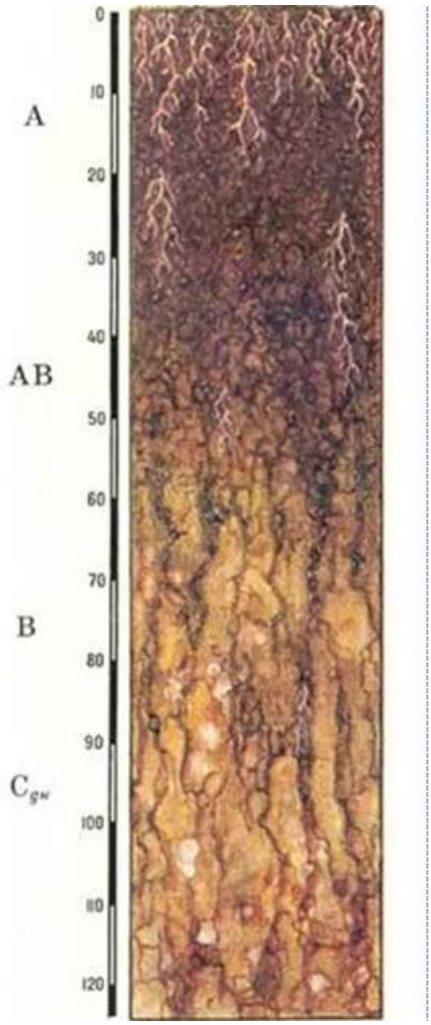

A0
A1A2
A2
A2B
B
A0
A1
A2
A2B
B
A0
A1A2
A2
B
C


Ao
A1
B
Bg
CD
AT
BC
C
CD


A
B_g
C_g
A
B_1
B_2
BC
A
B_1
B_2
B_{xg}
A
B_1
B_2
BC


A
AB
B
C_x
A
AB
B
C_x
A
AB
B_x
C_x

Образец выполненной работы:

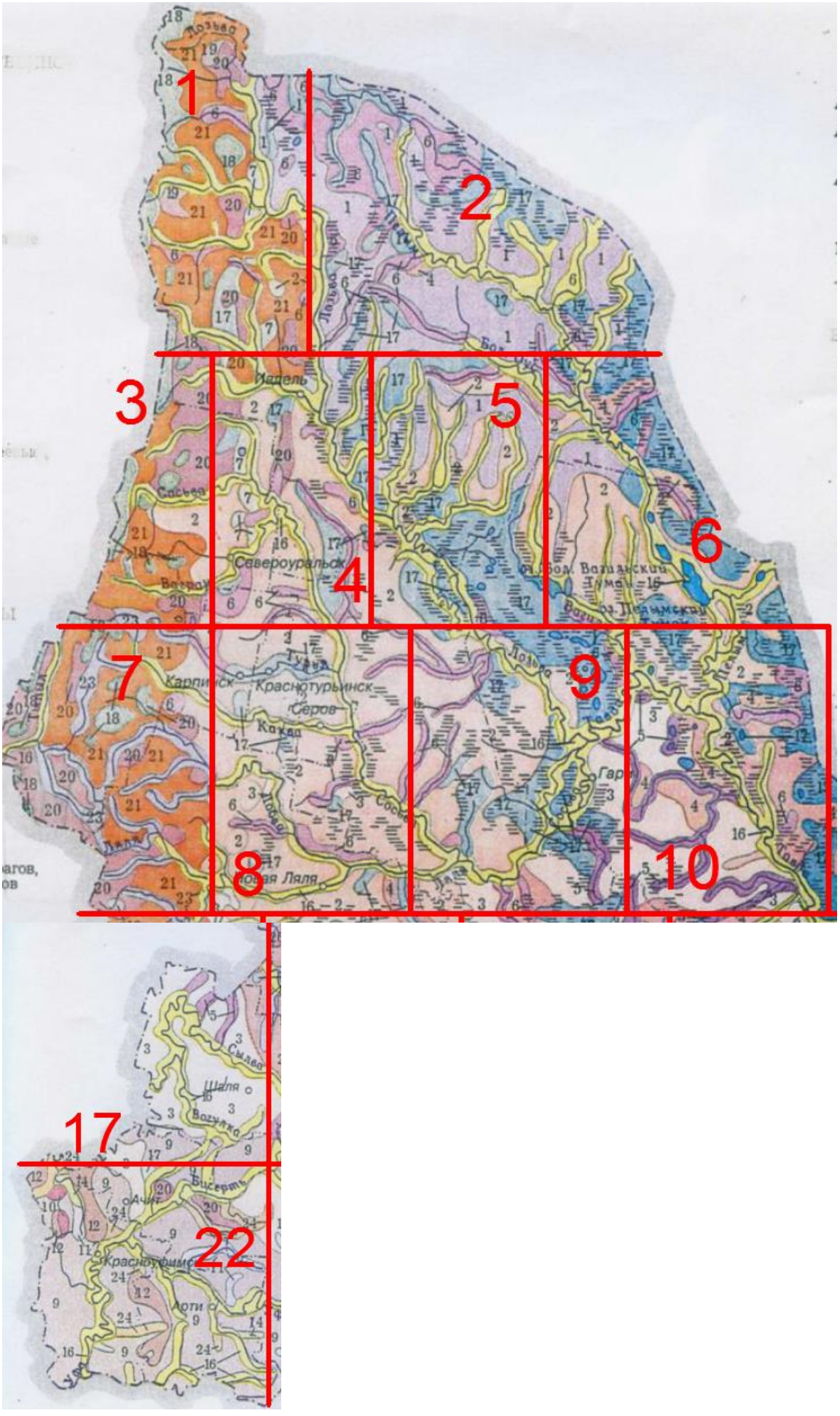


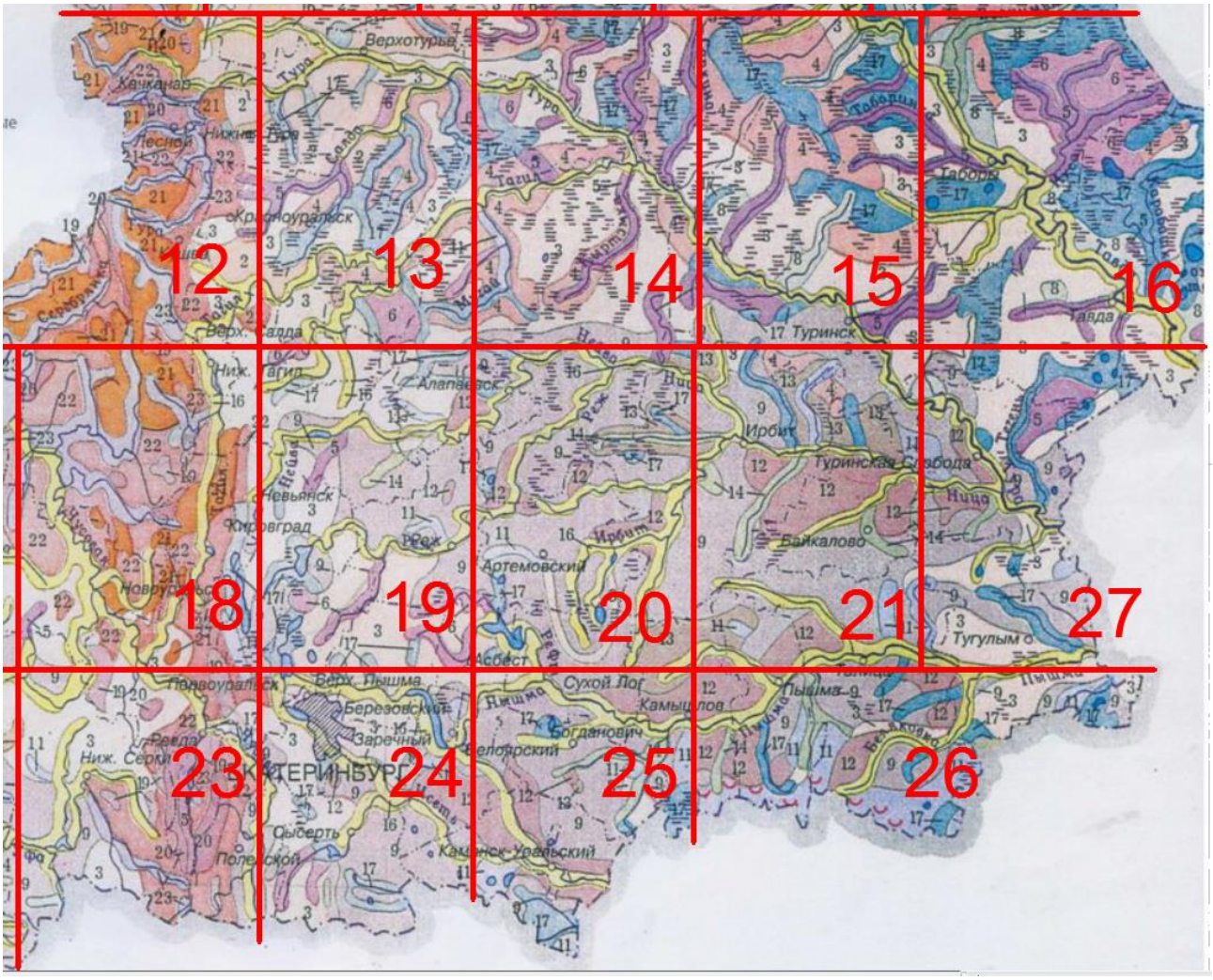
Лугово-черноземные почвы

- ***A*** *– гумусовый горизонт, темно-серый, почти черный, рыхлый, зернистой или комковато-зернистой структуры;*
- ***AB*** *– нижний гумусовый горизонт, темно-серый с буроватым оттенком, грубо-зернистой или комковатой структуры, в нижней части горизонта возможно появление карбонатов в виде псевдомицелия*
- *Общая мощность гумусовых горизонтов – 35-70 см, иногда до 120 см;*
- ***B*** *– переходный горизонт, неоднородно окрашен, бурый, с большим количеством темно-серых и буро-серых гумусовых языков; языки опускаются до глубины 100 см; структура ореховато-призматическая, возможно появление карбонатов в виде псевдомицелия и общей пропитки;*
- $C_к$ *– материнская порода палевого цвета со следами оглеения в виде ржаво-охристых пятен и прожилок, с выделениями карбонатов в виде общей пропитки, псевдомицелия, примазок.*

2.2. Почва как компонент природной геосистемы.

Ознакомиться с типами почв на территории Свердловской области используя почвенную карту, скопировать индивидуальный участок, отобразить его в цвете, составить легенду и пояснительную записку. Номера индивидуальных участков (повариантно) на общей схеме:


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
17
22
Краснотурьинск
Серов
Североуральск
Карпинск



Образец пояснительной записки к выданному фрагменту почвенной карты:



22 вариант:
12- черноземы оподзоленные и выщелоченные;
9 - серые лесные
10 - серые лесные остаточно-карбонатные
20 - дерново-карбонатные

Почвенный покров рассматриваемой территории сформировался в условиях резко континентального климата под покровом лесостепной растительности. Он представлен черноземами, серыми лесными, дерново-карбонатными пойменными, пойменными дерново-глеевыми, пойменно-болотными и овражно-балочными почвами.

Почвы черноземного типа получили распространение в северной части Приурочены они к довольно ровным элементам рельефа, сформировались на глинах.

Серые лесные почвы получили распространение в западной части. Они приурочены к пологим, слабопологим склонам, вершинам увалов. Сформировались на карбонатных глинах, суглинках, известняках, в местах близкого залегания коренных пород на щебенчатом аллювии. В зависимости от степени карбонатности почвообразующих пород и степени развития дернового процесса выделены светло-серые и серые почвы. Наибольшее распространение получили серые.

Дерново-карбонатные почвы встречаются небольшими участками и в сочетании с серыми лесными почвами. Сформировались они на сабо выветрелом маломощном элювии известковистых пород. В сельском хозяйстве используются в основном под пастбища или находятся под лесными насаждениями.

Пойменные почвы сформировались в прирусловой и центральной частях пойм рек Уфы и Сарги, в условиях интенсивного аллювиального процесса, под покровом разнотравно-луговой растительности. Представлены пойменными дерновыми почвами и современными аллювиальными (песчаными) отложениями. Пойменные дерновые почвы частично используются под сенокосы.

Пойменные дерново-глеевые почвы приурочены к плоским равнинным участкам поймы и неглубоким понижениям. Сформировались они под влажными разнотравно-злаковыми лугами и влажными лесами.

Пойменно-болотные почвы сформировались под покровом богатой растительности: осока, тростники, хвощи, камыши с примесью крупного разнотравья. Из кустарников преобладают ольшаники, ивняки, березняки. Они вытянуты узкими полосами по дну старых речных русел и постоянно переувлажнены.

5. Геохронологическая шкала

Эонотема (зон)	Эра	Система (период). Цвет		Отдел (эпоха)	Возраст млн. лет	Основные события
ФАНЕРОЗОЙСКАЯ	ПАЛЕОЗОЙСКАЯ, PZ	Четвертичная Q Желто-серый		Голоцен Q_{IV}	2,58	Конец Ледникового Периода. Возникновение цивилизаций
				Плейстоцен QI-QIII		Вымирание крупных млекопитающих. Появление современного человека
		Неогеновая N Желтый		Плиоцен N_2 Миоцен N1	23,3	Появились первые люди (род Homo).
		Палеогеновая Р Оранжево-желтый		Олигоцен	66	Появление первых человекообразных
				Эоцен Палеоцен		Появление первых «современных» млекопитающих
	МЕЗОЗОЙСКАЯ, MZ	Меловая К Зеленый		Верхний $К_2$ Нижний К.	145	Первые плацентарные млекопитающие. Вымирание динозавров
		Юрская J Синий		Верхний $]_3$ Средний J_2 Нижний J	201,3	Появление сумчатых млекопитающих и первых птиц. Расцвет динозавров.
		Триасовая Т Фиолетовый		Верхний $Т_3$ Средний $Т_2$ Нижний Т	252,2	Первые динозавры и яйцекладущие млекопитающие.
	ПАЛЕОЗОЙСКАЯ, PZ	Пермская Р Оранжево-коричневый		Татарский $Р_3$ Биармийский $Р_2$ Приуральский Р1	298,9	Вымерло около 95 % всех существовавших видов. Сформировалась Гондвана, при столкновении двух континентов образовались Пангея и Аппалачские горы. Океан Панталасса
		Каменноугольная С Серый		Верхний $С_3$ Средний $С_2$ Нижний С1	358,9	Появление деревьев и пресмыкающихся.
		Девонская D Коричневый		Верхний D_3 Средний D_2 Нижний D1	419,2	Появление земноводных и споровых растений. Начало формирования уральских гор
		Силурийская S Серо-зеленый	S 2	Пржидольский Лудловский	443,8	Ордовикско-силурийское вымирание. Выход жизни на сушу: скорпионы; появление челюстноротых
			S,	Венлокский Лландоверийский		
		Ордовикская 0 Оливковый		Верхний 0_3 Средний 0_2 Нижний 0l	485,4	Ракоскорпионы, первые сосудистые растения.
		Кембрийская е Голубовато-зеленый		Верхний $Č_3$ Средний $Č_2$ НИЖНИЙ Č|	535	Появление большого количества новых групп организмов («Кембрийский взрыв»).
Верхнепротерозой-ская PR2			Вендская Розовый	Верхний V_2 Нижний V 1	600	
	Рифейская	Верхний RF_3 Средний RF_2 Нижний RF1 Розово-оранжевый			1030 1350 1650	
Нижнепротерозой-ская PR1 (Карельская)		Верхнекарельская KR_2			2100	
		Нижнекарельская KR1			2500	

Верхнеархейская AR_2 Лопийская LP	Сиреневато розовый			3200	
Нижнеархейская AR1 Саамская, SM				>3200	

Геохронологическая шкала является важнейшим документом, удовлетворяющим последовательность и время геологических событий в истории Земли.

1. Геохронологический возраст указан по «Глобальной шкале геологического времени» на 2015 г.

2. Геологическое время разделяется на эры и периоды, а толща горных пород - на соответствующие эратемы и системы. Названия эратем и систем повторяют названия эр и периодов, например: в каменноугольный период формировались залежи каменного угля, но каменноугольная система характеризуется распространением угленосных отложений. В первом случае речь идёт о времени, во втором - об отложениях.

3. Наиболее крупным подразделением является эонотема (эон). Выделяется 3 эонотемы: архейская (греч, «археос» - древнейший) - более 3,5-2,6 млрд. лет; протерозойская (греч, «протерос» - первичный) - 2,6 млрд. лет-570 млн. лет; фанерозойская (греч, «фанерос» - явный) - 570-0 млн. лет. Эонотемы подразделяются на эратемы (эры), а они в свою очередь на системы (периоды) и отделы (эпохи).

4. Фанерозойская эонотема (эон) подразделяется на эратемы (эры): палеозойскую (греч, «палеос» - древний, «зоо» - жизнь), состоящую из 6 систем (периодов); мезозойскую (греч, «мезос» - средний) из 3 систем и кайнозойскую (греч, «кайнос» - новый) из 3 систем. 12 систем (периодов) названы по той местности, где они впервые были выделены и описаны (кембрийский, девонский, пермский, юрский), либо по имени племен, населявшим ту или иную территорию (ордовикский, силурийский), либо по характерным особенностям отложений (каменноугольный, меловый). Системы (периоды) делятся на отделы (эпохи).

5. Геологические периоды обладают разной длительностью от 20 до 100 млн. лет. Четвертичный период или антропоген (греч, «антропос» - человек) по длительности не превышает 1,8-2,0 млн. лет и ещё не окончен.

6. Все подразделения геохронологической и стратиграфической шкал ранга системы (периода) обозначаются по первой букве латинского наименования, например кембрий - e, ордовик - O, силур - S, девон - D и т.д., а отделы (эпохи) обозначаются цифрами - 1,2,3, которые ставятся справа внизу от индекса: нижняя юра J1, верхний мел -

K_2 и т.д. Каждая система (период) показывается на геологической карте определенным общепринятым цветом.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. проректора
по учебно-методическому комплексу
_____ В. В. Дубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

ОСНОВЫ ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВА И ТЕРРИТОРИАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Направление подготовки:
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль):
Кадастр недвижимости

Автор: Колчина М. Е., канд. экон. наук

Одобрено на заседании кафедры
геодезии и кадастров
(название кафедры)
Зав. кафедрой _____
(подпись)
Акулова Е. А.
(Фамилия И. О.)
Протокол № 1 от 09.09.2024
(Дата)

Рассмотрено методической комиссией
горно-технологического факультета
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Борисова Ю. С.
(Фамилия И. О.)
Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Введение	2
1	**Состав и содержание КП**	3
	Введение	5
	Анализ и оценка ситуации (в К.П. – глава 1)	6
	Градостроительная оценка территории планировочного района (в К.П. – глава 2)	11
	Перспективы территориального развития города (в К.П. – глава 3)	15
	Заключение	15
2	**Требования к оформлению пояснительной записки**	16
	Оформление текстовой части пояснительной записки	16
	Составление и оформление списка литературы	19
	Оформление графической части курсовой работы	21

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации предназначены для студентов направления подготовки Направление подготовки: *21.03.02 Землеустройство и кадастры*, профилю подготовки: «Кадастр недвижимости» и «Геодезическое обеспечение землеустроительных и кадастровых работ» для студентов очной и заочной форм обучения.

В курсе освоения дисциплины «Основы градостроительства и территориальное планирование» студентам предложено выполнить курсовой проект по теме: **Градостроительная оценка территории населенного пункта (на примере города** [по выбору студента]**)**. Объектом рассмотрения является любое муниципальное образование Свердловской области и др. субъектов РФ, соответственно, их административных центров и одного из планировочных районов города.

Актуальность данной темы вызвана требованиями земельного и градостроительного законодательства о создании устойчивой системы территориального развития и рационального использования земель, в том числе населенных пунктов.

Предметом исследования являются принципы и методы градостроительной оценки территорий населенных пунктов.

Объектом исследования является территория муниципального образования и городского населенного пункта.

Целью исследования является анализ и оценка землепользования и застройки территории административного центра муниципального образования и его элемента – планировочного района, включая анализ градостроительного зонирования, улично-дорожной сети, застройки территории, системы обслуживания населения и озеленения территории.

Исходными данными для выполнения КП выступают все доступные аналитические и картографические материалы:

- карты планы любого масштаба;
- карты и планы, имеющиеся в сети Интернет и опубликованные на сайтах соответствующих муниципальных образований;
- карты градостроительного зонирования и градостроительные регламенты, опубликованные на сайтах соответствующих муниципальных образований;
- сведения о перспективе развитии территории города - основные положения генеральных планов городов;

Картографическую основу студент подбирает самостоятельно. Работа выполняется как на бумажных носителях, так и в электронном варианте.

1 СОСТАВ И СОДЕРЖАНИЕ КП

Тема КП: ***Градостроительная оценка территории населенного пункта (на примере города*** [по выбору студента]***)***

Состав работы:

- *текстовая часть работы;*
- *графическая часть работы*.

Состав пояснительной записки:

Пояснительная записка включает:
Введение (1,5 стр.);
Главы 1, 2, 3 (12-15 стр.);
Заключение (1,0 стр.);
Список литературы;
Приложения.

ВВЕДЕНИЕ

1 АНАЛИЗ И ОЦЕНКА СИТУАЦИИ (4-5 стр.)

1.1 Общие сведения о муниципальном образовании [указать название МО - по выбору студента]

1.2 Система расселения на территории муниципального образования [указать название выбранного студентом МО]

1.3 Характеристика административного центра городского округа [указать название соответствующего выбранному студентом МО]

2 ГРАДОСТРОИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТЕРРИТОРИИ ПЛАНИРОВОЧНОГО РАЙОНА [указать название планировочного района] (4-5 стр.)

2.1 Градостроительное зонирование территории планировочного района.

2.2 Анализ улично-дорожной сети планировочного района.

2.3 Особенности застройки планировочного района.

2.4 Характеристика системы обслуживания населения, проживающего в планировочном районе.

2.5 Характеристика системы озеленения территории планировочного района.

3 ПЕРСПЕКТИВЫ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ГОРОДА [добавить название, соответствующее выбору студента] (4-5 стр.)

3.1 Общие положения генерального плана.

3.2 Развитие транспортной системы.

3.3 Развитие жилой зоны и системы обслуживания населения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ПРИЛОЖЕНИЯ:

Приложение А. Схема расселения на территории МО [указать название соответствующего выбранному студентом МО]

Приложение Б. Схема градостроительного зонирования территории планировочного района

Приложение В. Схема улично-дорожной сети территории планировочного района

Приложение Г. Схема озеленения территории планировочного района

<u>Состав и содержание графического материала</u>

Графические материалы могут быть расположены:

- в текстовой части работы в виде рисунков (фотографии, безмасштабные схемы, скрины и пр.);
- в приложении (чертежи).

На все чертежи, расположенные в текстовой части пояснительной записки и в приложении, должны быть сделаны ссылки, т.е. должно быть соответствие текста и графики.

Перечень и содержание чертежей:

- **схема расположения муниципального образования** должна отображать расположение муниципального образования на территории Свердловской области и границы с сопредельными территориями (другими муниципальными образованиями) [размещается в тексте раздела 1.1];
- **схема расселения** выполняется студентом на базе карты в виде генерализированного чертежа [размещается в тексте раздела 1.1 1.2 и Приложении А];
- **план-схема города** [указать название соответствующего выбранному студентом] должна отображать планировочную структуру и застройку населенного пункта, на схеме должны быть обозначены границы территории планировочного района, который будет анализироваться во второй главе работы [размещается в тексте раздела 1.3];
- **схема градостроительного зонирования территории планировочного района**: размещается в текстовой части (в разделе 2.1 в виде фрагмента официальной карты градостроительного зонирования города) и в Приложении Б (градостроительное зонирование территории планировочного района выполняется студентом самостоятельно в ПК (AutoCad / Credo / MapInfo) или вручную (хорошей графикой);
- **схема улично-дорожной сети исследуемой территории**: размещается в тексте раздела 2.2 и в Приложении В, выполняется студентом в ПК или вручную, на схеме различными условными обозначениями выделяются железные дороги с вокзалом; городские автодороги и крупные парковые дороги, магистральные улицы общегородского и районного значения, набережные, улицы местного значения (в жилой застройке, в промышленной застройке), транспортные узлы (транспортные развязки, стоянки), мосты;
- **схема озеленения исследуемой территории**: выполняется студентом, на схеме различными цветами (условные обозначения) должны быть выделены зеленые зоны общего пользования, отличающиеся по статусу и назначению

(лесопарки, парки, сады, скверы, бульвары), схема выполняется в ПК или вручную (Приложении Г);

- **схема генерального плана** МО применительно к исследуемому городу размещается в тексте (в главе 3).

Все чертежи в приложениях выполняются студентами самостоятельно, кроме схемы генерального плана

Состав и содержание текстовой части курсовой работы

Введение отображает краткое содержание и структуру работы, в частности, в нем необходимо показать *актуальность работы* (темы). Актуальность – это некоторая преамбула, которая настраивает читателя на определенную волну и подчеркивает значение исследования (анализа), выполняемого в работе.

Во введении также отражаются *цели* и *задачи* работы. Как правило, цель работы соответствует названию работы (темы).

Задачи отражают последовательность этапов достижения поставленной цели. Как правило, они соответствуют названию глав и разделов работы (см. выше), сформулированных руководителем.

Во ведении указывается исходный материал для выполнения работы, а также показывается состав работы, разработанный руководителем (см. выше).

Пример содержания введения показан ниже.

Примерное содержание текста введения

Вопросами развития территорий муниципальных образований и входящих в их состав населенных пунктов занимается градостроительство. Исторически градостроительство рассматривалось, как комплексная и многосторонняя деятельность по созданию, развитию и реконструкции населенных пунктов и их систем, включающая архитектурное и инженерное проектирование, социальное, экономическое и экологическое планирование, законодательное регулирование. Современная градостроительная деятельность – это деятельность по развитию территорий, в том числе городов и иных населенных пунктов, осуществляемая в виде территориального планирования, градостроительного зонирования, планировки территории, архитектурно-строительного проектирования, строительства, капитального ремонта, реконструкции объектов капитального строительства, эксплуатации зданий, сооружений.

Территориальное развитие муниципальных образований и входящих в их состав населенных пунктов – это постоянный процесс, основанный на сведениях о современном состоянии территории, ее использовании и застройке, перспективах развития в соответствии с основными положениями экономического и социального развития и нормах (требованиях) градостроительного законодательства.

Анализ и оценка состояния и использования территории является первым и важнейшим этапом в процессе подготовки документации по территориальному планированию, планировке и застройке (реконструкции) этих территорий.

Целью данной работы является анализ и оценка землепользования и застройки территории административного центра муниципального образования (*название*) и центральной его зоны, включая улично-дорожную сеть, систему обслуживания населения и озеленения территории.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие *задачи*:

1. Изучить нормативную правовую и нормативно-техническую базу в области градостроительной деятельности;
2. Проанализировать особенности расселения населения центральной части муниципального образования.
3. Исследовать особенности землепользования и застройки города, особенности сложившихся систем улично-дорожной сети, обслуживания населения и озеленения территории.
4. Выполнить детальный анализ землепользования и застройки центральной части населенного пункта, а именно: градостроительное зонирование, улично-дорожную сеть, систему обслуживания населения и систему озеленения территории.
5. Проанализировать перспективы развития города по материалам генерального плана.

Исходными материалами являются карта муниципального образования (*название*) М 1:100000, схема города (*название*), фрагмент карты города М 1:10000 (1:12500), Генеральный план города, Карты градостроительного зонирования, Правила землепользования и застройки.

Работа состоит из введения, трех глав и заключения, включает ХХХ рисунков, ХХХ таблиц и ХХХ приложений.

Глава 1 курсовой работы - АНАЛИЗ И ОЦЕНКА СИТУАЦИИ

В разделе **1.1 Общие сведения о муниципальном образовании (***указать название МО***)** необходимо:

1) указать:

- статус исследуемого муниципального образования (далее – МО). *МО могут быть городскими округами, поселениями (городскими или сельскими), муниципальными районами.*
- дату возникновения МО, численность и площадь МО – *информацию взять из ИНТЕРНЕТА, с официального сайта МО.*

2) выполнить описание границ МО со ссылкой на рисунок–схему, на которой должно быть показано местоположение исследуемого МО в системе субъекта РФ – описание границы должно включать краткую информацию о сопредельных территориях и местоположении границ *(на севере, юге, западе, востоке и т.д.)* и ссылку на рисунок 1.

3) выполнить описание природно-географических особенностей территории МО: растительности, гидрографии, рельефа местности и пр.;

При описании гидрографии района необходимо указать степень заболоченности территории, местоположение имеющихся на местности озер, болот.

4) дать краткую характеристику экономики МО

Информацию взять с карт и из ИНТЕРНЕТА

<u>Примерное содержание текста 3-го пункта раздела 1.1:</u>

На рассматриваемой территории МО (название) преобладают хвойные и смешанные леса. В северо-восточной части карты расположен заповедник (название, если таковой есть) Главной водной артерией является река (название), протекающая с ххххх на ххххх. Данная река имеет протяженность более (или менее) 10 км, несудоходная (или судоходная). Река (название) имеет два притока

(если таковые есть): на ххххх в нее впадает река (название), имеющая протяженность ххххх км (менее 10 км), а в ххххх части – река (название), имеющая протяженность ххххх км.

В целом исследуемая территория имеет спокойный рельеф, несколько всхолмленный. В восточной части расположен горный массив ……

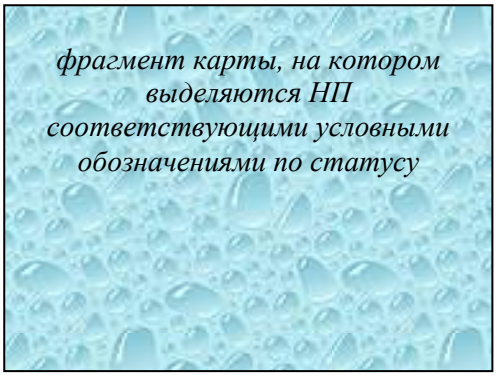
Большая часть территории муниципального образования покрыта лесами. .....

В разделе 1.2 **- Система расселения на территории муниципального образования** необходимо дать краткую характеристику системы расселения в районе исследуемого города – административного центра муниципального образования:

1) исследовать все населенные пункты, тяготеющие к главному городу МО (административному центру), – все населенные пункты поделить на группы по следующим признакам: городские или сельские, а затем по типу, численности, значимости, градообразующей (хозяйственной) основе и т. д. (*можно в табличной форме*) со ссылкой на приложение А и соответствующий рисунок (*схему разместить в тексте*).

<u>Примерное содержание текста 1-го пункта раздела 1.2:</u>

На исследуемой территории имеется (указать число) населенных пунктов: (перечислить). Их местоположение показано на рисунке ХХ и приложении Б. Среди них хххх населенных пунктов городского типа и хххххх населенных пунктов сельского типа. Административным центром муниципального образования является город хххххххх. Сведения о населенных пунктах и их основные характеристики приведены в таблице хххх.



Условные обозначения:

соответствующие условные обозначения

Рисунок 1 – Схема расселения

Таблица ххх **– Краткая характеристика населенных пунктов**

Наименование	Тип НП	Численность НП	Тип НП по величине	Тип НП по хозяйственному признаку	Тип НП планировочной структуры
Городские					
Аренск	город	35000	малый	промышленный	компактный
Боровск	ПГТ	5000	средний	транспортный	вытянутый
Итого:		…….			
Сельские					
Кизель	ПСТ	3500	средний	аграрно-пром	компактный

Сосновское	село	2500	большое	аграрный	расчлененный
Веселое	село	1500	среднее	аграрный	вытянутый
Бобровка	деревня	250	средняя	аграрный	угловая
Итого:		……..			
Всего:		…….			

Основным требованием к выполнению данного раздела является четкая идентификация НП и соответствие количества и типов НП, находящихся на фрагменте карты, сведениям в таблице. Пример генерализации карты и создания схемы расселения показан на рисунке 2.

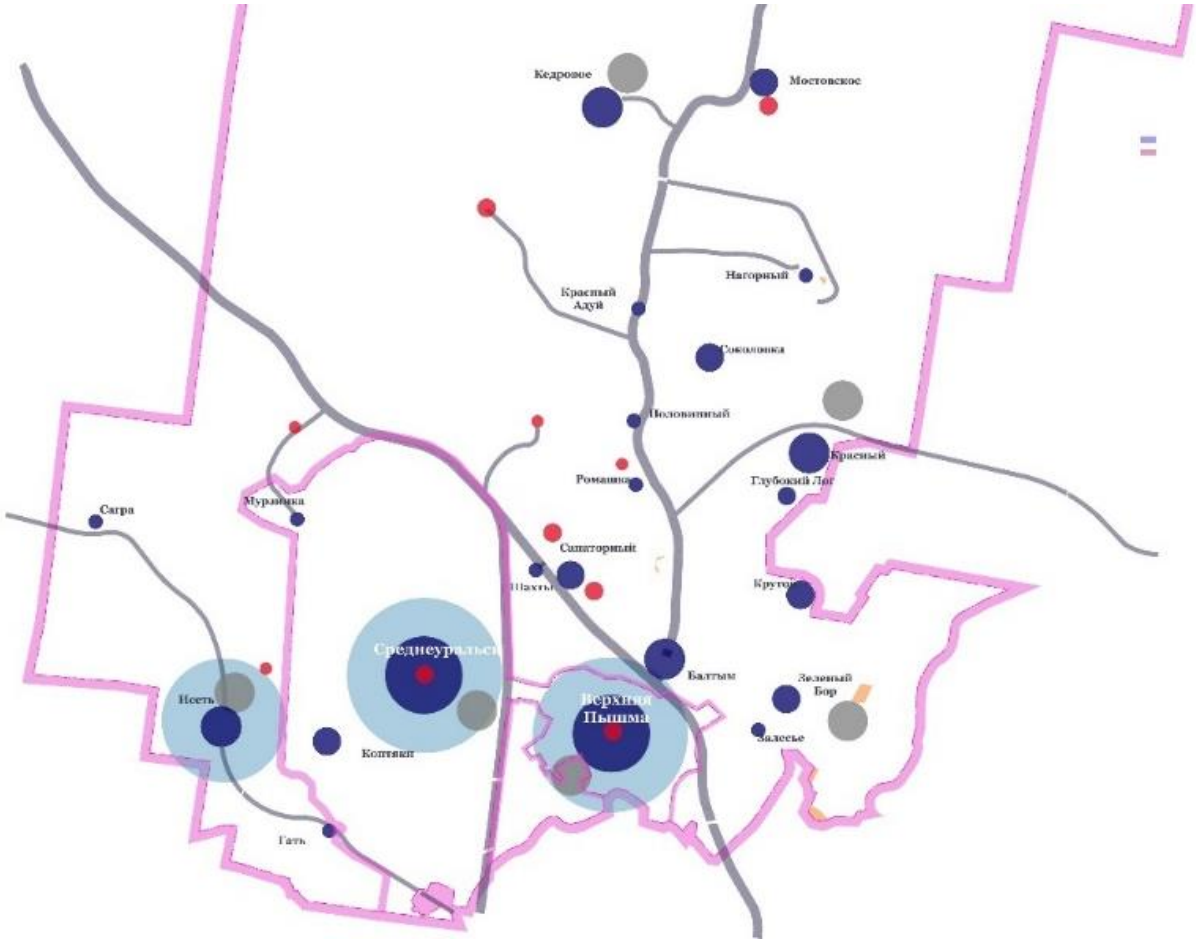


Рисунок 2 - Схема расселения на территории ГО В-Пышма, прилегающей к г. В-Пышма

2) Затем дается описание местоположения и назначения производственных объектов, расположенных вне границ НП *(если таковые имеются)*.

3) Анализу подлежит транспортная сеть исследуемой территории. Указываются типы автомобильных и железных дорог и соединяемые ими НП и др. объекты - информация берется с карты *(по условным обозначениям)*.

Примерное содержание текста по п. 3

На рассматриваемой территории имеется ххххх автодорог с капитальным покрытием и железная дорога (если таковая есть).

Автодорога 2-ой категории проходит с северо-запада на юго-восток и соединяет следующие населенные пункты: п. Иволга, г. Снов, г. Двинск и п. Ясный.

Другая автодорога 2-ой категории проходит с запада на восток, через г. Двинск и соединяет следующие населенные пункты (перечислить)

Железная дорога расположена в южной части карты, она проходит с юго-запада на восток, севернее с. Васино, через г. Снов и соединяет г. Буренск с г. Имень – указать все имеющиеся на фрагменте карты станции и их названия.

Учитывая вышесказанное, можно утверждать, что связи между населенными пунктами (названия) устойчивые, а между ххххх и ххххх – неустойчивые.

4) Результатом исследования является ***вывод*** о системе расселения.

Вид системы расселения зависит от степени развития той или иной отрасли экономики, от преобладания сельских или городских НП, от численности населения.

Системы расселения подразделяются на следующие группы:

- городские – если население преимущественно проживает в городских населенных пунктах (города и ПГТ) и занято в промышленности, торговле, управлении, социальной сфере:
- сельские – если население, преимущественно занято в сельском хозяйстве и проживает в поселках сельского типа, селах, деревнях и пр.

Виды систем по хозяйственному профилю:

- сельскохозяйственные – это районы с развитым сельхоз. производством (пашни, полеводство, животноводство);
- аграрно-промышленные – районы, где наряду с сельхоз. производством имеются промышленные предприятия по переработке сельхозпродукции, объекты энергетики, транспорта и т.д.;
- промышленные – районы с развитым промышленным и энергетическим комплексом (добывающие: горно-, газо- и нефтедобывающие; перерабатывающие: нефтепереработка, металлургия, машиностроение, легкая промышленность),
- курортно-туристические – районы, территории которых отличаются особыми ландшафтами: реки, озера, пляжи, зеленые массивы в сочетании с уникальными рельефами; минеральными источниками; историческим наследием (памятники архитектуры, культуры и истории)

Типы систем расселения по отношению – размещению НП относительно друг друга:

- рассредоточенное (дисперсионное), когда НП равномерно (равноудалено) распределены по территории,
- сосредоточенное (концентрированное), когда НП сконцентрированы в явно выраженную группу.

Формы расселения:

- автономная – обособленные населенные пункты, находящиеся друг от друга на большом расстоянии, ведущие каждый по себе самостоятельное хозяйство;
- групповая – группа населенных пунктов (с одним или двумя центрами), связанных друг с другом тесными хозяйственными связями;

- оазисная – небольшая группа населенных пунктов со своим центром, изолированная от других в силу определенных природных или климатических условий.

Концентрация населенных пунктов формирует оазисные и групповые системы расселения.

Если система расселения окажется групповой, то необходимо выполнить анализ отношения этой системы к агломерации. Для этого необходимо подсчитать плотность населения, определить количество населенных пунктов в центральной части групповой системы расселения, определить устойчивость связей и т.д.

Примерное содержание текста по п. 4.

Выводы. Анализ расселения позволяет сделать вывод, что сложившая в данном районе система расселения является групповой, моноцентрической, о чем говорит скопление населенных пунктов и выделение в этом ядре наиболее крупного города, являющегося его центром. Данная система расселения является складывающейся агломерацией, так как плотность населения ххх чел/км2, с количеством городских населенных пунктов в центральной части групповой системы расселения – ххх., расположенных друг от друга на расстоянии ххх км.».

В разделе 1.3 - **Характеристика административного центра городского округа**

1) указываются статус, дата возникновения и площадь НП,

2) дается описание границ города (по аналогии с описанием границ МО);

3) дается характеристика:

- сложившейся планировочной схемы (причины ее становления);
- функционального зонирования территории (расположения основных территориальных зон: жилой, общественно-деловой, производственной, рекреационной и др.);
- застройки в различных районах НП;
- улично-дорожной сети и ее особенности;
- системы обслуживания населения;
- системы озеленения

со ссылкой на рисунок в тексте и приложение В

Примерное содержание текста

Как было отмечено ранее, город ххх является административным центром городского округа ххххххх. Он возник в 1824 году в связи со строительством предприятия по ххххх, а статус города приобрел в 1935 г.

Город расположен в южной части муниципального образования. В современных границах он занимает ххххх га,

В планировочном отношении, данный населенный пункт является компактным (см. рисунок 3).

На территории города ххххххххх находятся промышленные, транспортные, складские, коммунальные, инженерные и военные объекты, а также здания жилого, общественного, исторического и культового назначения. В границах населенного пункта имеются водоемы (такие-то), лесопарки (такие-то) и пр.

Основу экономики города составляют следующие предприятия: (перечислить)

Они расположены в таких-то частях города и образуют ххххх производственных зоны: южную, северную и западную. В состав производственных

зон также входят объекты складского, коммунального и инженерно-транспортного назначения.

Жилые зоны, образованные индивидуальными и многоквартирными жилыми домами, расположены в центральной, юго-западной и южной частях города. В центральной части города преобладает застройка из жилых домов средней и малой этажности (можно включить в текст фотографии жилых домов). Периферийные жилые районы представлены индивидуальным сектором (если есть названия у жилых районов – указать).

Город хххххххх имеет двух уровневую (трехуровневую) систему обслуживания. Первый уровень представлен объектами общегородского значения, к которым относятся: (перечислить) Второй уровень представлен объектами районного значения, к которым относятся: (перечислить). Третий (первичный) уровень обслуживания населения представлен магазинами, аптеками, отделениями банков, детскими садами, школами и пр.

Земельные участки под объектами обслуживания общегородского и районного значения, а также система улиц и площадей, обеспечивающих к этим объектам подъезды и подходы образуют общественно-деловую зону города, которая расположена в центральной и ……. частях города. Объекты первичного обслуживания входят в состав жилой зоны.

Транспортная инфраструктура города включает: систему улиц и дорог, обеспечивающих связь между удаленными районами города и выезд на дороги общего пользования, обеспечивающие связь с другими населенными пунктами, промышленными и транспортными объектами, а также с зонами отдыха. На территории города имеются дороги, соединяющие ххххххх, магистральные улицы общегородского и районного значения, обеспечивающие связь хххххххххх, улицы местного значения (улицы в жилой и промышленной застройке), обеспивающие связь ххххххх. На пересечении дорог имеются двухуровневые и одноуровневые развязки (если таковые имеются).

Структура улично-дорожной сети имеет смешанный характер. В центральной и восточной частях города преобладает ххххххх (например, регулярная прямоугольная система), в северной и южной частях – ххххххх (например, свободная), на западе – ххххх (например, регулярная лучевая).

Озеленение города представлено лесопарками, парками, садами и скверами. Лесопарки расположены в ххх, ххх и ххх частях города, они предназначены для отдыха и прогулок и являются основой рекреационной зоны города. Центральный парк культуры и отдыха расположен в части города. Скверы выступают составной частью общественно-деловой зоны города.

Глава 2 курсовой работы - ГРАДОСТРОИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТЕРРИТОРИИ ПЛАНИРОВОЧНОГО РАЙОНА *(указать название планировочного района)*

Главным условием выполнения данной главы работы является выполнение многофакторного анализа фрагмента городской территории в одних и тех же границах и выполнение чертежей (схем соответствующего анализа) студентом самостоятельно с использованием информации, имеющейся на официальных сайтах соответствующих МО, только для выбранного участка.

В разделе 2.1 **Градостроительное зонирование территории планировочного района** необходимо:

- в соответствии с градостроительным зонированием выбранного фрагмента городской территории (из ПЗЗ) выполнить чертеж приложения Б (М 1:10000 или др.) дать описание соответствующих зон:

- указать тип и название, местоположение, границы (с чем граничат), регламенты (из ПЗЗ) и дать характеристику сложившейся застройки. Выделить на карте градостроительного зонирования исследуемой территории зоны (Ж1, Ж2, Ж3 и т.д.,) и др.

Примерное содержание текста

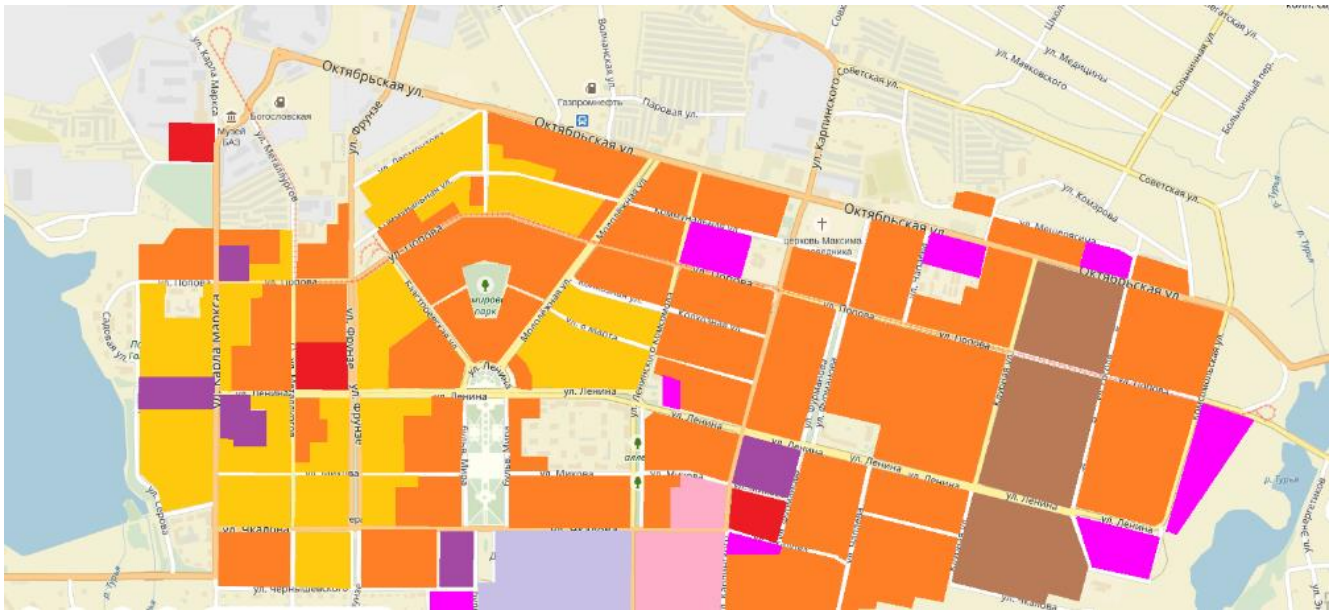
В границах исследуемой территории города можно выделить следующие территориальные зоны: жилую, общественно-деловую, ……. (перечислить все, что имеются на фрагменте карты).

Жилая зона Ж1 представлена индивидуальными жилыми домами с приусадебными участками. Жилая зона Ж2 представлена домами средней этажности. Жилая зона Ж3 представлена жилыми домами малой этажности секционного типа. Жилая зона Ж4 представлена жилыми домами смешанного типа.

Общественно-деловой центр (зона Ц1) формируют здания административного, делового и хозяйственного назначения. В ее состав входят также ……. Зона обслуживания населения Ц2 сформирована объектами специализированного назначения (спортивными, здравоохранения и пр.). Зона Ц3 – историческая часть города. Зона Ц4 – зоны промышленных центров и т.д. (по ситуации)

Рекреационная зона расположена в северной и южной части исследуемой территории населенного пункта. Она представлена следующими объектами: ……. В пойме реки расположены: парк, пляжи и т.д. (по ситуации)

Схема градостроительного зонирования показана на рисунке ХХ и чертеже Приложения Б.


Октябрьская ул.
Октябрьская ул.
Октябрьская ул.
Октябрьская ул.
ул. Ленина
ул. Ленина
ул. Ленина

На схеме кроме выделения зон цветом необходимо обозначить условным обозначением

В разделе 2.2 **Анализ улично-дорожной сети планировочного района** необходимо выделить на фрагменте плана (приложение В) дороги и улицы различного уровня *(магистральные улицы общегородского и районного значения и улицы местного значения, площади- транспортные узлы)* и дать их описание в соответствии с СП 42.13330.2011.

Информация студенту: *Статус и назначение дорог и улиц согласно СП 42.13330.2011:*

Магистральные дороги:

- скоростного движения – скоростная транспортная связь между удаленными промышленными и планировочными районами в крупнейших и крупных городах; выходы на внешние автомобильные дороги, к аэропортам, крупным зонам массового отдыха и поселениям в системе расселения. Пересечения с магистральными улицами и дорогами в разных уровнях

- регулируемого движения – транспортная связь между районами города на отдельных направлениях и участках преимущественно грузового движения, осуществляемого вне жилой застройки, выходы на внешние автомобильные дороги, пересечения с улицами и дорогами, как правило, в одном уровне

Магистральные улицы:

общегородского значения:

- непрерывного движения – транспортная связь между жилыми, промышленными районами и общественными центрами в крупнейших, крупных и больших городах, а также с другими магистральными улицами, городскими и внешними автомобильными дорогами. Обеспечение движения транспорта по основным направлениям в разных уровнях

- регулируемого движения – транспортная связь между жилыми, промышленными районами и центром города, центрами планировочных районов; выходы на магистральные улицы и дороги и внешние автомобильные дороги. Пересечения с магистральными улицами и дорогами, как правило, в одном уровне

районного значения:

- транспортно-пешеходные – транспортная и пешеходная связи между жилыми районами, а также между жилыми и промышленными районами, общественными центрами, выходы на другие магистральные улицы

- пешеходно-транспортные – пешеходная и транспортная связи (преимущественно общественный пассажирский транспорт) в пределах планировочного района

Улицы и дороги местного значения:

- улицы в жилой застройке для транспортной (без пропуска грузового и общественного транспорта) и пешеходной связи на территориях жилых районов, а также выходов на магистральные улицы и дороги регулируемого движения

- улицы и дороги в научно-производственных, промышленных и коммунально-складских зонах для транспортной связи преимущественно легкового и грузового транспорта в пределах зон (районов), выходы на магистральные городские дороги.

- пешеходные улицы и дороги – для пешеходной связи с местами приложения труда, учреждениями и предприятиями обслуживания, в том числе в пределах общественных центров, с местами отдыха и остановочными пунктами общественного транспорта

- парковые дороги – транспортная связь в пределах территории парков и

лесопарков преимущественно для движения легковых автомобилей

- проезды - подъезд транспортных средств к жилым и общественным зданиям, учреждениям, предприятиям и другим объектам городской застройки внутри районов, микрорайонов, кварталов

- велосипедные дорожки - проезд на велосипедах по свободным от других видов транспортного движения трассам к местам отдыха, общественным центрам, а в крупнейших и крупных городах – связь в пределах планировочных районов

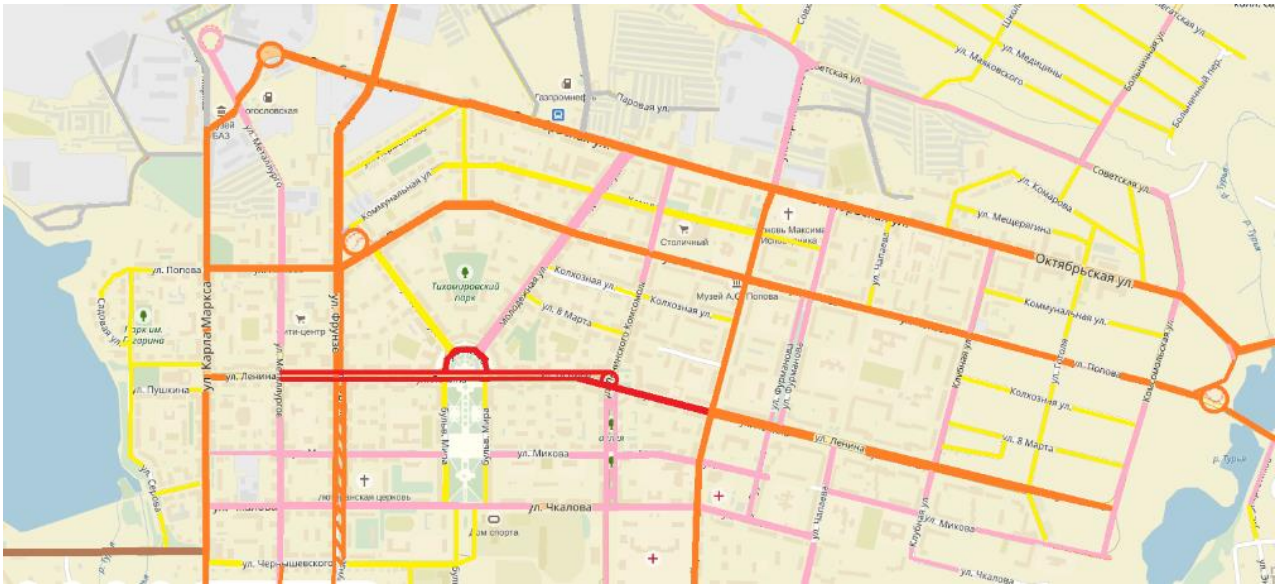
Главные улицы, как правило, выделяются из состава транспортно-пешеходных, пешеходно-транспортных и пешеходных улиц и являются основой архитектурно-планировочного построения общегородского центра.

Характеристики дорог и улиц приведены ниже, в таблице СП42.13330.2011

Для всех улиц и/дорог, находящихся в границах исследуемого планировочного района, необходимо указать название и статус, можно в табличной форме.

При изложении текста необходимо делать ссылки на Приложение В.

Примерный чертеж схемы показан ниже (рисунок 4).



Условные изображения

……..

Рисунок 4 – Схема улично-дорожной сети центрального планировочного района г. Краснотурьинска

В разделе 2.3 **Особенности застройки планировочного района** необходимо дать характеристику зданиям, расположенным в границах исследуемой территории: по этажности, капитальности, назначению и градостроительной значимости. Желательно приложить в тексте фрагмент карты в границах исследуемой территории.

В разделе 2.4 **Характеристика системы обслуживания населения планировочного района** необходимо выделить объекты, формирующие общественно-деловой центр города, в том числе здания, образующие центр города: административного, финансового, торгового, культурного, образовательного, медицинского и пр. назначения, а также здания, образующие

специализированные центры: спортивные, оздоровительные, медицинские, образовательные и др. комплексы. Если в НП имеется, то выделить общественные центры 2-го уровня районного значения. Не путать объекты 2-го уровня обслуживания населения с объектами обслуживания первичного уровня, расположенным в жилой зоне города.

В разделе 2.5 **Характеристика системы озеленения территории планировочного района** необходимо дать характеристику зеленым зонам и насаждениям их образующим, находящимся в границах исследуемой территории:

- лесопарки;
- парки городского и районного значения;
- сады;
- скверы;
- озеленение улиц (бульвары);
- санитарно-защитные зоны техногенных объектов: производственных и коммунально-транспортных предприятий, автомобильных и железных дорог, кладбищ.

Бульвары, как правило, являются частью главных улиц, значимых улиц районного значения.

Указать местоположение и размеры (крупные, большие, небольшие) зеленых зон, если имеются названия.

При описании зеленых зон необходимо делать ссылки на чертеж приложения Г.

Данная глава должна составлять ориентировочно 5-6 страниц.

Глава 3 курсовой работы - ПЕРСПЕКТИВЫ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ГОРОДА

В разделе 3.1 **Общие положения генерального плана** необходимо предоставить информацию о дате утверждения Генерального плана и кратко изложить перспективы территориального развития НП – информацию взять с официального сайта МО. В текстовую часть пояснительной записки включить схему Генерального плана города (безмастабную).

Из утвержденного Генерального плана города берется информация для разделов 3.2 - **Развитие транспортной системы** и 3.3 - **Развитие системы обслуживания населения**:

Глава должна составлять не более 5 страниц.

Заключение курсовой работы должно содержать выводы о проделанной работе, которые включают следующие результаты:

- результаты анализа и оценки существующего землепользования и застройки территории населенного пункта;

- результаты анализа его центральной (исторической) зоны;
- результаты анализа перспектив развития населенного пункта.

В частности, какие проблемы пространственной организации города имеются на сегодня (из генерального плана) и решаются ли существующие проблемы генеральным планом. Это касается территориального развития, транспортной организации, обслуживания населения и озеленения территории.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

Титульный лист оформляется по стандарту.

Оглавление должно включать названия глав и разделов, имеющихся в текстовой части работы, и страницы, с которых они начинаются.

Во **введении** должны быть кратко изложены, в соответствии с темой работы, следующие вопросы:

1) современное состояние исследуемого вопроса (явления, процесса);
2) актуальность темы;
3) цели и задачи работы;
4) использованные материалы.

Список литературы должен содержать все литературные источники литературы, которые студент использовал при составлении пояснительной записки: *научная и другая (законодательная, нормативная, инструктивная, методическая) литература, в том числе Отчеты, Генеральные планы*. Литературные источники должны содержать современную и актуальную информацию.

Оформление текстовой части пояснительной записки

Текст КР должен быть напечатан на одной стороне листа белой односортной бумаги стандартного формата А-4 с соблюдением правил орфографии и пунктуации. При подготовке текста КР, иллюстраций и таблиц необходимо обеспечивать равномерную контрастность и четкость их изображения независимо от способа выполнения.

Параметры страницы: формат листа А-4, ориентация листов - книжная. Верхнее и нижнее поля устанавливаются равными 2 см, правое - 1,5 см, левое - 3 см.

Текст должен быть подготовлен в редакторе Microsoft Word.

Шрифт - Times New Roman.

Размер шрифта – 14.

Межстрочный интервал - полуторный.

Выравнивание заголовков глав и названий рисунков - по центру.

Выравнивание основного текста ВКР - по ширине поля.

Абзацный отступ для 14 шрифта – 1,25 см.

Кроме этого, рекомендуется выполнять следующее:

Подрисуночные подписи: размер шрифта – 12, буквы строчные.

Экспликация: размер шрифта – 11 (цифры и буквы – курсив).

Таблицы:

- номер таблицы – размер шрифта – 12, буквы и цифры строчные;
- название таблицы – размер шрифта – 12, буквы строчные, жирные;
- текст головки таблицы – размер шрифта – 11, буквы строчные;
- текст таблицы – размер шрифта – 12, буквы и цифры строчные (межстрочный интервал – одинарный).

Заголовки (названия глав) печатаются прописными буквами, заголовки разделов глав печатаются строчными буквами, без подчеркиваний. Переносы слов и сокращения в заголовке не допускаются. Расстояние между заголовками и текстом должно быть не менее 3-х интервалов. Нельзя оставлять заголовок на одной странице, а текст переносить на другую.

Нумерация страниц должна быть общей (сквозной) для всего текста, начиная с титульного листа и включая список литературы и приложения. Страницы нумеруются арабскими цифрами на средине нижнего поля. Номер страницы на титульном листе не указывается.

Каждая глава, а также введение и заключение начинаются с новой страницы.

Главы и разделы нумеруются арабскими цифрами. Номер раздела состоит из номера главы и номера раздела, разделенных точкой (например: 1.1, 1.2, 2.2 и т. д.).

В тексте следует пользоваться общепринятой терминологией в области градостроительной деятельности, не допуская одинаковых терминов и обозначений для различных понятий. Слова пишутся полностью, допускаются только *общепринятые сокращения* (произвольные сокращения недопустимы). Выдержки из нормативных правовых актов, авторские высказывания и пр. цитируются дословно (цитаты выделяются в кавычках), либо излагаются своими словами.

По ходу изложения теоретического материала в тексте пояснительной записки КР, после каждого цитирования делаются ссылки на соответствующий литературный источник, в виде ссылки на его порядковый номер в списке литературы, расположенного в конце теста (затекстовая библиографическая ссылка). Номер источника в тексте указывается в квадратных скобках, как правило, в конце предложения (абзаца). Рядом с номером источника указываются номера страниц, на которых изложен использованный текст или цитата. Например: [43, с. 15-17], если информация по исследуемому вопросу повторяется в нескольких источниках, то ссылка осуществляется следующим образом [43, с. 15-17; 52, с. 18-23]. Ссылки в тексте выполняются в строгом соответствии с библиографическим списком по ГОСТ 7.0.5-2008.

Все имеющиеся в пояснительной записке КР иллюстрации (блок-схемы, фотографии, схемы, рисунки, чертежи) и таблицы должны быть упомянуты в тексте, связаны с ним.

Таблицы должны иметь номер и название, определяющее их тему и содержание. Сокращения в заголовках не допускается. Таблицы оформляются

следующим образом. С левой стороны листа пишется слово «Таблица» и проставляется ее порядковый номер арабскими цифрами (нумерация единая по всему тексту). Знак № не ставится. Далее – через тире дается название таблицы, после чего строкой ниже помещается сама таблица. Если таблица переносится на следующую страницу, то над ней в правой верхней части листа вместо названия пишется «продолжение таблицы …». Если таблица размещается вертикально, то ее название должно находиться там, где лист подшивается (у корешка). Пример оформления таблиц в тексте показан ниже (таблица 2).

Таблица 2 – **Распределение земельного фонда Ногинского района по угодьям, га**

Виды угодий	1991 г.	1995 г.	2001 г.
пашня	17056	15936	14793
сенокосы	8089	8002	7381
пастбища	2893	2908	2769
Итого сельскохозяйственных угодий:	28072	26880	24997
лес	32331	32171	32273
прочие угодья	32339	33751	35384
Всего по району:	92802	92802	92634

Таблица в тексте должна занимать не более одной страницы. Если аналитическая таблица по размеру превышает одну страницу, ее следует разместить в Приложении.

На все таблицы, расположенные в тексте и в Приложении, должны быть даны ссылки. Например, «балансовые показатели приведены в таблице 2» или, «технико-экономические показатели, отображающие эффективность застройки, приведены в таблице В.1 Приложения В».

Все ***иллюстрации*** в тексте (схемы, графики, диаграммы, чертежи, фотографии, фрагменты карт и планов и пр.) называются ***рисунками*.** Они должны иметь размер не более одного листа (формат А-4) и сквозную последовательную нумерацию. Рисунок может быть представлен копией рисунка, схемы, карты и пр. из литературного источника или блок-схемами, копией чертежа, выполненными автором работы. Рисунок должен иметь название, соответствующее его содержанию. Если рисунок заимствован из литературного источника определенного автора, то в тексте или названии рисунка необходимо указать фамилию и инициалы автора литературного источника. Пояснительные данные (подрисуночный текст), а также условные обозначения помещают после наименования рисунка.

Расположение рисунка должно быть непосредственно после текста, в котором о нем упоминается впервые, или на следующей странице (если рисунок большой по размерам). На все рисунки, расположенные в тексте, должны быть даны ссылки, например, «схема анализа застройки территории жилого квартала показана на рисунке 8». Пример оформления рисунка приводится ниже (рис. 5).



Условные обозначения:
Xxxx – xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
Xxxx – xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
Рисунок 5 – Схема расположения земельного участка на плане территории

Приложения. Материал, дополняющий текст КР, допускается помещать в приложениях. Приложениями могут быть: графический материал, таблицы большого формата, расчеты и т. д. Приложение оформляется после списка литературы, каждое с новой страницы. В тексте КР на все приложения должны быть даны ссылки. Приложения располагают в порядке ссылок на них в тексте работы. Каждое приложение имеет название, которое размещается наверху посредине страницы после слова «Приложение» и его буквенного обозначения («Приложение А»), обозначающего соответствующую последовательность. Приложения обозначают заглавными буквами русского алфавита, начиная с А, за исключением букв Ё, З, И, О, Ч, Ь, Ы, Ъ. Если в документе одно приложение, оно обозначается «Приложение А».

Приложения, как правило, выполняют на листах формата А4.

Приложения должны иметь сквозную нумерацию страниц. Все приложения должны быть перечислены в оглавлении пояснительной записки ВКР с указанием их номеров и названий.

Более подробное описание оформления таблиц, формул, рисунков, приложений отражено в Межгосударственном стандарте ГОСТ 2.105-95 «Общие требования к текстовым документам».

Составление и оформление списка литературы

Список литературы является составной частью пояснительной записки и размещается после «Заключения». Он отражает проделанную дипломником работу по отбору, использованию и анализу правовых и литературных источников, из которых заимствованы теоретические и методические сведения. В список литературы следует включать все библиографические записи на документы, использованные автором в дипломной работе, в частности, правовые и литературные источники. Библиографическое описание содержит библиографические сведения о документе, приведенные по определенным правилам, устанавливающим наполнение и порядок следования областей и элементов, и предназначенные для идентификации и общей характеристики документа. Объектами составления библиографического описания являются все виды опубликованных и неопубликованных документов на любых носителях – книги, сериальные и другие продолжающиеся ресурсы, картографические, нормативные и технические документы, электронные ресурсы, другие трехмерные искусственные или естественные объекты; составные части документов и пр.

Для составления списка литературы из небольшого количества источников целесообразнее применять систематический способ (в порядке первого упоминания в тексте). С целью правильного описания каждого литературного источника в списке использованной литературы необходимо соблюдать правила библиографического описания документа, изложенные в ГОСТ 7.1-2003. «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила описания». Данный стандарт включает общие требования и правила составления документа – набор его элементов, последовательность, способы их расположения, единую систему условно разделительных знаков (УРЗ).

Примеры библиографического описания

Законодательные материалы

Конституция Российской Федерации: офиц. текст. М.: Маркетинг, 2001. 39 с.

Градостроительный кодекс Российской Федерации: федер. закон [принят Гос. Думой 08.04.1998]. – 4-е изд., стер. – М.: Издательство НОРМА, 2000. – 95 с.

Градостроительный кодекс Российской Федерации [Электронный ресурс]: Закон от 29.12.2004 № 190-ФЗ (с изм. от 23.07.2013 № 247-ФЗ). Доступ из справ.-правовой системы «Консультант Плюс».

Земельный кодекс Российской Федерации: [федер. закон: принят Гос. Думой 28 сент. 2001 г.: по состоянию на 3 сент. 2007 г.]. М.: Изд-во «Омега – Л», 2007. 120 с.

Технический регламент о безопасности зданий и сооружений: Закон от 29.12.2009 № 384-ФЗ. М.: ООО «Проспект», 2011. – 32 с.

Стандарты, СНиПы, СанПиНы, СП

ГОСТ Р 517721-2001. Аппаратура радиоэлектронная бытовая. Входные и выходные параметры и типы соединений. Технические требования. Введ. 2002–01–01. М.: Изд-во Стандартов, 2001. 27 с.

СП 42.13330.2010 (СНиП 2.07.01-89*). Градостроительство. Планировка и застройка городских и сельских поселений [Электронный ресурс]: утв. Приказом МРР РФ от 28.12.2010 № 820. Доступ из справ.-правовой системы «Консультант Плюс»

Правила, инструкции, руководства

Правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных работ при разработке меднорудных месторождений Урала [Текст]: утв. зам. Министра цветной металлургии СССР 28.02.1977. М.: Минцветмет СССР, 1978. 42 с.

Правила устройства и безопасной эксплуатации подъемников (вышек): ПБ 10–256–98, утв. Гостехнадзором России 24.11.98. СПБ.: ДЕАН, 2001. 158 с.

Рекомендации по оценке надежности строительных конструкций по внешним признакам [Электронный ресурс]: разработаны ЦНИИППРОМЗДАНИЙ в 2001. – Режим доступа: http://www.infosait.ru/norma_doc/45/45084/index.htm (дата обращения 20.08.2013).

Книги

Агафонова Н.Н., Богачева Т.В., Глушкова Л.И. Гражданское право: учеб. пособие для вузов под. общ. ред. А. Г. Калпина. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Юристъ, 2002. 542 с.

Анимица Е.Г., Власова Н.Ю. Градоведение. Екатеринбург: Изд-во УрГЭУ, 1998. 309 с.

Малоян Г.А. Основы градостроительства: учеб. пособие. М.: Изд-во «Ассоциации строительных вузов», 2004. 120 с.

Мюссе Л. Варварские нашествия на Западную Европу: вторая волна / перевод с фр. А. Тополева. СПб.: Евразия, 2001. 344 с.

Семенов В.В. Философия: итог тысячелетий. Философская психология. Пущино: ПНЦ РАН, 2000. 64 с.

Справочники, словари

Градостроительство: справочник проектировщика / под общ. ред. В. Н. Белоусова. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1978. 367 с.

Землеустройство, использование и охрана земельных ресурсов: словарь-справочник. 1123 слов и словосочетаний / В. П. Троцкий, С. Н. Волков, И. М. Зак, Г. П. Митляев, А. А. Варламов. М.: ГУЗ, 1996. 193 с.

Статьи из газет, журналов, сборников

Гуляев А. Все дело в разломе: прогноз уральской сейсмоактивности / Вечерний Екатеринбург, газ. 2010. 9 апреля.

Иванов Н.И. Взаимосвязь документации по территориальному планированию с программами социально-экономического развития / «Землеустройство, кадастр и мониторинг земель». 2008. № 10. С. 43-45.

Колчина М.Е. Вопросы создания и ведения информационных систем обеспечения градостроительной деятельности / Известия ВУЗов. Горный журнал. 2012. № 5. С. 45-48.

Коновалов В.Е., Уланова З.Е. Значение кадастра при использовании городских земель для освоения подземного пространства / Проблемы и перспективы подземного строительства на Урале в XXI веке: труды регион. конф. (16-18 мая 2001г.) // Уральская гос. горно-геологическая академия. –Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2001. С. 31-32.

Оформление графической части курсовой работы

Графическая часть работы, с одной стороны, должна максимально полно иллюстрировать текстовую часть работы, а с другой – является основой и отражением тех положений, которые излагает автор в работе.

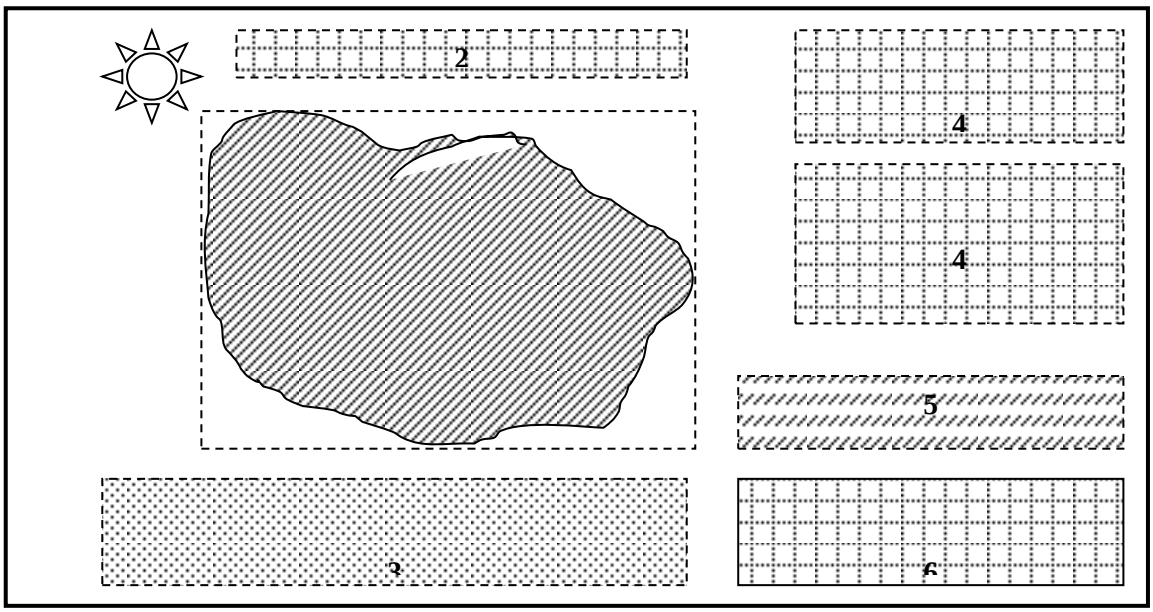
Иллюстративный материал, размещаемый в тексте пояснительной записки КР, должен отображать результаты анализа, проведенного автором работы, и должен быть равномерно распределен в тексте работы. Он может включать следующие виды изображений: блок-схемы, диаграммы, графики, гистограммы, картограммы, тематические схемы-планы (схемы-карты), фотографии, выполненные непосредственно автором, а также рисунки, фотографии, схемы, карты и планы, заимствованные из литературных источников или Интернета. В целом, в тексте дипломной работы должно быть расположено не менее 8–10 иллюстраций (рисунков).

Графический материал, размещаемый в разделе «Приложения».

Чертежи, выполненные автором работы, должны быть оформлены в соответствии с требованиями к оформлению градостроительной документации.

Чертежи должны иметь название, экспликацию, условные обозначения. В правом нижнем углу чертежа вычерчивается штамп. Пример состава и компоновки чертежа приведен на рисунке 6.

На графический материал, размещаемый в Приложении**,** в тексте пояснительной записки ВКР делаются ссылки, например, «план границ земельных участков показан на рисунке Б.2», где «Б» указывает на номер приложения, а «2» – на номер рисунка.



1 – основной чертеж – основная зона изображения; 2 – название чертежа (если имеются другие зоны изображения); 3 – экспликация или условные обозначения; 4 – таблицы; 5 – текст; 6 – штамп

Рисунок 6 - Вариант компоновки основного чертежа

Пример оформления штампа показан на рисунках 7, 8.

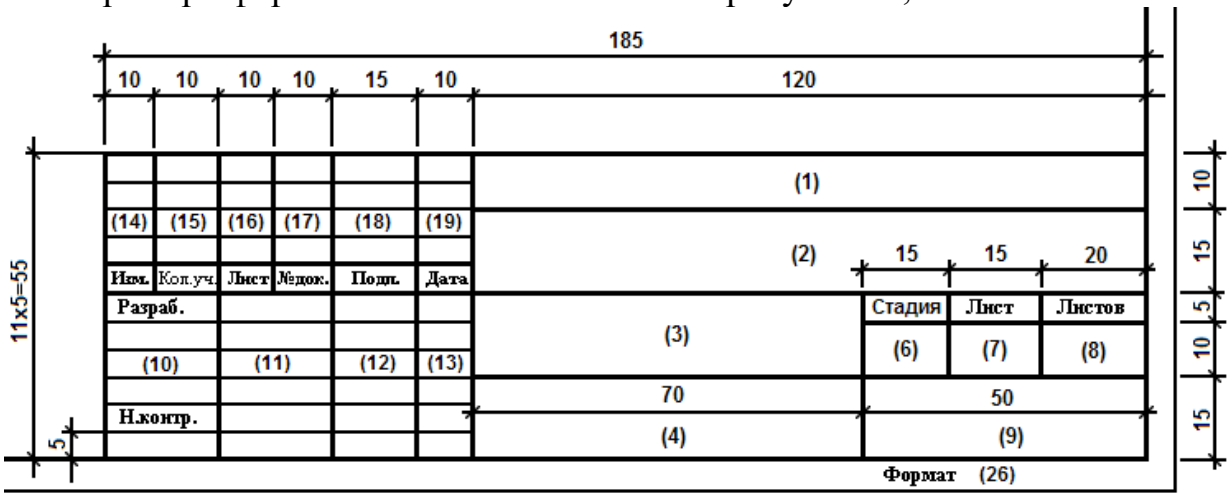


Рисунок 7 – Размеры штампа для основных комплектов рабочих чертежей, графических документов проектной документации и графических документов по инженерным изысканиям (ГОСТ Р 21.1101-2009, приложение Ж – обязательное: форма 3)

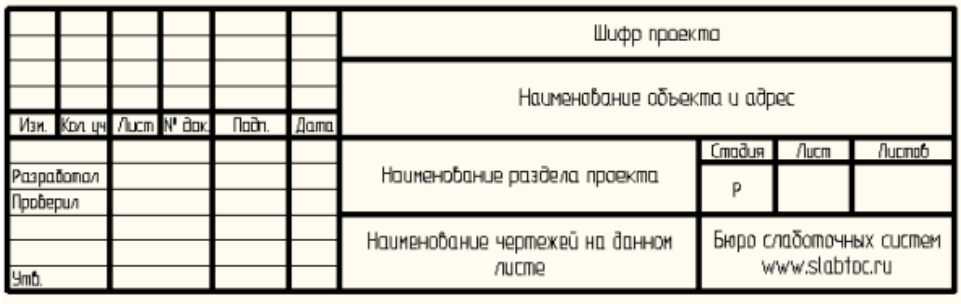


Рисунок 8 – Пример заполнения штампа

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. Проректора по учебно-методическому комплексу _____ В.В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ и задания к контрольным работам

Б1.О.21 ГЕОДЕЗИЯ

Направление подготовки:
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль):
«Кадастр недвижимости»

форма обучения: очная, заочная

Автор: Акулова Е.А.

Одобрена на заседании кафедры
Геодезии и кадастров
(название кафедры)
Зав.кафедрой _____
(подпись)
Акулова Е.А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 9.09.2024
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета
Горно-технологического
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Контрольная работа № 1: «Построение горизонталей по известным отметкам точек»	.....	3
1.1	Рельеф местности и его изображение на картах и планах	.....	3
1.2	Построение горизонталей интерполированием	.....	7
2	Контрольная работа №2: «Определение номенклатуры топографических карт и планов»	.....	11
2.1	Разграфка и номенклатура топографических карт и планов	.....	11

1. Контрольная работа № 1: «Построение горизонталей по известным отметкам точек»

1.1. Рельеф местности и его изображение на картах и планах

Рельефом называют совокупность различных неровностей земной поверхности. Изучение рельефа и способов его отображения на топографических картах и планах имеет важное значение для решения многих задач, связанных с изысканиями, проектированием, строительством и эксплуатаций инженерных сооружений, осуществления землеустроительных мероприятий и решения других задач.

Одним из методов изображения рельефа на топографических картах и планах является метод горизонталей, который является наглядным и позволяет просто представлять формы рельефа и получать его количественные характеристики.

Горизонталью называют линию равных высот [ГОСТ «Термины и определения)]. Мысленно представим, что участок физической поверхности (например, гора) рассекается рядом параллельных уровенных (горизонтальных) плоскостей, отстоящих друг от друга на одинаковом расстоянии. Линии пересечения секущих плоскостей с земной поверхностью проектируют на одну горизонтальную плоскость и получают несколько замкнутых кривых линий – горизонталей.

Расстояние между смежными секущими плоскостями называют *высотой сечения рельефа h* (см. рисунок. 1).

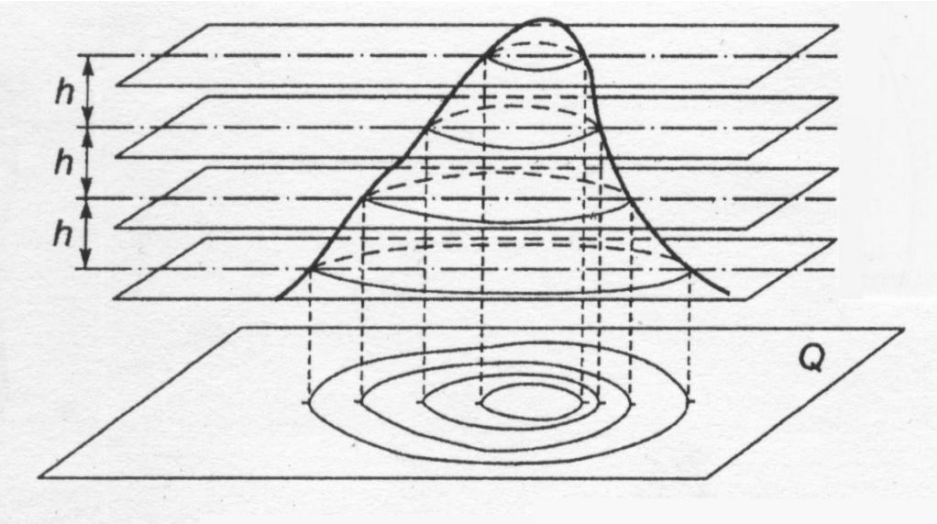


Рисунок 1- Изображение рельефа горизонталями

Рельеф местности представляет собой сочетание различных форм земной поверхности. Основными формами являются: гора, котловина, хребет, лощина, седловина.

Гора – куполообразное или коническое возвышение с выраженным основанием, называемым подошвой. Самая высшая точка горы называется вершиной. Небольшая гора, возвышающаяся над окружающей местностью не более 200 м, называется холмом или высотой, а искусственный холм – курганом. Гора и холм изображается замкнутыми горизонталями с указателями направления скатов (бергштрихами) от вершины к подошве.

Котловина – чашеобразное замкнутое со всех сторон понижение. Самая низкая точка котловины называется дном, а линия местности, от которой начинается понижение в направлении дна, называется бровкой. Котловина, как и гора, изображается замкнутыми горизонталями с бергштрихами в направлении дна.

Хребет – вытянутая в одном направлении возвышенность. Линию, соединяющую самые высокие точки хребта, от которой отходят скаты в противоположные стороны называют водоразделом. Хребет изображается выпук-

лыми горизонталями с бергштрихами в местах выпуклости в сторону понижения местности.

Лощина – вытянутое в одном направлении углубление с постепенно понижающимся дном. Линия, проходящая по дну лощины, называется водосливом или тальвегом. Лощина изображается горизонталями, направленными вогнутостью в сторону понижения местности. Разновидностями лощины являются долины, овраги, балки.

Седловина – понижение между двумя смежными вершинами на хребте. Горизонтали, изображающие две смежные вершины, направлены выпуклостями в стороны седловины. От седловины берут начало две лощины, направленные в противоположные стороны.

Все формы рельефа образуются сочетанием наклонных поверхностей – *скатов*, которые могут быть ровные, выпуклые, вогнутые и волнистые (рис. 2).

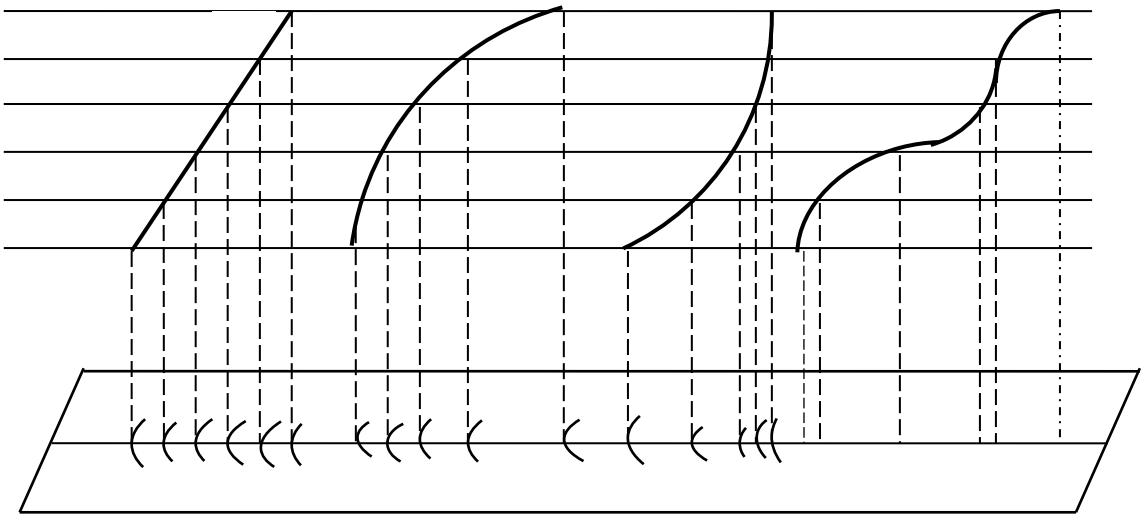


Рисунок 2 - Формы скатов:
а – ровный; б – выпуклый; в – выпуклый; г - волнистый

На рис. 2 горизонтали, изображающие ровный скат, расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. При изображении выпуклого ската

расстояние между горизонталями уменьшается в направлении к основанию ската, а вогнутого ската – увеличиваются к основанию ската. Следовательно, о форме скатов можно судить по характеру расположения горизонталей при изображении рельефа на топографических картах и планах.

Расстояние между горизонталями в плане называется *заложением d.* Величина заложения характеризует *крутизну ската.* Крутизна ската ν – угол наклона ската к горизонтальной плоскости (рис. 3).

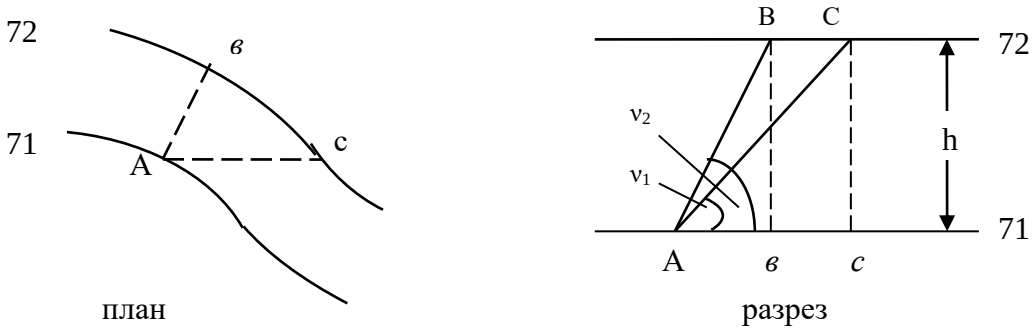


Рисунок 3 -. Крутизна ската:
A*b* = d_1; A*c* = d_2

Отношение высоты сечения рельефа к заложению называют уклон ската *i*:

$$i = tg\nu = \frac{h}{d}. \qquad (1)$$

Уклоны скатов могут выражаться в процентах (%): $i = \frac{h}{d}100$ или в промилях (‰): $i = \frac{h}{d}1000$. Из формулы (1) можно определить крутизну ската. Например: *h* =1 м, *d* = 50 м. Тогда

$$\nu = \text{arctg}\frac{h}{d} = \text{arg tg}\frac{1}{50} = \text{arctg}0{,}02,\ \nu = 1^{\circ}08'.$$

По топографической карте можно определить крутизну ската с помощью шкалы заложений (рис. 4).

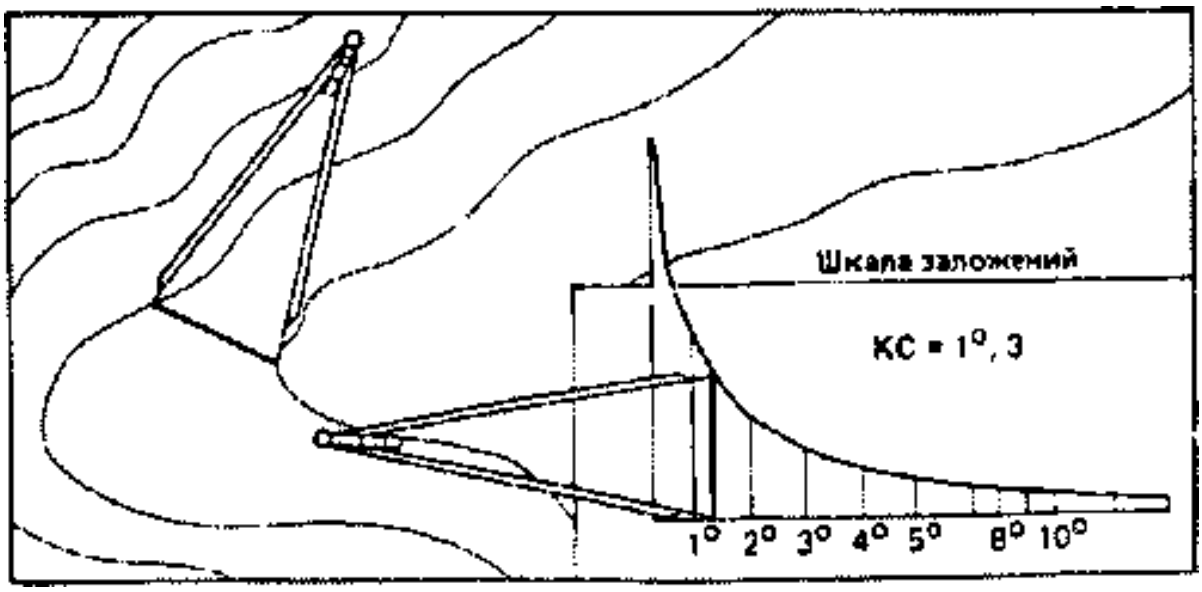


Рисунок 4 - Определение крутизны ската

Как отмечалось ранее рельеф на топографических картах и планах отображается горизонталями. Положение горизонтали определяется интерполированием между характерными точками с известными отметками.

1.2. Построение горизонталей интерполированием

Интерполяция (лат.) - вставка внутрь. Под интерполяцией в математике понимают всякий способ, с помощью которого можно по таблице найти промежуточные результаты, которых нет непосредственно в таблице.

Для реализации способа необходимо наметить линии интерполяции. Линии интерполяции намечают между смежными характерными точками. В совокупности линии интерполяции представляют собой сеть непесекающихся треугольников (триангуляцию). При проведении линий интерполяции по возможности треугольники не должны иметь очень острые углы.

При рисовке горизонталей на планах используют следующие способы интерполяции:

1.***"На глаз" (визуально)***. Для примера рассмотрим построение топографического плана с высотой сечения рельефа – 1м. Соединяем точки А и В

тонкой линией. Между этими точками проходят горизонтали с отметками 122,0; 123,0. Делим линию АВ на 5 равных частей, каждая из которых будет соответствовать – 0,5м.

Отмечаем на линии АВ точки с отметками – 122,0 и 123,0. Аналогично делим все остальные линии. Точки с одинаковыми отметками соединяем плавными линиями (рис. 5).

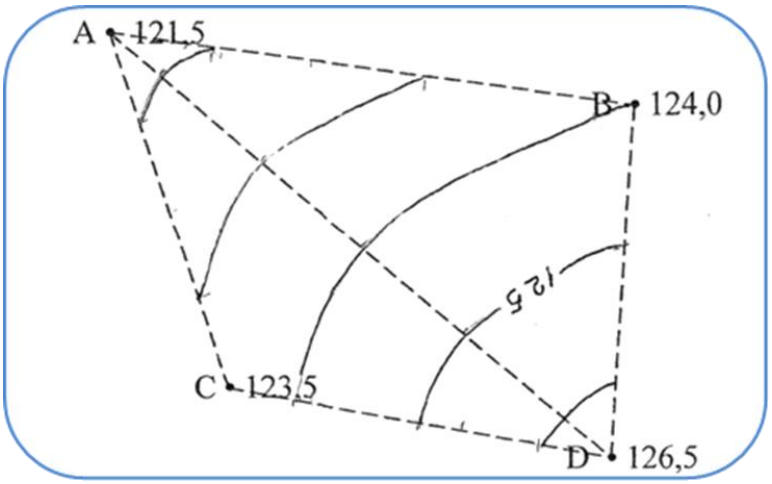


Рисунок 5 - Интерполирование и проведение горизонталей "на глаз"

2. ***Аналитический***, который предусматривает определять расстояние до горизонталей из прямо пропорциональной зависимости между превышением и горизонтальным проложением между точками с подписанными на плане высотами. Из рис.6 видно, что расстояния от точки А до горизонталей с высотами 202 и 203

d1 = h1* (dab/hab), d2 = h2*(dab/hab),

где h1 и h2 - превышения между горизонталями с отметками 202 и 203 и точкой А с отметкой 201.35 (0.65 и 1.65 м);

dab - расстояние, измеряемое на плане между пикетными точками;

hab - превышение между точками А и В (203.30 - 201.35 = 1.95 м).

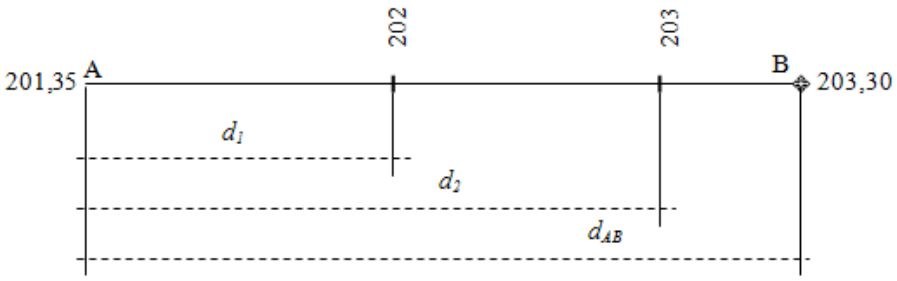


Рисунок 6 - Аналитический способ интерполяции горизонталей

3. ***Графический способ*** предусматривает использование палетки, представляющей собой прозрачный лист бумаги или пластика с нанесенным рядом параллельных линий (горизонталей) через 5...10 мм друг от друга. Подписав на палетке отметки горизонталей, которые необходимо провести, и, поворачивая палетку на плане, совмещают точки с отметками с горизонталями на палетке, продавливают карандашом их на план (рис. 7).

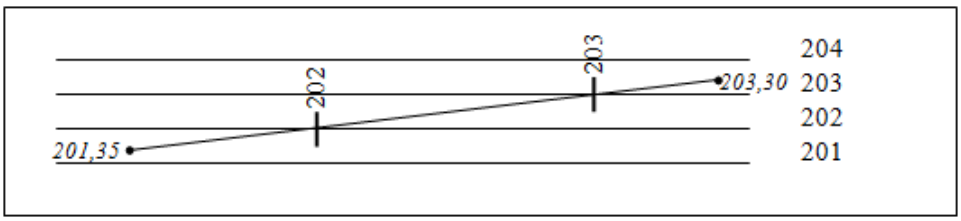


Рисунок 7 - . Графический способ интерполяции горизонталей

При проведении горизонталей необходимо учитывать особенности их проведения.

1. Горизонталь - линия равных высот т.е. все ее точки имеют одинаковую высоту;

2. Горизонталь должна быть непрерывной плавной линией;

3. Горизонтали не могут раздваиваться и пересекаться;

4. Расстояние между горизонталями (заложение) характеризуют крутизну ската. Чем меньше расстояние, тем круче скат;

5. Водораздельные и водосборные линии горизонтали пересекают под прямым углом;

6. В случаях, когда заложение превышает 25мм, проводят дополнительные горизонтали (полугоризонтали) в виде штриховой линии (длина штриха 5-6 мм, расстояние между штрихами 1-2 мм);

7. При окончательном оформлении плана выполняют некоторое сглаживание горизонталей в соответствии с общим характером рельефа, при этом предельная погрешность изображения рельефа горизонталями не должна превышать 1/3 основного сечения (рис. 8).

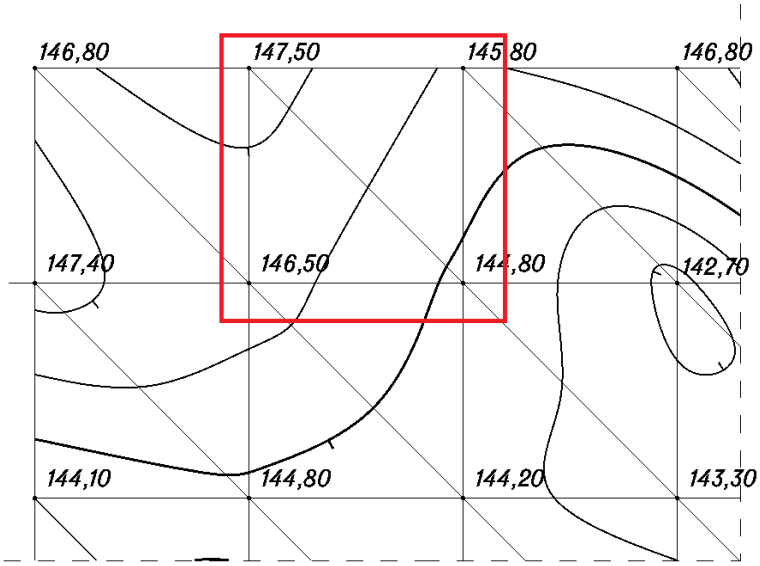
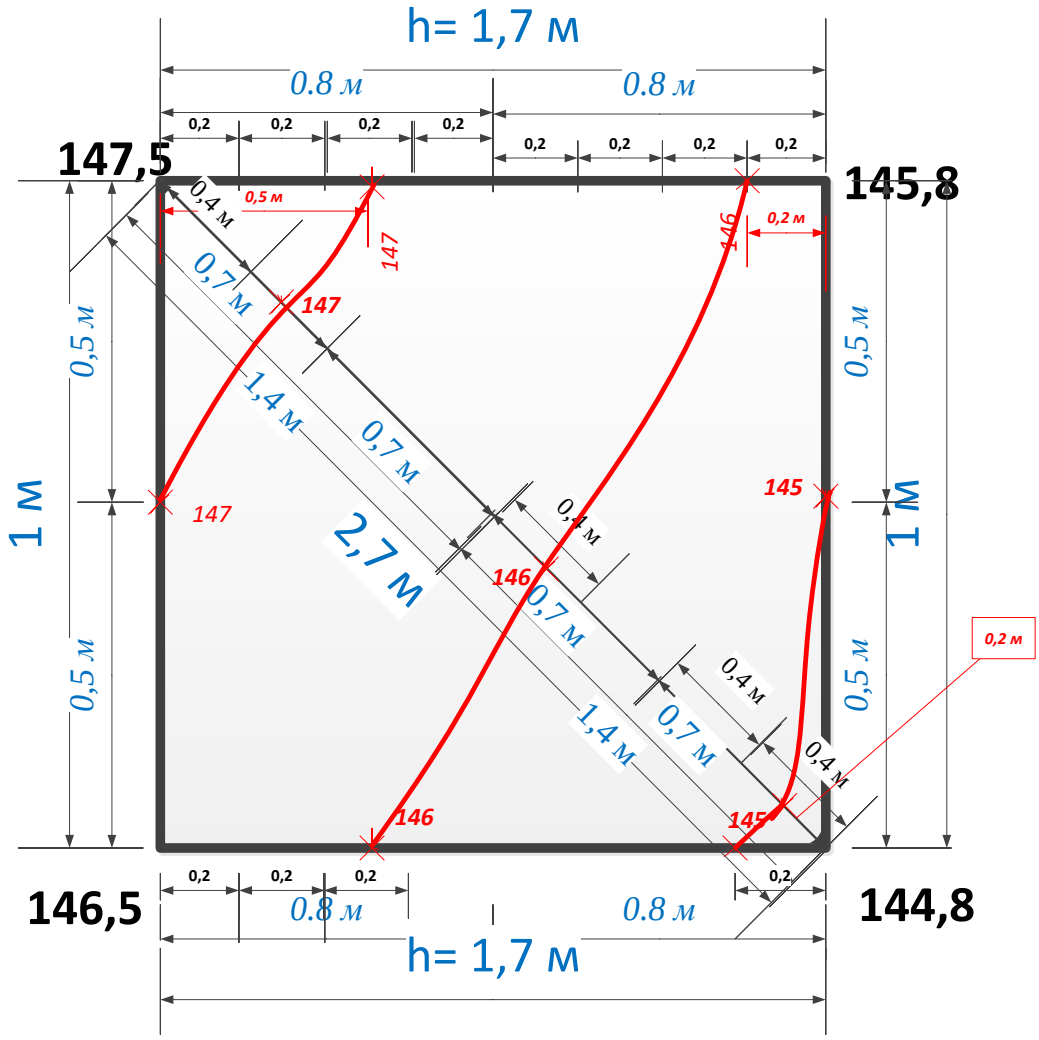


Рисунок 8 – Оформление горизонталей в соответствии с особенностями рельефа

Студентам предлагается провести горизонтали по известным отметкам точек любым из перечисленных способов. Результат работы представлен на рисунке 9. Работа выполняется на специальном бланке.

ПРИМЕР:

Для проведения горизонталей по точкам с известными отметками, расположенным в вершинах квадрата в первую очередь определяют линии интерполирования (стороны квадрата и одна из диагоналей образуют два треугольника).



Расчет положения горизонталей в соответствии с сечением рельефа (в нашем случае сечение рельефа равно одному метру, поэтому отметки горизонталей кратны одному метру -147, 148, 149 и т.д) осуществляется в следующей последовательности:

− выбирают линию интерполирования и определяют превышение вдоль этой линии (по верхней линии h=147.5-145.8=1.7 м);

− приблизительно, «на глаз», делят отрезок пополам и определяют превышение по этому отрезку (1,7:2=0,85≈0,8 значение округляется до четного) и т.д. пока не сформируется отрезок, соответствующий превышению, удобному

для последующих вычислений (в нашем случае это отрезок, соответствующий 0,2 м);

− находят положение целочисленных горизонталей 146 м и 147 м (от отметки 145,8 необходимо подняться на 0,2 метра, отметить один отрезок по направлению отметки 147,5; от отметки 147,5 необходимо опуститься на 0,5 метра, что соответствует 2,5 отрезкам по направлению отметки 145,8);

− аналогично находят положение целочисленных горизонталей по всем линиям интерполирования, после чего соединяют соответствующие точки сплайном.

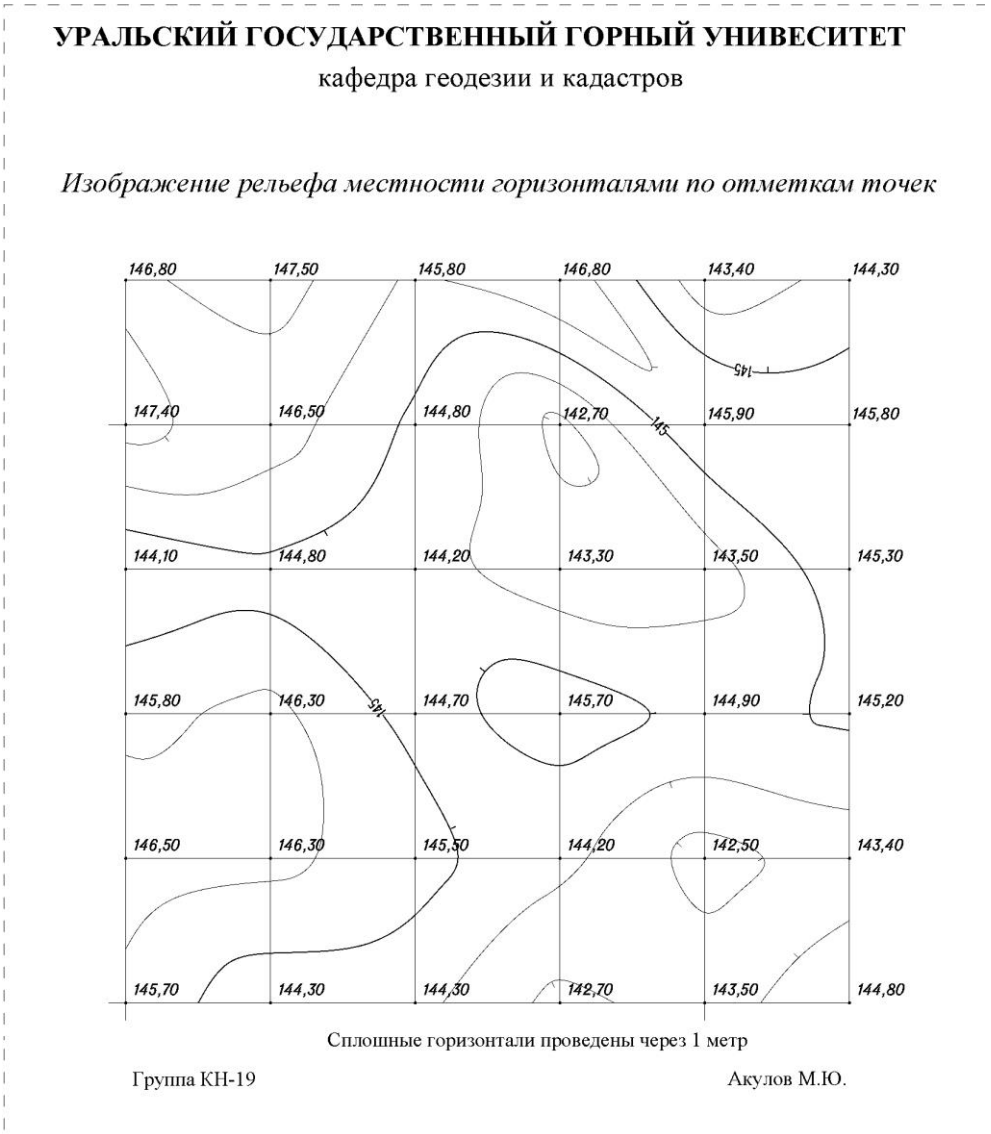


Рисунок 9 – Образец офомленной работы

2. Контрольная работа №2: «Определение номенклатуры топографических карт и планов»

2.1. Разграфка и номенклатура топографических карт и планов

Для обозначения каждого листа топографической карты или плана всего масштабного ряда на территории России (ранее СССР) разработана система учета отдельных листов карт и планов для их хранения, быстрого нахождения и удобства пользования ими. Систему деления карты или плана на отдельные листы называют *разграфкой*, а систему обозначения этих листов – *номенклатурой*.

2.1.1. Разграфка и номенклатура топографических карт

В основу **разграфки и номенклатуры топографических карт** положена карта масштаба 1:1 000 000. Листы этой карты получают путем деления земной поверхности на ряды параллелям через 4º по широте и на колонны меридианами через 6º по долготе (рис. 10).

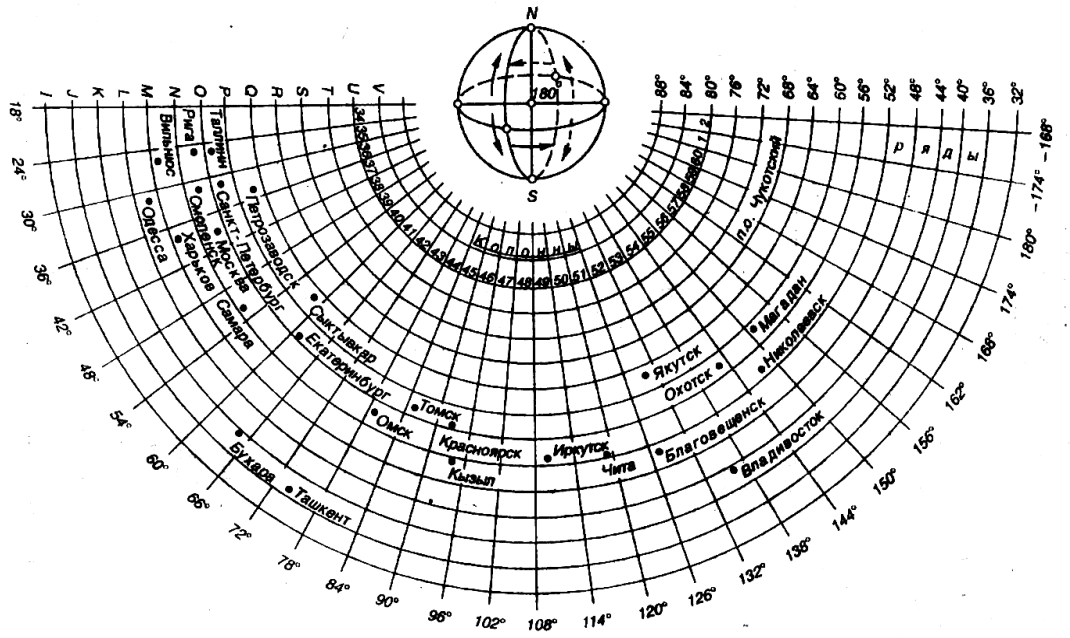


Рисунок 10 - Разграфка и номенклатура карт масштаба 1:1 000 000

Ряды обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (начиная с буквы А от экватора), а колонны – арабскими цифрами с нумерацией с запада на восток, считая первой колонну с западным меридианом 180º от Гринвича. Номенклатура листа карты состоит из буквы ряда и номера колонны. Например, лист карты масштаба 1: 1 000 000 на район г. Екатеринбурга обозначается О-41.

Для получения листов топографических карт масштаба 1:100 000 лист карты масштаба 1:1 000 000 делится на 144 части, которые обозначают арабскими цифрами от 1 до 144 (рис. 11).

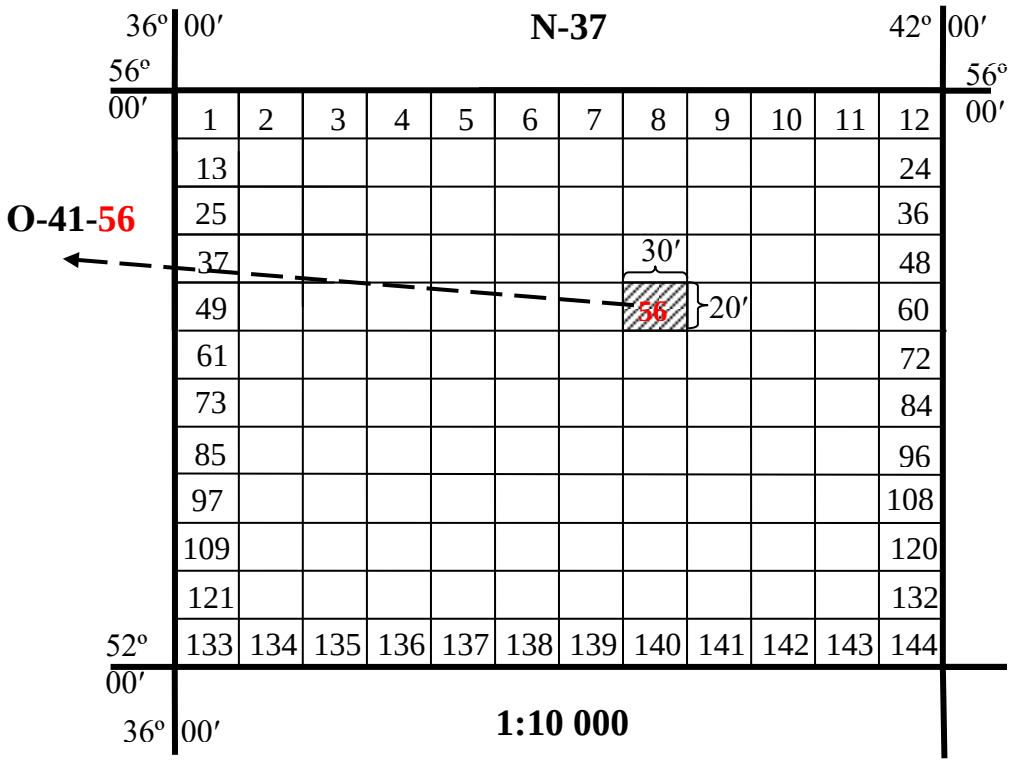


Рисунок 11 - Разграфка и номенклатура листов карты масштаба 1:100 000.

Для получения листов карт масштабов 1:50 000 – 1:10 000 каждый лист карты предыдущего масштаба, начиная с масштаба 1:100 000, делят на четыре части. Номенклатура листа карты состоит из номенклатуры соответствующего листа карты масштаба 1:100 000 с последовательным добавлением одной

из букв (А, Б, В, Г, а, б, в, г) или цифры (1, 2, 3, 4) к номенклатуре листа карты предыдущего масштаба (рис.12).

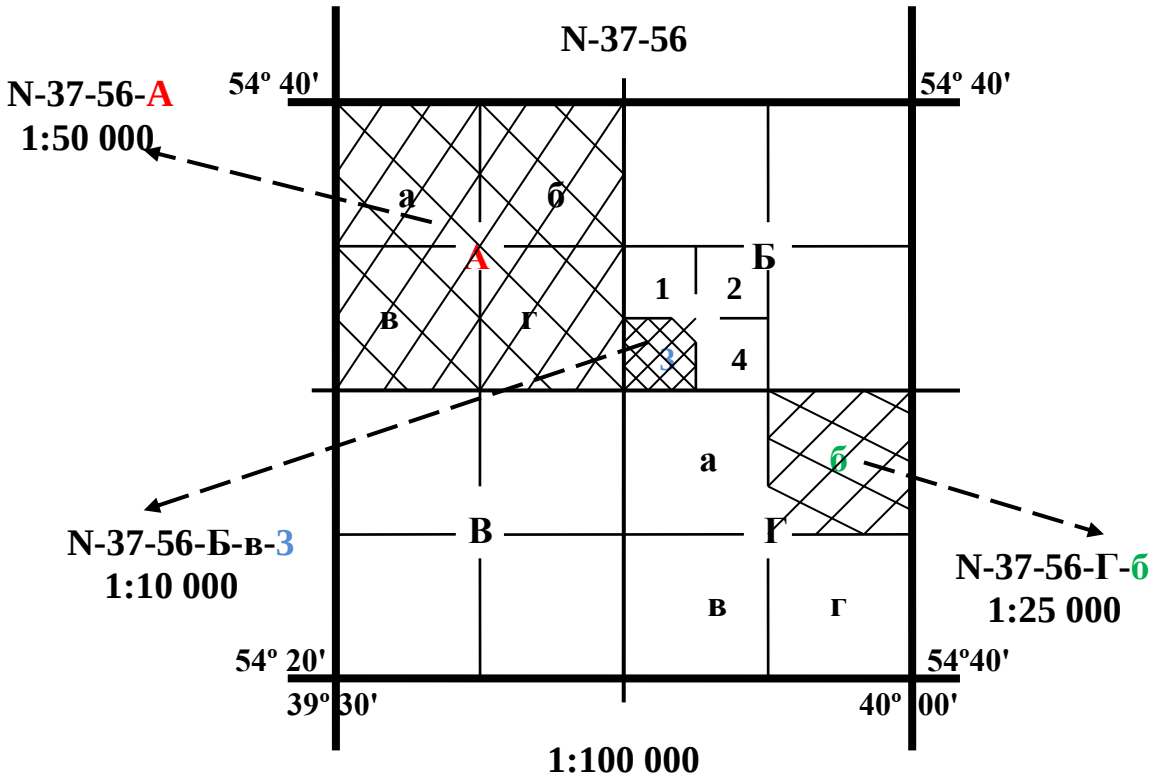


Рисунок 12 - Разграфка и номенклатура листов карт масштабов 1:10 000, 1:25 000, 1:50 000

Размеры масштабного ряда топографических карт и типовые записи номенклатур приведены в табл. 1.

Таблица 1 - **Масштабы и размеры листов топографических карт, типовые записи номенклатур**

Масштаб топографической карты	Размеры листов карт		Примеры записи номенклатур	
	по широте	по долготе	Буквенно-цифровые	Цифровые
1:1 000 000	4^0	6º	N-37	14-37
1:100 000	20′	30'	N-37-21	14-37-021
1:50 000	10′	15'	N-37-21-Г	14-37-021-4
1:25 000	5′	7'30"	N-37-21-Г-в	14-37-021-4-3
1:10 000	2′30"	3'45"	N-37-21-Г-в-1	14-37-021-4-3-1

За основу разграфки топографических карт масштабов 1:5000 и 1:2000, создаваемых на участках площадью свыше 20 км^2, как правило, принимается лист карты масштаба 1:100 000, который делится на 256 частей для получе-

ния листов карты масштаба 1:5000, а каждый лист карты масштаба 1:5000 – на 9 частей для получения листов карты масштаба 1:2000.

Номенклатура листа карты 1:5000 состоит из номенклатуры листа топографической карты 1:100 000 и взятого в скобки номера листа плана (от 1 до 256), например, М-38-112- (124). Номенклатура листа капты 1:2000 состоит из номенклатуры листа карты 1:5000 с добавлением одной из девяти букв русского алфавита (а. б, в, г, д, е, ж, з, и), например, М-38-112- (124-а).

2.1.2. Разграфка и номенклатура топографических планов

Для топографических планов, создаваемых на города и населенные пункты и на участки площадью менее 20 км^2, как правило, а для масштабов 1:1000 и 1:500 всегда применяется прямоугольная разграфка с размерами рамок для масштабов 1:5000 – **40×40 см**, для масштабов 1:2000, 1:1000 и 1:500 – **50×50 см**. В этом случае за основу разграфки принимается лист плана 1: 5000, обозначаемый арабскими цифрами. Если план составляется в местной (региональной) системе координат, то номенклатуру листа масштаба 1:5000 в прямоугольной разграфке составляют номер (число) или буква, которые входят в название местной системы координат, номер зоны, номер пояса и номер колонны. Например, 66-1-200-312 (рис.17), где 66 число из названия МСК-66, 1-первая зона, 200 – номер пояса, 312 – номер колонны.

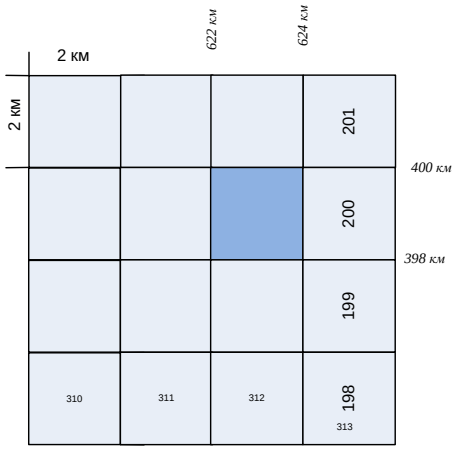


Рисунок 13 – Расчет номенклатуры листа 1:5000 в местной системе координат

Листу масштаба 1:5000 соответствуют 4 листа плана масштаба 1:2000, каждый из которых обозначается одной из первых четырех прописных букв А, Б, В, Г. Номенклатура листа плана масштаба 1:2000 имеет вид, например, 4-Б (рис. 14).

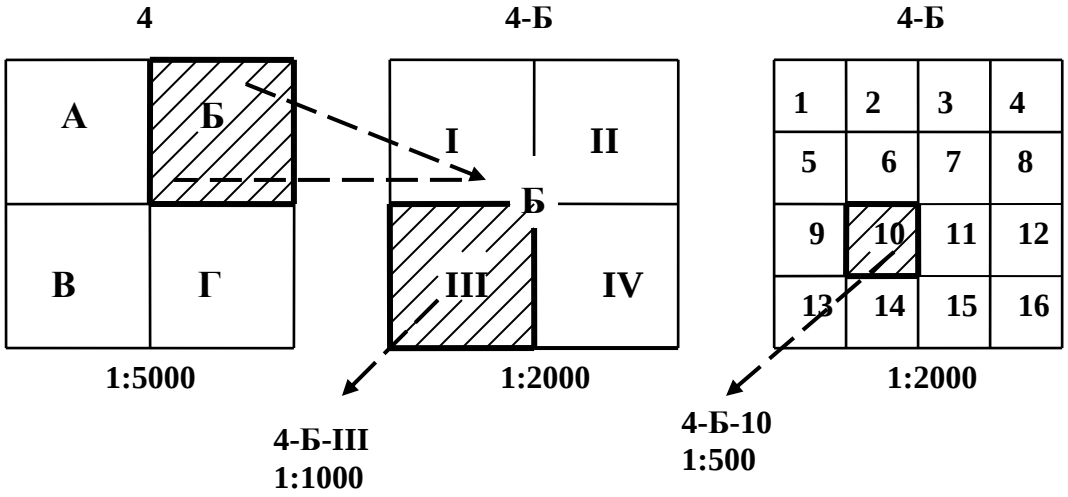


Рисунок 14 - Прямоугольная разграфка для планов масштаба 1:2000, 1:1000 и 1:500

Листу плана масштаба 1:2000 соответствуют 4 листа плана масштаба 1:1000, каждый из которых обозначается римскими цифрами I, II, III, IV, и 16 листов плана масштаба 1: 500, каждый из которых обозначается арабскими цифрами от 1 до 16. Номенклатура листа плана 1:1000 и 1:500 состоит из номенклатуры плана масштаба 1:2000 с присоединением римской цифры для обозначения плана масштаба 1:1000, например, 4-Б-III или арабской цифры для обозначения плана масштаба 1:500, например, 4-Б-10 (рис. 14).

Разграфка и номенклатура топографических карт и планов является строгой и исключает их повторение на всей территории России.

Контрольная работа предусматривает расчет номенклатуры карт в картографической разграфке для масштаба 1:10000 и 1:2000 и расчет номенклатуры плана масштаба 1:500 в прямоугольной разграфке в местной системе

координат с составлением схемы расположения смежных листов. (рис. 15, 16 и 17).

Работа выполняется на специальных бланках.

Пример контрольной работы на заключительном этапе представлен на рисунке 15, 16 и 17.

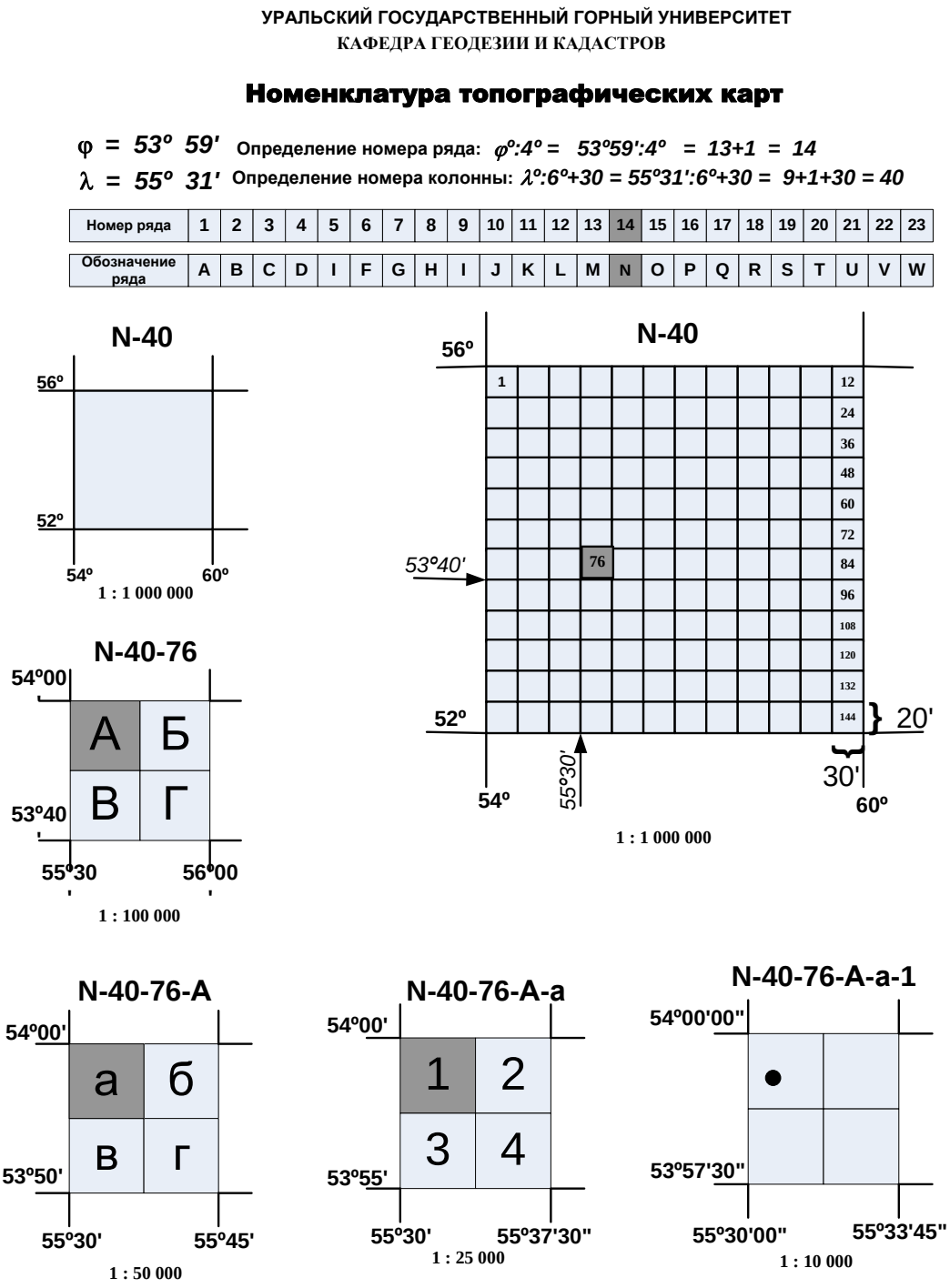


Рисунок 15 – Расчет номенклатуры листа 1:10000

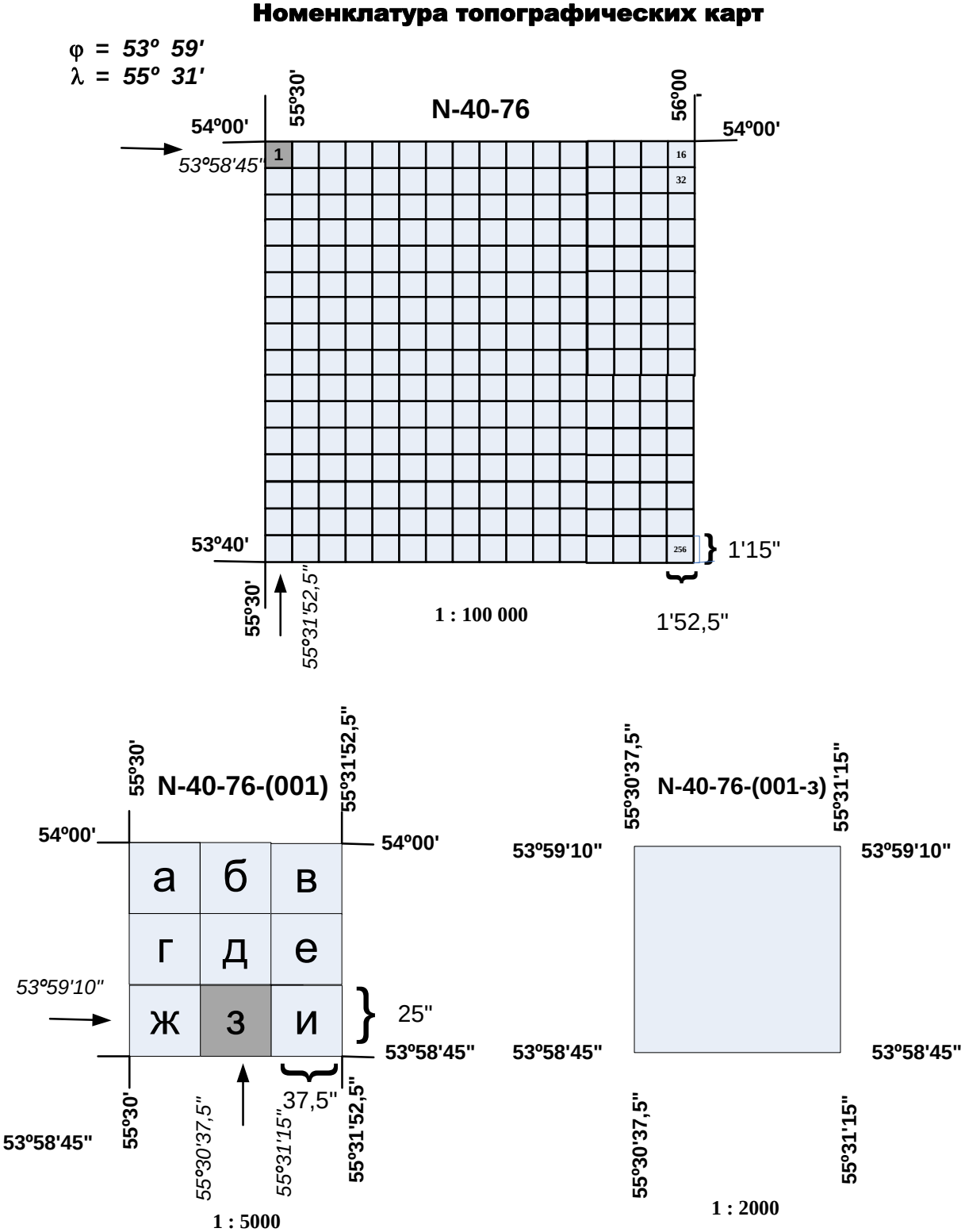


Рисунок 16 – Расчет номенклатуры листа карты 1:2000

Расчет номенклатуры листа топографического плана масштаба 1: 500 (в прямоугольной разграфке), система координат мск66 зона 1

X=399538,75 м

Y=1623830,56 м

1. Анализ координаты Y что точка находится в первой зоне (координата Y записана в формате ($N_{зоны}$ ($E+E_0$)).

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ГЕОДЕЗИИ И КАДАСТРОВ

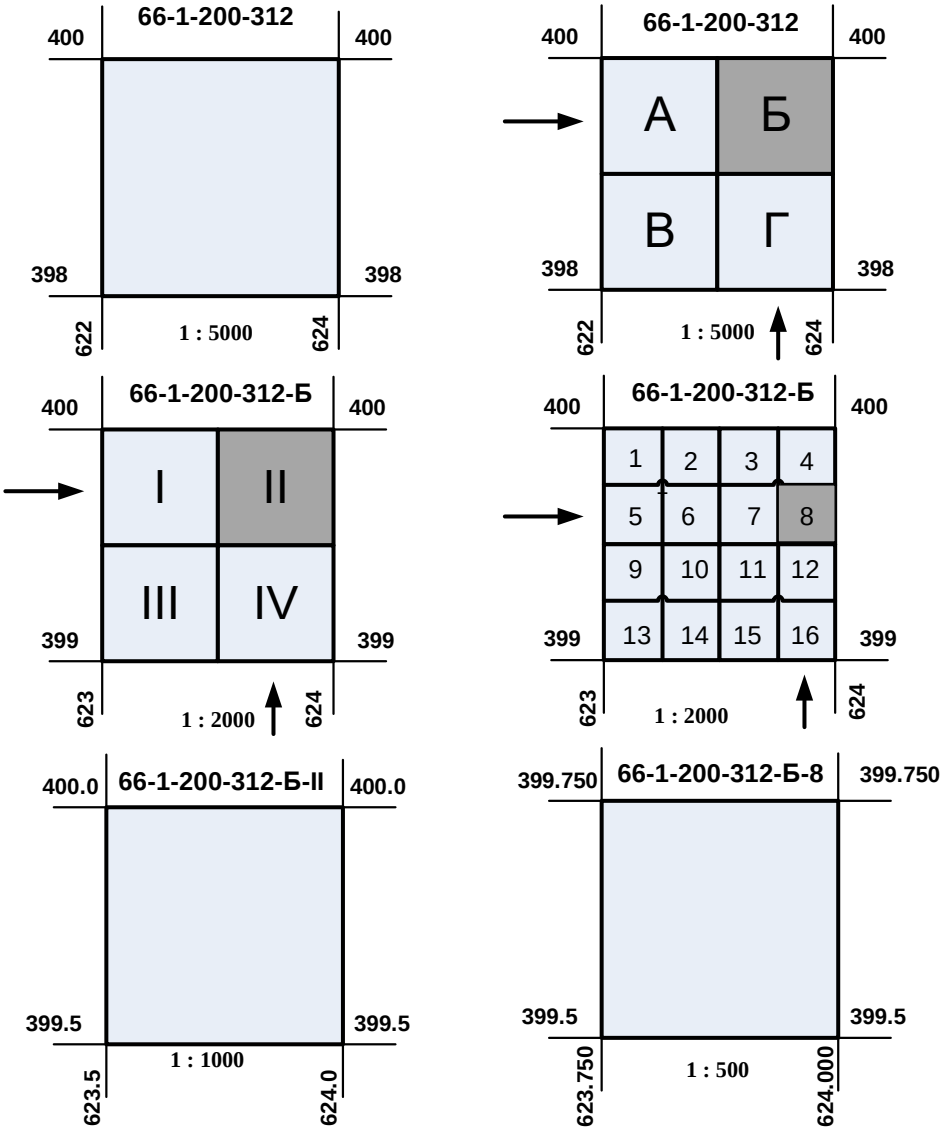
Номенклатура топографических планов в прямоугольной разграфке

X = 399538.75 м
Y = 1623830.56 м

Система координат местная мск-66, 1 зона

Расчет номера ряда: № ряда = 399,538 км : 2 Км = 199+1=**200**

Расчет номера колонны: № колонны = 623,830 км : 2 Км = 311+1=**312**



УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ГЕОДЕЗИИ И КАДАСТРОВ

С Х Е М А
расположения планшетов масштаба 1:500

X = 399538.75 м
Y = 1623830.56 м

Система координат местная мск-66, 1 зона

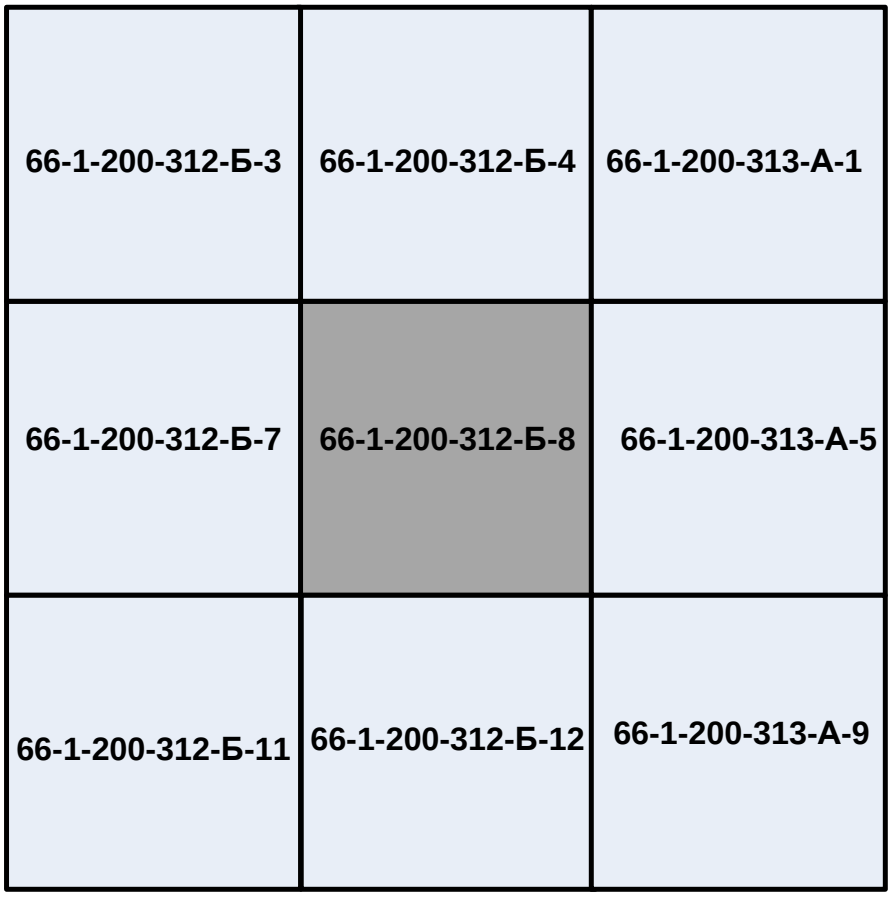


Рисунок 17 – Составление схемы смежных листов

Задание по контрольной работе №2:

Часть 1: выполнить картографическую разграфку и определить номенклатуру карт масштабов 1:1000000, 1:100000, 1:50000, 1:25000, 1:10000, 1:5000, 1:2000 в рабочую область которых попадает точка, заданная геодезическими координатами.

Часть 2: выполнить прямоугольную разграфку и определить номенклатуру планов масштабов 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500 в рабочую область которых попадает точка, заданная координатами в местной региональной системе координат мск-66. Составить схему расположения текущего плана и смежных к нему для масштаба 1:500.

Параметры систем координат	**Геодезическая**	**Прямоугольная**
Имя:	СК-42(ГОСТ 32453-2013)	МСК-66 зона 2 (6 градусная)

N варианта	**Геодезическая система координат**		**Прямоугольная система координат**	
	B	L	X(м)	Y(м)
1	2	3	4	5
1	57°01'48,00"	64°14'42,00"	413756,365	390400,104
2	57°01'33,01"	64°15'45,01"	413264,615	391450,542
3	57°01'31,00"	64°15'46,00"	413202,168	391465,582
4	57°01'30,00"	64°15'42,00"	413172,943	391397,372
5	57°01'29,01"	64°15'37,00"	413144,565	391312,253
6	57°01'28,01"	64°15'41,00"	413111,778	391378,857
7	57°01'28,01"	64°15'47,00"	413109,127	391480,076
8	57°01'23,01"	64°15'49,01"	412953,665	391509,850
9	57°01'22,01"	64°15'48,00"	412923,087	391492,120
10	57°01'22,01"	64°15'31,00"	412930,601	391205,351
11	57°01'20,00"	64°15'34,01"	412867,260	391254,463
12	57°01'38,13"	64°14'51,86"	413446,623	390558,327
13	57°01'18,41"	64°15'36,14"	412817,051	391289,067
14	57°01'17,14"	64°15'29,90"	412780,748	391182,868
15	57°01'15,63"	64°15'29,12"	412734,362	391168,451
16	57°01'14,49"	64°15'26,22"	412700,388	391118,640
17	57°01'14,74"	64°15'21,98"	412709,907	391047,267
18	57°01'19,99"	64°15'20,59"	412872,769	391028,117
19	57°01'18,46"	64°15'17,98"	412826,792	390982,869
20	57°01'17,80"	64°15'02,73"	412813,184	390724,974
21	57°01'13,57"	64°15'03,69"	412681,933	390737,737
22	57°01'10,20"	64°14'45,29"	412585,649	390424,557
23	57°01'38,33"	64°14'49,64"	413453,984	390520,986
24	57°01'14,15"	64°14'36,94"	412711,692	390286,952
25	57°01'20,69"	64°14'39,76"	412912,604	390340,021
26	57°01'21,00"	64°14'33,01"	412925,393	390226,303
27	57°01'28,01"	64°14'35,00"	413141,090	390265,619
28	57°01'31,00"	64°14'36,00"	413233,240	390284,987
29	57°01'36,00"	64°14'20,00"	413394,997	390019,240

30	57°01'42,00"	64°14'07,00"	413586,418	389804,831
31	57°01'48,00"	64°13'43,01"	413782,790	389405,154
32	57°01'50,01"	64°13'19,00"	413855,619	389001,985
33	57°02'01,01"	64°13'23,00"	414194,049	389078,496
34	57°01'26,33"	64°14'44,90"	413084,870	390431,267
35	57°02'14,00"	64°13'27,01"	414594,021	389156,861
36	57°02'11,00"	64°13'56,00"	414488,379	389643,199
37	57°01'55,01"	64°14'27,01"	413979,677	390152,945
38	57°01'52,00"	64°14'59,00"	413872,413	390690,076
39	57°01'48,00"	64°14'42,00"	413756,365	390400,104
40	57°01'13,38"	64°15'22,68"	412667,566	391057,971
41	57°01'11,42"	64°15'24,69"	412605,935	391090,197
42	57°01'12,81"	64°15'28,05"	412647,342	391148,071
43	57°01'12,67"	64°15'31,25"	412641,688	391201,940
44	57°01'12,20"	64°15'33,95"	412626,048	391247,209
45	57°01'22,77"	64°15'24,75"	412957,151	391100,586
46	57°01'10,65"	64°15'33,38"	412578,303	391236,217
47	57°01'09,78"	64°15'38,86"	412549,128	391327,942
48	57°01'06,56"	64°15'37,86"	412449,767	391308,423
49	57°01'03,88"	64°15'24,73"	412372,753	391084,766
50	57°01'02,13"	64°15'12,52"	412324,228	390877,397
51	57°01'08,22"	64°15'21,25"	412508,488	391029,685
52	57°01'09,45"	64°15'19,93"	412547,299	391008,439
53	57°01'10,43"	64°15'20,50"	412577,204	391018,729
54	57°01'10,79"	64°15'19,56"	412588,659	391003,280
55	57°01'10,73"	64°15'15,06"	412588,956	390927,240
56	57°01'33,98"	64°15'29,08"	413301,813	391182,635
57	57°01'13,77"	64°15'16,35"	412682,249	390951,486
58	57°01'14,66"	64°15'21,62"	412707,529	391041,161
59	57°01'14,45"	64°15'25,50"	412699,442	391106,326
60	57°01'13,38"	64°15'22,68"	412667,566	391057,971
61	57°01'36,75"	64°14'53,35"	413403,468	390582,217
62	57°01'33,75"	64°15'08,84"	413303,581	390841,038
63	57°01'35,55"	64°15'14,32"	413356,788	390934,929
64	57°01'33,93"	64°15'28,90"	413300,190	391179,588
65	57°01'22,88"	64°15'24,67"	412960,590	391099,275
66	57°01'26,52"	64°14'45,12"	413090,710	390435,117
67	57°01'35,60"	64°15'14,39"	413358,458	390936,121
68	57°01'38,10"	64°14'49,83"	413446,661	390524,033
69	57°01'37,95"	64°14'51,99"	413441,031	390560,272
70	57°01'36,75"	64°14'53,35"	413403,468	390582,217
71	57°01'38,31"	64°15'24,95"	413437,436	391116,440
72	57°01'41,00"	64°15'40,00"	413514,035	391372,467

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. Проректора по учебно-методическому комплексу _____В.В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практико-ориентированных заданий
(часть 1)
Б1.0.21 ГЕОДЕЗИЯ

Направление подготовки:
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль):
«Кадастр недвижимости»

форма обучения: очная, заочная

Автор: Акулова Е.А.

Одобрена на заседании кафедры
Геодезии и кадастров
(название кафедры)
Зав.кафедрой _____
(подпись)
Акулова Е.А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 9.09.2024
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета
Горно-технологического
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)

Екатеринбург

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ……. 4

1.1. Особенности геодезических вычислений. Приближенные числа. Правила округления……..... 4

1.2. Вычисления с помощью радианной и градусной меры угла……. 7

1.3. Выполнение заданий лабораторной работы №1……. 9

2. ОСНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ…… 18

2.1. Лабораторная работа №2. Угловые измерения…….. 18

2.2. Лабораторная работа №3. Линейные измерения…… 33

2.2.1. Светодальномер СТ5 «Блеск»…….. 33

2.2.2. Нитяный дальномер……. 37

2.3. Лабораторная работа №4. Нивелирование……..... 39

2.3.1. Геометрическое нивелирование…….. 39

2.3.2. Последовательность выполнения лабораторной работы…… 46

1. ОСНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1.1. Особенности геодезических вычислений. Приближенные числа. Правила округления

Решение основных задач геодезии связано с производством измерений и обработкой результатов этих измерений. В зависимости от объема и условий проведения вычислительных работ (полевые или камеральные) выбирают наиболее целесообразные средства и способы, которые требуют наименьших затрат при обеспечении заданной точности.

Для вычислительной обработки результатов измерений используют различные средства: таблицы, инженерные калькуляторы, персональные ЭВМ (ПЭВМ). Необходимо также научиться быстро и правильно выполнять устные вычисления.

При проведении геодезических вычислений необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. Устным счетом следует пользоваться в случае простых вычислений с небольшим количеством цифр, а также при приближенном контроле вычислений.

2. Для решения задач с большим количеством цифр необходимо использовать вычислительные средства, позволяющие выполнять арифметические действия с минимальной затратой времени и, по возможности, без промежуточных результатов. К таким вычислительным средствам относят калькуляторы и ПЭВМ. Вводимые и выводимые данные при этом должны соответствовать точности исходных величин и округляться согласно принятым правилам.

3. Для записей результатов измерений необходимо пользоваться специальными схемами, бланками и ведомостями, определяющими последовательность вычислений и обеспечивающих промежуточный и общий контроль.

4. В процессе вычислений цифры следует писать четко и аккуратно. Все записи необходимо вести так, чтобы в них мог разобраться любой исполнитель.

5. При записях столбцов чисел цифры одинаковых разрядов следует располагать одну под другой. При этом дробную часть отделяют запятой, например 123,369, а многоразрядные числа интервалами, например 11 235 125,12.

6. Записи вычислений производятся чернилами, ошибочные результаты перечеркиваются и сверху записывается правильное значение.

7. Все вычисления выполняются с контролем.

8. При вычислениях нельзя пользоваться черновиками.

Необходимо знать, что процесс измерений сопровождается погрешностями, и результаты измерений всегда являются приближенными числами. Чаще всего результаты выражаются десятичными дробями. Все цифры десятичной дроби, расположенные справа от запятой, называют десятичными знаками.

В числовых значениях результатов измерений обычно записывают такое количество значащих цифр, которое позволяет получить отсчетное устройство соответствующего средства измерения.

Значащие (верные) цифры – это все цифры от первой справа, не равной нулю, до последней записанной цифры слева. При этом нули справа не считаются значащими цифрами, когда они заменяют неизвестные нам цифры или подставлены вместо других цифр при округлении данного числа.

Пример.

Число 12,0 имеет три значащие цифры.

Число 40 имеет две значащие цифры.

Число $120 * 10^3$ имеет три значащие цифры.

Число $0,514 * 10^4$ имеет три значащих цифры.

Число 0,0056 равно $56*10^{-4}$ и имеет две значащих цифры.

Чтобы не оперировать с лишними цифрами, затрудняющими вычисления и не характеризующими требуемую точность, отдельные числовые значения следует округлять. Правила округления одинаковы для целых и дробных чисел. Округление числа представляет собой отбрасывание цифр справа до определенного разряда с возможным изменением цифры этого разряда.

При геодезических вычислениях применяют следующие правила округления:

1. *Если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не меняется.*

Пример.

Округление числа 12,23 до первого десятичного знака даст результат 12, 2.

Округление числа 0,024999 до второго десятичного знака даст результат 0,02.

Округление числа 12 456 до двух значащих цифр даст результат $12*10^3$.

2. *Если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) больше 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу.*

Пример.

Округление числа 24,6 до целых единиц даст результат 25.

Округление числа 0,2361 до второго десятичного знака даст результат 0,24.

Округление числа 0,00375 до одной значащей цифры даст результат $0{,}4*10^{-2}$.

3. *Когда отбрасываемая часть числа ровно 5, то последнюю отбрасываемую цифру увеличивают на единицу, если она нечетная, и сохраняют без изменения, если она четная (т.е. цифра разряда, до которой округляют число, всегда должна быть четной).*

Пример.

Округление числа 4,55 до первого десятичного знака даст результат 4,6.

Округление числа 122,5 до целых единиц даст результат 122.

Округление числа 0,0695 до третьего десятичного знака даст результат 0,070.

Следуя этим правилам, студентам предлагается выполнить задание 1 практической работы (см. образец бланка).

1.2. Вычисления с помощью радианной и градусной меры угла

Для решения ряда геодезических задач необходимо знать соотношение между градусной и радианной мерой любого центрального угла. Эта зависимость может быть выражена соотношением:

$$\rho = \frac{\alpha^{\circ}}{\alpha(\text{рад.})} = \text{const}, \qquad (1)$$

где α° - значение угла в градусной мере;

$\alpha(\text{рад.})$ - значение угла в радианной мере.

Исходя из того, что окружность в градусной мере соответствует центральному углу, равному 360°, а в радианной - 2π радиан, можно получить приближенные значения числа ρ:

$$\rho^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{6{,}28318} = 57{,}2958^\circ;$$

$$\rho' = \frac{360^\circ \cdot 60'}{2\pi} = 3438'; \qquad \rho'' = \frac{360^\circ \cdot 60' \cdot 60''}{2\pi} = 206265''.$$

Исходя из соотношения (1) переход от градусной к радианной мере угла осуществляется по формуле:

$$\alpha(\text{рад.}) = \frac{\alpha^\circ}{\rho^\circ} = \frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{\alpha''}{\rho''}\ . \qquad (2)$$

Такое представление необходимо осуществлять например, в том случае, когда необходимо воспользоваться программами для производства вычислений, которые в качестве аргументов тригонометрических функций подразумевают значение угла в радианной мере. К таким программным продуктам относятся Microsoft Excel, MathCad и др. Другой случай, когда при решении геодезических задач результат необходимо знать приближенно (с 2-3 значащими цифрами).

Пример.

1. Необходимо представить в радианной мере угол $\varphi = 2^\circ 11' 10''$, вычислить приближенное значение $\sin(\varphi)$, результат округлить до трех значащих цифр.

Для решения задачи необходимо в первую очередь выразить значение угла в долях градусов, для этого используются пропорциональные

зависимости, учитывающие, что $1^\circ = 60', 1' = 60''$, преобразование выполняют в следующей последовательности:

а) переводим секунды в доли минут:

в 1 ' - 60";

в x ' - 10"

отсюда $x' = \frac{1' \cdot 10''}{60''} = 0{,}166667'$, учитывая целое количество минут, получаем - $\varphi = 2^\circ 11{,}16667'$;

б) переводим минуты в доли градусов:

в 1º- 60';

в yº- 11,166667';

$y^\circ = \frac{1^\circ \cdot 11{,}166667'}{60'} = 0{,}186111^\circ$, учитывая целые градусы, получаем результат: $\varphi = 2{,}186111^\circ$.

При работе с микрокалькулятором подобный переход осуществляется нажатием соответствующей клавиши или последовательности клавиш, которая описана в инструкции к вычислительному средству.

Для перехода в радианную меру воспользуемся соотношением (2):

$$\phi(рад.) = \frac{\phi^\circ}{57{,}2958^\circ} = \frac{2{,}186111^\circ}{57{,}2958^\circ} = 0{,}038155(рад.)$$

Для вычисления значения $\sin(\varphi)$ следует воспользоваться приближенными формулами вычисления синусов и тангенсов малых углов:

$$sin(\phi) \approx tg(\phi) \approx \phi(рад.) \approx 0{,}038155 \approx 0{,}0382$$

1.3. Выполнение заданий лабораторной работы №1

Используя вышесказанное, студенту предлагается выполнить соответствующие операции с приближенными числами, полученные результаты занести в бланк для лабораторной работы №1.

Задание 1.

а) Округлить числа N1 до n знаков после запятой;

б) Округлить числа N до n1 значащих цифр.

Таблица 1

№	n	N1	результаты округления	n1	N	результаты округления
1	1	1.633	1,6	4	50.231	50,23
2	2	25.0569	25,06	3	62 051	$6{,}21\cdot10^4$

Для выполнения данного задания необходимо воспользоваться правилами, описанными в п. 1.1.

Задание 2.

Выполнить с помощью калькулятора следующие арифметические действия:

а) Перевести угол, полученный в формате «градусы-минуты-секунды» в доли градусов;

б) Перевести угол, полученный в долях градуса в формат « градусы-минуты-секунды».

Таблица 2

o ' "	o	o	o ' "
265 56 08	265,935556	359.265987	359 15 58

Для представления угла в долях градусов необходимо воспользоваться последовательностью действий, описанных в примере к п. 1.2.

$$\varphi = 265^\circ 56' 08'',$$

а) переводим секунды в доли минут: $x' = \frac{1' \cdot 08''}{60''} = 0{,}133333'$, к полученному значению прибавляем целое количество минут и получаем результат: $56{,}133333'$;

б) переводим минуты в доли градусов: $y^\circ = \frac{1^\circ \cdot 56{,}133333'}{60'} = 0{,}935556^\circ$, прибавляем целое количество градусов и получаем окончательный результат, который записываем в бланк: $\varphi = 265{,}935556^\circ$.

Для выделения целого количества минут и секунд из значения угла, представленного в долях градусов, задача решается в обратной последовательности.

$\varphi = 359{,}265987^\circ$,

а) отбрасываем целое количество градусов и определяем какое количество целых минут содержится в $0{,}265987^o$, составляем пропорциональную зависимость:

в 1^o- 60';

в $0{,}265987^o$- y';

отсюда $y' = \frac{0{,}265987^\circ \cdot 60'}{1^\circ} = 15{,}95922'$, выделяем целую часть и получаем результат - $15'$;

б) для выделения целого количества секунд необходимо отбросить целую часть значения $15{,}95922'$ и решить пропорцию:

в 1'- 60";

в 0,95922'- x";

$\tilde{o}'' = \frac{0{,}95922' \cdot 60''}{1'} = 57{,}5532''$, округлив результат до целого значения, получаем количество секунд, равное 58";

окончательный результат: $\varphi = 359{,}265987^\circ = 359^\circ 15' 58''$,

в) вычислить значения тригонометрических функций:

Таблица 3

действия	результаты
sin 300°58′23″	-0,857409412
arctg 5.00014587	78° 41′ 25″

Для вычисления значения синуса заданного угла необходимо представить значение угла в долях градусов, а именно, $300°58'23'' = 300{,}9730556°$, для этого необходимо воспользоваться вышеизложенным алгоритмом преобразования. Подставив преобразованное значение в тригонометрическую функцию, получим значение: $\sin 300°58'23'' = -0{,}857409412$.

Для вычисления значения arctg 5.00014587 на калькуляторе воспользуемся клавишей [$\tan^{-1}$], при этом на калькуляторе должен быть установлен режим вычисления градусов (клавиша [DEG]).

В результате выполнения операций получим:

arctg 5.00014587 = 78,69038897°. В полученном результате необходимо выделить значения градусов, минут и секунд: 78,69038897° = 78° 41′ 25″.

Задание 3.

Определить значение горизонтального угла β_{CP}.

Область определения горизонтального угла $0^\circ \le \beta \le 360^\circ$.

Горизонтальный угол определяется при двух положениях вертикального круга (положение «круг лево» - КЛ (первый полуприем) и положение «круг право» - КП (второй полуприем)) теодолитом (рис. 1). Значение угла находится как разность отсчетов на направления, определяющие угол:

$$\beta = П - З, \qquad (3)$$

где П – отсчет на переднюю точку;

З - отсчет на заднюю точку.

В нашем случае определяется значение «левого» по ходу лежащего угла $\beta_{СР}$ как среднее значение угла, вычисленного из двух полуприемов.

$$\beta_{ср} = \frac{\beta_{КЛ}+\beta_{КП}}{2}. \qquad (4)$$

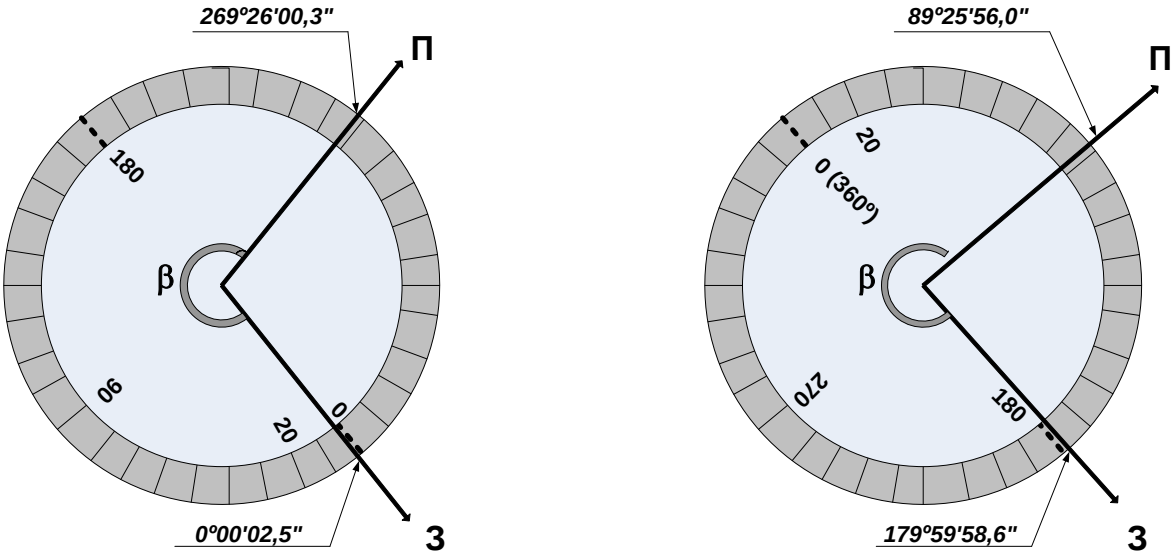


Рис. 1. Измерение горизонтального угла при двух положениях вертикального круга

$$\beta_{КЛ} = 269^\circ 26'00,3'' - 0^\circ 00'02,5'' = 269^\circ 25'57,8''$$

$$\beta_{КП} = 89^\circ 25'56,0'' - 179^\circ 59'58,6'' = -90^\circ 34'02,6'' + 360^\circ = 269^\circ 25'57,4''$$

$$\beta_{ср} = \frac{269^\circ 25' 57,8'' + 269^\circ 25' 57,4'}{2} = 269^\circ 25' 57,6''$$

Вычисления записывают в таблицу 4.

Таблица 4

Вычисление горизонтального угла

Положение круга	Точки визирования	Горизонтальный отсчет	Горизонтальный угол в полуприеме	$\beta_{ср.}$
КЛ	З	0° 00′ 02.5"	269°25′57,8″	269°25′57,6″
	П	269° 26′ 00.3"		
КП	З	179° 59′ 58.6"	269°25′57,4″	
	П	89° 25′ 56.0"		

Задание 4.

Вычисление средней квадратической ошибки измерения.

1. Определить величину средней квадратической ошибки измерения, если при компарировании мерного прибора на 120 метровом компараторе выполнено 6 измерений (см. табл.5), эталонная длина полевого компаратора $S_{эт.}$= 120,131 м.

Таблица 5

Результаты измерений полевого компаратора

№ измерения	Результат измерения	Δ (мм)	Δ^2
1	2	3	4
1	120,137	+6	36
2	120,126	-9	81
3	120,118	-13	169
4	120,141	+10	100
5	120,144	+13	169
6	120.119	-12	144
			Σ = 699

Для вычисления величины средней квадратической ошибки измерения необходимо воспользоваться формулой Гаусса:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad (5)$$

где $m-$ средняя квадратическая ошибка измерения;

$\left[\Delta^2\right]$ - сумма квадратов абсолютных ошибок;

$n-$количество измерений.

Вычисления производят в следующей последовательности:

а) Вычисляют значения абсолютных ошибок по формуле:

$$\Delta_i = l_i - X\ , \qquad (6)$$

где Δ_i - абсолютная ошибка i – ого измерения;

l_i - результат i – ого измерения;

X – истинное значение измеряемой величины (в нашем случае за истинное значение принимается длина полевого компаратора X=120,131 м).

Вычисления удобнее производить в миллиметрах, например, для первого измерения : $\Delta_1 = 120{,}137 - 120{,}131 = +0{,}006м = +6мм$;

б) результат записывают в таблицу 5 в столбец 3.

в) в столбце 4 находят: $\Delta_1{}^2 = 36мм$;

д) Сумму квадратов абсолютных ошибок записывают в последней строке таблицы 2.

$$\left[\Delta^2\right] = \sum_1^n \Delta_i^2 = 36 + 81 + 169 + 100 + 169 + 144 = 699;$$

г) Подставив вычисленное значение суммы в формулу 5, получают значение средней квадратической ошибки:

$$m = \pm\sqrt{\frac{699}{6}} = \pm\sqrt{116{,}9} = \pm 10{,}8мм \approx \pm 0{,}011мм$$

За результат измерения полевого компаратора принимается среднее арифметическое из выполненных измерений

$$S = S_{ср} = \frac{\sum_{1}^{6} S_i}{6} = 120{,}131 м$$

Результат: $S = 120{,}131 \pm 0{,}011 м$

2. Определить относительную ошибку одного измерения и наиболее надежного значения длины линии.

В данном примере выполнено 10 измерений одной и той же стороны геодезического построения, истинное значение измеряемой величины неизвестно.

Таблица 6

Результаты измерений длины линии

№	Результаты измерений S_i, (м)	V (мм)	V^2
1	2	3	4
1.	95,947	-2,7	7,29
2.	945	-4,7	22,09
3.	953	+3,3	10,89
4.	950	+0,3	0,09
5.	944	-5,7	32,49
6.	956	+6,3	39,69
7.	952	+2,3	5,29
8.	950	+0,3	0,09
9.	951	+1,3	1,69
10.	949	-0,7	0,49
	Scp=95,9497 м	Σ = 0	Σ = 120,1

Все измерения выполнены при одинаковых условиях. В этом случае наилучшим приближением к истинному значению является среднее арифметическое: $S_{\text{ср}} = \frac{[S_i]}{n}$.

Для значений, приведенных в примере:

$$S\text{ср} = \frac{[S_i]}{n} = \frac{95.947 + 95.945 + ... + 95.949}{10} = 95{,}9497\,\text{м}.$$

Для вычисления величины средней квадратической ошибки одного измерения воспользуемся формулой Бесселя:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \qquad (7)$$

где $m-$ средняя квадратическая ошибка измерения;

$[v^2]$ - сумма квадратов отклонений;

$n-$количество измерений.

Значения v - отклонения от среднего, вычисляют по формуле:

$$v_i = S_i - S_{\tilde{n}\eth}. \qquad (8)$$

Например, для первого измерения:

$v_1 = S_1 - S_{ср} = 95.947 - 95.9497 = -0.0027м = -2{,}7мм$;

для второго:

$$v_2 = S_2 - S_{ср} = 95.945 - 95.9497 = -0.0047м = -4{,}7мм$$

Вычисленные значения записывают в столбец 3 таблицы 6. Для контроля вычисляют сумму отклонений, она должна быть равна нулю.

В столбце 4 вычисляют квадраты отклонений и находят их сумму.

Далее вычисляем значение средней квадратической ошибки величины $S_{\text{СР.}}$:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{120{,}1}{10-1}} = \sqrt{13{,}3} = \pm 3{,}6мм = \pm 0{,}004м$$

Среднюю квадратическую ошибку одного измерения вычисляют по формуле

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{3.6}{\sqrt{10}} = \pm 1.1мм = \pm 0{,}001м$$

Относительную ошибку измерения вычисляют по формуле:

$$f_{\text{отн}} = \frac{m}{S_{\text{ср}}} = \frac{1}{\text{Scp} : m} = \frac{1}{95.9497 : 0.0036} = \frac{1}{26653}.$$

По окончании вычислений работу подписывают и сдают на проверку преподавателю.

2. ОСНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Лабораторная работа №2. Угловые измерения

В данном разделе угловые измерения рассматриваются на примере технологии измерения горизонтальных и вертикальных углов с помощью теодолита 2Т30.

Лабораторная работа выполняется в следующей последовательности:

– изучение устройства теодолита и назначения его основных частей;

– знакомство с поверками теодолита и их выполнение ;

– измерение горизонтальных и вертикальных углов.

Перед началом измерений необходимо изучить ***устройство теодолита и назначение его основных частей.***

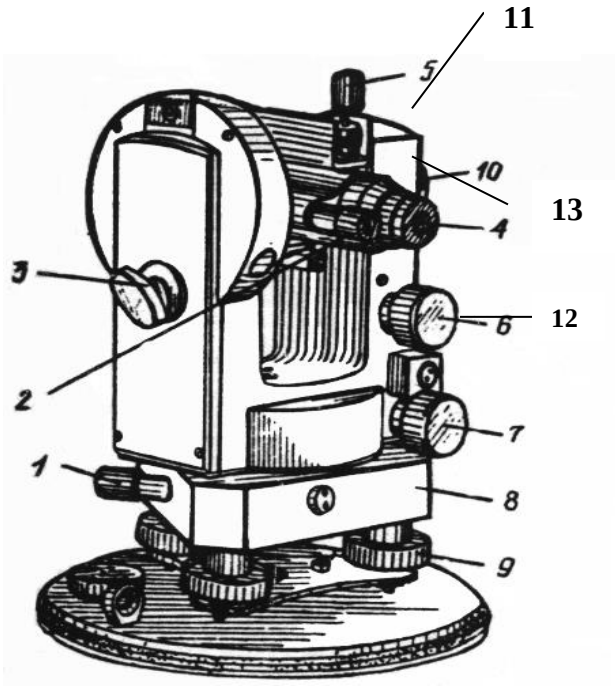
Теодолит 2Т30 это малогабаритный технический оптический теодолит повторительного типа (рис. 2). Подставка теодолита (8) несъемная, а три

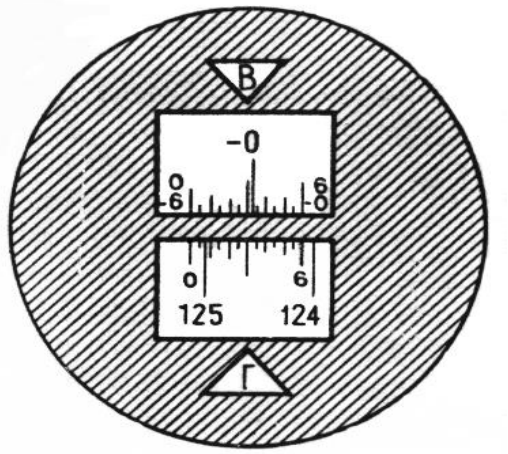
подъемных винта теодолита (9) шарнирно соединены с дном футляра, который служит основанием теодолита. Рядом с окуляром зрительной трубы (4) расположен окуляр шкалового микроскопа (2). В поле зрения шкалового микроскопа с помощью оптической системы передается одновременно изображение делений горизонтального и вертикального кругов (правая часть рис. 2).

Применение секторной оцифровки в вертикальном круге теодолита позволяет без дополнительных вычислений отсчитывать по шкале величину измеряемого угла наклона (верхняя часть поля зрения шкалового микроскопа). Угол наклона при круге лево положительный, если наблюдаемая цель расположена выше уровня горизонта, и отрицательный, если цель расположена ниже уровня горизонта.

В теодолите 2Т30 за основное положение принят вертикальный круг слева от наблюдателя (КЛ).

Точность взятия отсчета по шкалам микроскопа равна 1 минуте.





Поле зрения отсчётного шкалового микроскопа теодолита 2Т30:
отсчёт по горизонтальному кругу 125º06'

Рис. 2. Теодолит 2Т30:

1 – наводящий винт лимба горизонтального круга; *2* – окуляр шкалового микроскопа; *3* – иллюминатор; *4* – окуляр зрительной трубы; *5* – закрепительный винт зрительной трубы; *6* – наводящий винт зрительной трубы; *7* – наводящий винт алидады горизонтального круга; *8* – подставка; *9* – подъёмный винт; *10* – кремальера; *11* – колпачок, предохраняющий исправительные винты сетки нитей; *12* – цилиндрический уровень; *13*- фокусирующий винт сетки нитей.

Поверки и юстировки теодолитов производят для выявления и устранения ошибок, вызванных отступлением от геометрических и оптико-механических требований, заложенных в конструкцию прибора.

Поверки теодолитов производят в следующем порядке:

1. *Ход подъемных винтов должен быть плавным без люфта и заеданий.*

Регулируют ход винта, вращая при помощи шпильки регулировочную гайку в ту или иную сторону, до тех пор, пока не будет достигнут равномерный ход винта.

2. *Ось цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга должна быть перпендикулярна к вертикальной оси вращения прибора.*

Для проверки необходимо установить уровень параллельно двум подъемным винтам подставки и, вращая их в противоположных направлениях, привести пузырек уровня на середину. После этого повернуть алидаду горизонтального круга на 180° вокруг вертикальной оси. Если пузырек цилиндрического уровня отклонится от середины, то половину отклонения следует устранить юстировочными винтами уровня, а затем повторить поверку.

Поверку и юстировку следует выполнять до тех пор, пока после поворота алидады на 180° пузырек уровня будет отклоняться не более чем на 0,5 делений уровня.

Результаты выполнения поверки фиксируются в виде соответствующей записи в журнале измерений. Если поверка не выполняется, то действия по юстировке прибора производятся преподавателем или под его руководством.

3. *Правильность установки сетки нитей трубы проверяют после приведения оси вращения теодолита в отвесное положение с помощью отъюстированного уровня при алидаде.*

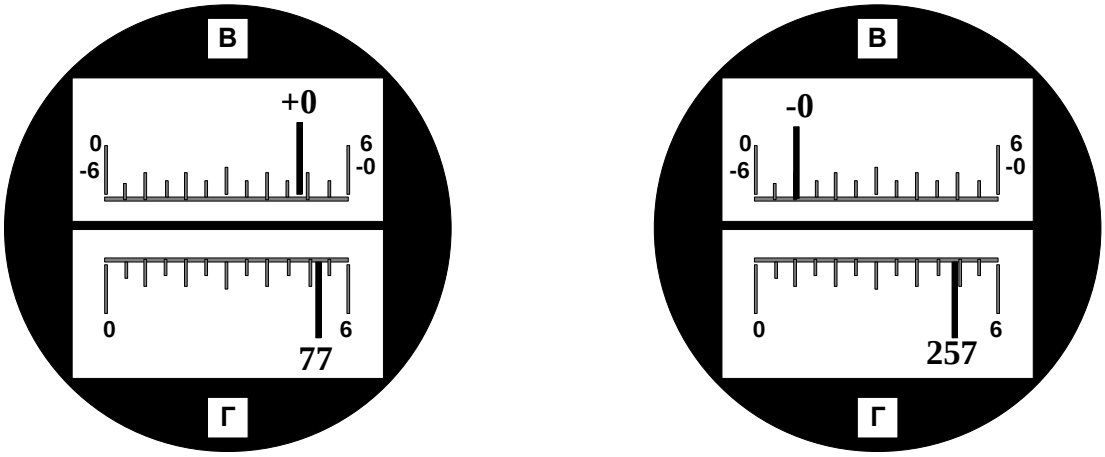
При поверке трубу наводят на хорошо видимую точку. Если положение точки при вращении трубы вокруг горизонтальной оси, пройдя вдоль вертикальной нити, будет находиться посередине между штрихами биссектора, то сетка установлена правильно. Если будет замечено смещение изображения точки более чем на треть толщины биссектора, то сетку необходимо развернуть. Для этого следует снять колпачок, закрывающий юстировочные винты сетки, слегка ослабить винты, скрепляющие окуляр и с корпусом трубы, и развернуть окуляр вместе с сеткой. После этого поверку повторяют вновь.

4. *Визирная ось зрительной трубы должна быть перпендикулярна к горизонтальной оси ее вращения. Несоблюдение этого условия вызывает коллимационную ошибку C .*

Для выполнения поверки приводят ось вращения теодолита в отвесное положение, визируют на одну и ту же удаленную точку (при этом угол наклона должен быть близким к 0°). При двух положениях вертикального круга (КЛ- вертикальный круг теодолита слева от зрительной трубы, при этом окуляр развернут «к наблюдателю», КП - вертикальный круг теодолита справа от зрительной трубы, при этом окуляр развернут «к наблюдателю») берут отсчеты по шкале горизонтального круга с помощью микроскопа (рис. 3).

При смене положения КЛ на КП или КП на КЛ используют закрепительные винты алидады горизонтального круга и зрительной трубы.

а) б)



КЛ КП

Рис. 3. Значения отсчетов при визировании на одну и ту же точку при двух положениях вертикального круга:

а – положение КЛ; *б* - положение КП

В примере на рис. 3 получены следующие отсчеты по горизонтальному кругу: отсчет при $КЛ_1 = 77^\circ 52'$ (рис. 3*а*), отсчет при $КП_1 = 257^\circ 49'$ (рис. 3*б*).

Затем открепляют винт подставки, поворачивают теодолит в подставке на 180°, приводят вертикальную ось вращения прибора в отвесное положение, вновь наводят на ту же точку и получают отсчеты $КЛ_2$ и $КП_2$.

Например, при повторном наведении на точку получены следующие отсчеты: $КЛ_2 = 205^\circ 06'$, $КП_2 = 25^\circ 04'$.

Величина коллимационной погрешности вычисляется по формуле:

$$C = \frac{\left[КЛ - (КП \pm 180^\circ) \right]}{2}. \qquad (9)$$

В первом случае получаем значение коллимационной ошибки, используя отсчеты $КЛ_1 = 77^\circ 52'$ и $КП_1 = 257^\circ 49'$:

$$C_1 = \frac{77^\circ 52' - (257^\circ 49' - 180^\circ)}{2} = \frac{77^\circ 52' - 77^\circ 49'}{2} = \frac{+3'}{2} = +1{,}5'.$$

Во втором случае получаем значение коллимационной ошибки, используя отсчеты $КЛ_2 = 205^\circ 06'$ и $КП_2 = 25^\circ 04'$:

$$C_2 = \frac{205^\circ 06' - (25^\circ 04' + 180^\circ)}{2} = \frac{205^\circ 06' - 205^\circ 04'}{2} = \frac{+4'}{2} = +2'.$$

Если все измерения и вычисления выполнены правильно, полученные значения не должны различаться более чем на $2'$ (удвоенная точность отсчитывания прибора).

Результаты выполнения поверки фиксируются в виде соответствующих записей в журнале измерений, а именно, необходимо записать отсчеты при двух наведениях на точку и представить вычисления коллимационной ошибки. В конце вычислений необходимо сделать вывод.

Для того, чтобы решить вопрос о юстировке необходимо определить значение коллимационной ошибки повторно. Второе определение выполняет другой исполнитель. В журнале производится соответствующая запись. Колебание C при двух определениях не должно превышать величины $3m_\beta = \pm 1{,}5'$, где m_β - средняя квадратическая ошибка измерения угла одним приемом (для теодолита 2Т30 она равна $30''$ или $0{,}5'$). Если величина коллимационной ошибки оказалась больше допустимого значения, то ее юстируют.

Для юстировки следует изменить последний отсчет по горизонтальному кругу на величину C. Для этого необходимо отвернуть колпачок 11 (рис. 2) и шпилькой при слегка отпущенных вертикальных юстировочных винтах переместить оправу сетки при помощи горизонтальных исправительных винтов до совмещения перекрестия сетки с изображением наблюдаемой

точки. Точная установка перпендикулярности оси достигается в несколько приемов.

Юстировка производится преподавателем или в его присутствии.

5. *Место нуля вертикального круга должно быть близким к нулю.*

Место нуля (МО) вертикального круга следует определять при тех же условиях, что и коллимационную ошибку. Для определения МО при этом берут отсчеты по вертикальному кругу. Перед взятием отсчетов приводят пузырек цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга 12 (рис. 2) на середину и берут отсчеты по верхней шкале микроскопа (рис. 3) при двух положениях круга.

В примере на рис. 3 получены следующие отсчеты по вертикальному кругу: отсчет при $КЛ_1 = +0^\circ 49'$ (рис.3*а*), отсчет при $КП_1 = -0^\circ 50'$ (рис.3*б*).

Вычисление производят по формулам для теодолитов с секторной разбивкой лимба вертикального круга -

$$МО = \frac{КЛ + КП}{2}. \qquad (10)$$

Пример.

$$МО_1 = \frac{КЛ_1 + КП_1}{2} = \frac{+0^\circ 49' + (-0^\circ 50')}{2} = \frac{-1'}{2} = -0{,}5'$$

МО следует определить дважды разными наблюдателями. Если значение МО не превысит $3m_\nu \approx 2'$, где $m_\nu = 45''$ - средняя квадратическая ошибка измерения вертикального угла для теодолита 2Т30, то условие поверки считается выполненным и прибор не требует юстировки. В другом случае выполняется юстировка.

Для юстировки МО у теодолита 2Т30 устанавливают на вертикальном круге отсчет, равный $КЛ - МО$ или $МО - КП$, и юстировочными винтами

перемещают оправу с сеткой до совмещения горизонтальной нити с изображением выбранной цели.

6. *Ось вращения зрительной трубы должна быть перпендикулярна вертикальной оси вращения инструмента.*

Теодолит тщательно горизонтируют и наводят трубу на высоко расположенную точку ($\nu > 15 - 20^\circ$) при двух положениях круга. После каждого наведения проецируют центр сетки нитей (при закрепленной алидаде горизонтального круга) на шкалу линейки, установленной горизонтально в 20-30 метрах от теодолита примерно на уровне горизонта прибора, перпендикулярно к линии визирования. При проецировании берут отсчеты по шкале a_1 и a_2. Разность отсчетов не должна превышать 4 мм или величины биссектора. Устранение несоблюдения этого условия исправляется только в мастерской.

Результаты выполнения поверки фиксируются в виде соответствующих записей в журнале измерений, а именно, необходимо записать отсчеты при двух наведениях на точку и представить вычисления места нуля. В конце вычислений необходимо сделать вывод.

Для производства угловых измерений теодолит центрируют над вершиной угла и горизонтируют с помощью цилиндрического уровня, а зрительную трубу фокусируют. Фокусирование производится в следующей последовательности:

– фокусирующим винтом сетки нитей добиваются четкого изображения сетки нитей;

– с помощью кремальерного винта добиваются четкого изображения визирной цели в поле зрения зрительной трубы**.**

Горизонтальный угол в точке стояния теодолита определяется двумя направлениями и равен разности отсчетов по горизонтальному кругу

теодолита при последовательном наведении центра сетки нитей зрительной трубы на визирные цели, установленные в этих точках (рис. 4).

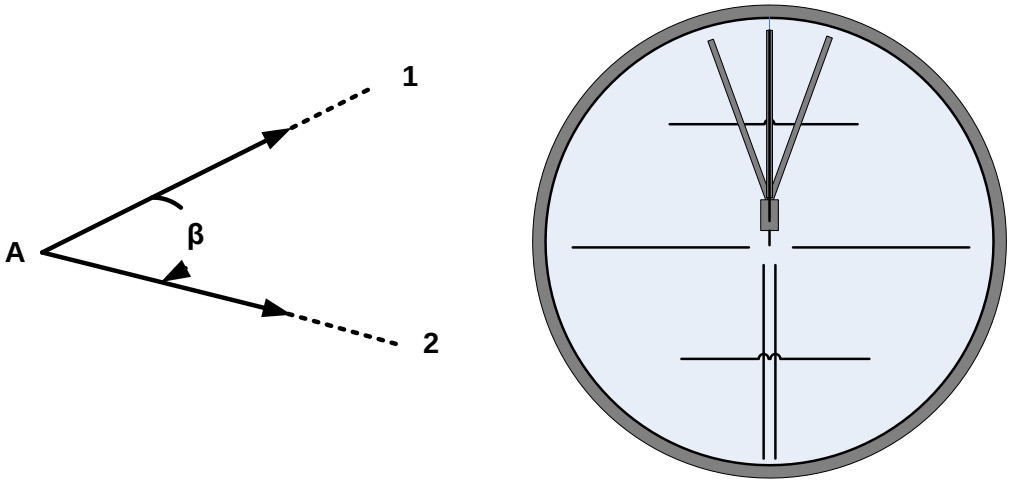


Рис. 4. Схема определения горизонтального угла

Измерение горизонтальных углов производится способом приемов. Полный прием измерений состоит из двух полуприемов, выполняемых при «круге лево» и «круге право».

Порядок работы на станции при измерении горизонтального угла следующий.

Первый полуприем (положение теодолита КЛ):

– приводят теодолит в рабочее положение, а именно: центрируют над вершиной угла (в точке А), горизонтируют с помощью подъемных винтов подставки и цилиндрического уровня;

– открепляют алидаду горизонтального круга и зрительную трубу наводят на визирную цель, установленную в точке 1, с помощью наводящих винтов алидады и трубы, как показано на рис. 4 (в качестве визирной цели может быть использовано специальное устройство - марка, установленная на штативе, или веха);

– снимают отсчет (1) по горизонтальному кругу $КЛ_1$ и записывают его в журнал (табл.7);

– открепляют алидаду горизонтального круга и зрительную трубу наводят на визирную цель, в установленную в точке 2, с помощью наводящих винтов алидады и трубы, как показано на рис. 4;

– снимают отсчет (2) по горизонтальному кругу $КЛ_2$ и записывают его в журнал (табл.7);

– вычисляют горизонтальный угол при положении теодолита КЛ:

$$\beta_{КЛ} = КЛ_2 - КЛ_1 \quad \text{или} \quad \beta_{КЛ} = (2) - (1), \qquad (11)$$

результат записывают в журнал (табл.7. зап.(3)).

Пример.

$$\beta_{КЛ} = 95^\circ 30' - 48^\circ 25' = 47^\circ 05'.$$

Второй полуприем (положение теодолита КП):

– открепляют алидаду горизонтального круга и зрительную трубу наводят на визирную цель, установленную в точке 1, с помощью наводящих винтов алидады и трубы, как показано на рис. 4;

– снимают отсчет (4) по горизонтальному кругу $КП_1$ и записывают его в журнал (табл.7);

– открепляют алидаду горизонтального круга и зрительную трубу наводят на визирную цель, установленную в точке 2 с помощью наводящих винтов алидады и трубы, как показано на рис. 4;

– снимают отсчет (5) по горизонтальному кругу $КП_2$ и записывают его в журнал (табл.7);

– вычисляют горизонтальный угол при положении теодолита КП

$$\beta_{КП} = КП_2 - КП_1 \quad \text{или} \quad \beta_{КП} = (4) - (5), \qquad (12)$$

– результат записывают в журнал (табл.7. зап.(6)).

Пример.

$$\beta_{КП} = 275^\circ 30' - 228^\circ 26' = 47^\circ 04';$$

– сравнивают значения горизонтального угла, полученные при двух положениях круга (КЛ и КП), разность полученных значений не должна превосходить удвоенной точности отсчитывания прибора - $2'$, в нашем примере разность значений составляет $1'$, следовательно можно сделать вывод, что грубые ошибки измерений не значимы и измерения выполнены качественно. Если разность полученных значений окажется больше допустимой, измерения следует повторить, при этом в журнале производятся новые записи!!!

– если измерения произведены качественно, за окончательное значение горизонтального угла принимается среднее арифметическое из двух полуприемов:

$$\beta = \frac{\beta_{КЛ} + \beta_{КП}}{2}, \qquad (13)$$

– результат записывают в журнал (табл.7. зап.(7)).

Пример.

$$\beta = \frac{47^\circ 05' + 47^\circ 04'}{2} = 47^\circ 04{,}5'$$

Таблица 7

Измерение горизонтальных и вертикальных углов

Теодолит 2Т30

Горизонтальные углы

Точки стояния	Круг	Точка визирования	Горизонтальный круг		
			Отсчет ° ′	Измеренный угол ° ′	Средний угол ° ′
А	КЛ	1	48 25 (1)	47 05 (3)	47 04.5 (7)
		2	95 30 (2)		
	КП	1	228 26 (4)	47 04 (6)	
		2	275 30 (5)		

Вертикальные углы

Точки		Круг	Вертикальный круг		
			Отсчет ° ′	Место нуля, МО	Угол наклона ° ′
Стояния	Визирования				
А	1	КЛ	+ 6 32 (8)		
		КП	- 6 33 (9)	- 0. 5 ′ (10)	+ 6 32.5 (11)
А	2	КЛ	- 8 43 (12)		
		КЛ	+8 42 (13)	- 0. 5′ (14)	- 8 42.5 (15)

Измерение вертикальных углов ν_{A-1} и ν_{A-2} образованных направлениями А-1 и А-2 соответственно производится в следующей последовательности.

Измерение вертикального угла ν_{A-1} :

- устанавливают теодолит в положение КЛ;

- наводящим винтом зрительной трубы и алидады горизонтального круга точно наводят центр сетки нитей на визирную цель в точке 1, проверяют положение (нуль-пункта) пузырька цилиндрического уровня (если пузырек отклонился от нуль-пункта, его положение изменяют с помощью подъемных винтов подставки);

- снимают отсчет по вертикальному кругу и записывают его в журнал (табл.7. зап.(8));

- устанавливают теодолит в положение КП;

- наводящим винтом зрительной трубы и алидады горизонтального круга точно наводят центр сетки нитей на визирную цель в точке 1, проверяют положение (нуль-пункта) пузырька цилиндрического уровня (если пузырек отклонился от нуль-пункта, его положение изменяют с помощью подъемных винтов подставки);

- снимают отсчет по вертикальному кругу и записывают его в журнал (табл.7. зап.(9));

- вычисляют значение места нуля по формуле 10 и записывают в журнал (табл.7. зап.(10)):

$$\text{МО} = \frac{(+6^\circ 32' - 6^\circ 33')}{2} = \frac{-1'}{2} = -0{,}5'$$

- вычисляют значение вертикального угла по формуле и записывают в журнал (табл.7. зап.(11)):

$$\nu = \text{КЛ} - \text{МО} \qquad (14)$$

Пример.

$$\nu_{A-1} = +6^\circ 32' - (-0{,}5') = +6^\circ 32' + 0{,}5' = +6^\circ 32{,}5'.$$

Аналогично производят измерения вертикального угла ν_{A-2}, образованного направлением А-2. Порядок записи в журнале показан в табл.7.

При производстве геодезических работ измерения горизонтальных и вертикальных углов производят в едином цикле, одновременно снимая отсчеты по горизонтальному и вертикальному кругам.

В качестве проверки и закрепления навыков измерения углов студентам предлагается произвести повторные измерения горизонтального угла β и двух вертикальных углов ν_{A-1} и ν_{A-2}.

Для повторных измерений необходимо изменить ориентировку лимба горизонтального круга при положении теодолита КЛ. Для этого, открепив алидаду горизонтального круга, вращают теодолит до тех пор, пока на горизонтальной шкале микроскопа не установится отсчет, близкий к нулевому. Закрепив алидаду, наводящим винтом выставляют по горизонтальному кругу отсчет $0^\circ 00'$. Для наведения на визирную цель необходимо открепить лимб горизонтального круга и вращая теодолит установить изображение визирной цели в поле зрения трубы. Закрепив лимб, точное наведение на визирную цель производят наводящим винтом лимба горизонтального круга. После завершения данной процедуры открепляют алидаду и несколько раз (1-3)

поворачивают прибор вокруг своей оси, после чего выполняют измерения горизонтальных и вертикальных углов, так как описано выше.

Следует обратить внимание на то, что при угловых измерениях лимб горизонтального круга должен быть закреплен!!!

Последовательность действий при угловых измерениях (табл. 8):

- привести прибор в рабочее положение;

- установить прибор в положение КЛ;

- произвести визирование на точку 1, проверить положение пузырька цилиндрического уровня (он должен быть в нуль-пункте);

- снять отсчеты по горизонтальному (отсчет (1)) и вертикальному (отсчет (2)) кругам;

- произвести визирование на точку 2, проверить положение пузырька цилиндрического уровня (он должен быть в нуль-пункте);

- снять отсчеты по горизонтальному (отсчет (3)) и вертикальному (отсчет (4)) кругам;

- вычислить значение горизонтального угла $\beta = (3) - (1)$ и записать в журнал;

- установить прибор в положение КП;

- произвести визирование на точку 1, проверить положение пузырька цилиндрического уровня (он должен быть в нуль-пункте);

- снять отсчеты по горизонтальному (отсчет (5)) и вертикальному (отсчет (6)) кругам;

- произвести визирование на точку 2, проверить положение пузырька цилиндрического уровня (он должен быть в нуль-пункте);

- снять отсчеты по горизонтальному (отсчет (7)) и вертикальному (отсчет (8)) кругам;

- вычислить значение горизонтального угла $\beta = (3) - (1)$ и записать в журнал;

- выполнить полевой контроль, сравнив значения углов, измеренных при КЛ и КП, разность их не должна превышать $2'$, если условие не выполняется, следует повторить измерения;

- вычислить значение горизонтального угла по формуле (13);

- вычислить значение МО по формуле (10) для каждого направления;

- вычислить значения углов наклона по формуле (14).

Образец заполнения бланка лабораторной работы представлен в табл. 8.

Таблица 8

Журнал измерений горизонтальных и вертикальных углов

Дата: *25 октября 2005 г.*

Исполнитель: *Иванов И.И. (ГК-05-1)*

Точки стояния	Круг	Точки визирования	Горизонтальный круг: Отсчет	Горизонтальный круг: Измеренный угол	Горизонтальный круг: Средний угол	Точки: Стояния	Точки: Визирования	Круг	Вертикальный круг: Отсчет	Вертикальный круг: Место нуля	Вертикальный круг: Угол наклона	Длины линий
		Определение коллимационной ошибки										
		Теодолита 2Т30 № 13356										
		$КЛ_1$		$77^0 52'$				КЛ	$+0^0 49'$			
		$КП_1$		$257^0 49'$				КП	$-0^0 50'$			
	$c_1 = \frac{77^0 52' - (257^0 49' - 180^0)}{2} = \frac{77^0 52' - 77^0 49'}{2} = \frac{+3'}{2} = +1{,}5'$						$МО_1 = \frac{КЛ_1 + КП_1}{2} = \frac{+0^0 49' + (-0^0 50')}{2} = \frac{-1'}{2} = -0{,}5'$					
		$КЛ_2$		$205^0 06'$								
		$КП_2$		$25^0 04'$								
	$c_2 = \frac{205^0 06' - (25^0 04' + 180^0)}{2} = \frac{205^0 06' - 205^0 04'}{2} = \frac{+4'}{2} = +2'$											
А	КЛ	1	48 25		47 04,5	А	1	КЛ	+6 32	- 0,5	+6 32,5	
		2	95 30	47 05				КП	-6 33			
	КП	1	228 26			А	2	КЛ	-8 43	-0,5	-8 42,5	
		2	275 30	47 04				КП	+ 8 42			
А	КЛ	1	0 01 (1)		47 04	А	1	КЛ	+6 33 (2)	0	+ 6 33	
		2	47 04 (3)	47 03				КП	-6 33 (4)			
	КП	1	180 00 (5)			А	2	КЛ	-8 45 (6)	-1	-8 44	
		2	227 05 (7)	47 05				КП	+8 43 (8)			

2.3. Лабораторная работа №4. Нивелирование

Нивелирование или определение превышений может быть выполнено различными методами. Основные методы определения превышений это геометрическое и тригонометрическое нивелирование.

Геометрическое нивелирование выполняется с помощью нивелира и нивелирных реек горизонтальным лучом визирования.

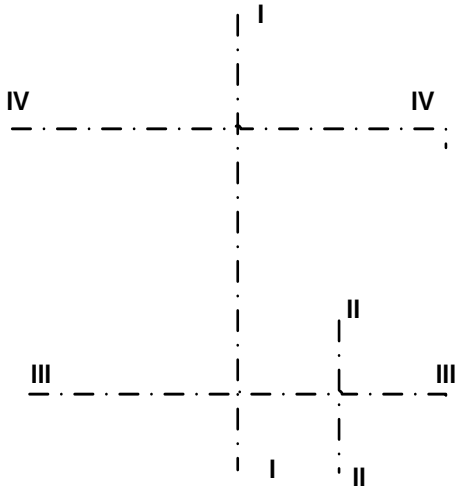
Тригонометрическое нивелирование производится с помощью теодолита и нивелирной рейки наклонным лучом визирования.

2.3.1. Геометрическое нивелирование

Прежде чем приступить к измерению превышений, необходимо ознакомиться с устройством и основными поверками нивелира и нивелирных реек. Рассмотрим устройство нивелира на примере точного нивелира Н-3 (рис.5).

Нивелиры класса Н-3 предназначены для нивелирования III и IV классов (высотные сети сгущения) и выполнения инженерно-геодезических работ.

У нивелира Н-3 можно выделить четыре основных оси, геометрические соотношения между которыми определяются «поверками».



I - I – вертикальная ось вращения прибора

II - II – ось круглого уровня

III - III – ось цилиндрического уровня

IV - IV – визирная ось зрительной трубы

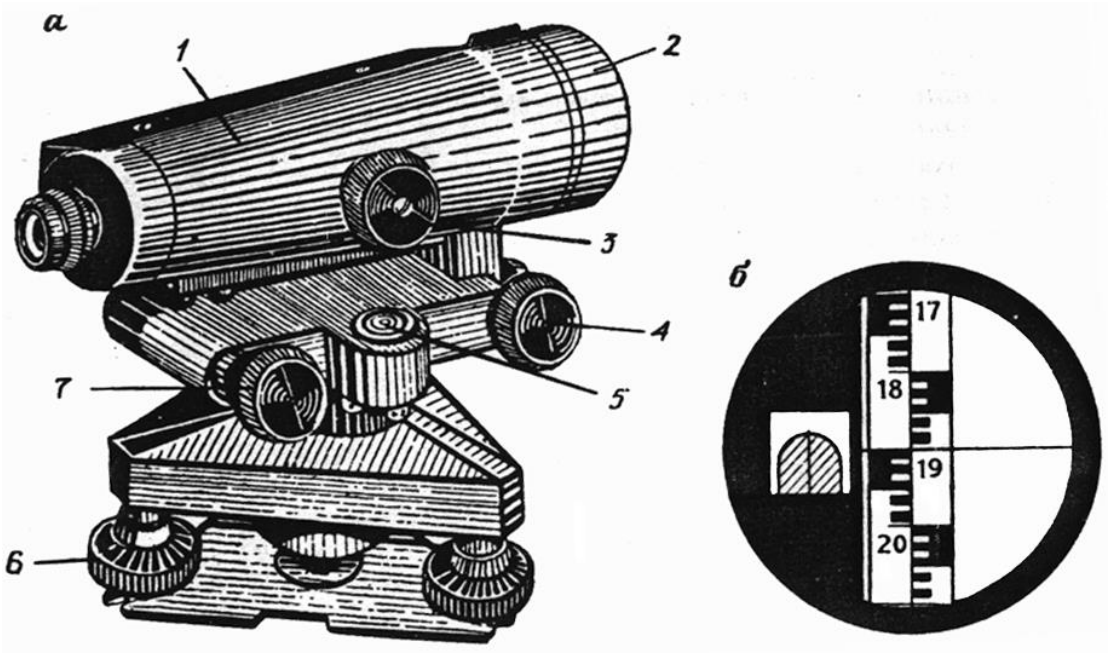


Рис. 5 Нивелир Н-3: *а* – общий вид, *б* – поле зрения трубы. 1 – корпус зрительной трубы, 2 – объектив, 3 – кремальера, 4 – наводящий винт трубы, 5 – установочный (круглый) уровень, 6 – подъёмный винт, 7 – элевационный винт. Отсчёт по рейке: 1900 мм

Перед производством работ в полевых условиях выполняют следующие поверки:

Ось круглого уровня (II-II) должна быть параллельна вертикальной оси вращения прибора (I-I).

Приводят пузырек уровня в нуль-пункт при помощи подъемных винтов. Открепив закрепительный винт зрительной трубы, верхнюю часть прибора поворачивают на 180°. Если пузырек остается на середине, то условие выполнено. Если пузырек отклонился от нуль-пункта, то его приводят в первоначальное положение, перемещая на половину отклонения при помощи юстировочных винтов уровня 5, а на другую половину – подъемными винтами 6. Поверку выполняют до выполнения условия.

Визирная ось (IV-IV) должна быть параллельна оси цилиндрического уровня (III-III). Основное условие нивелира.

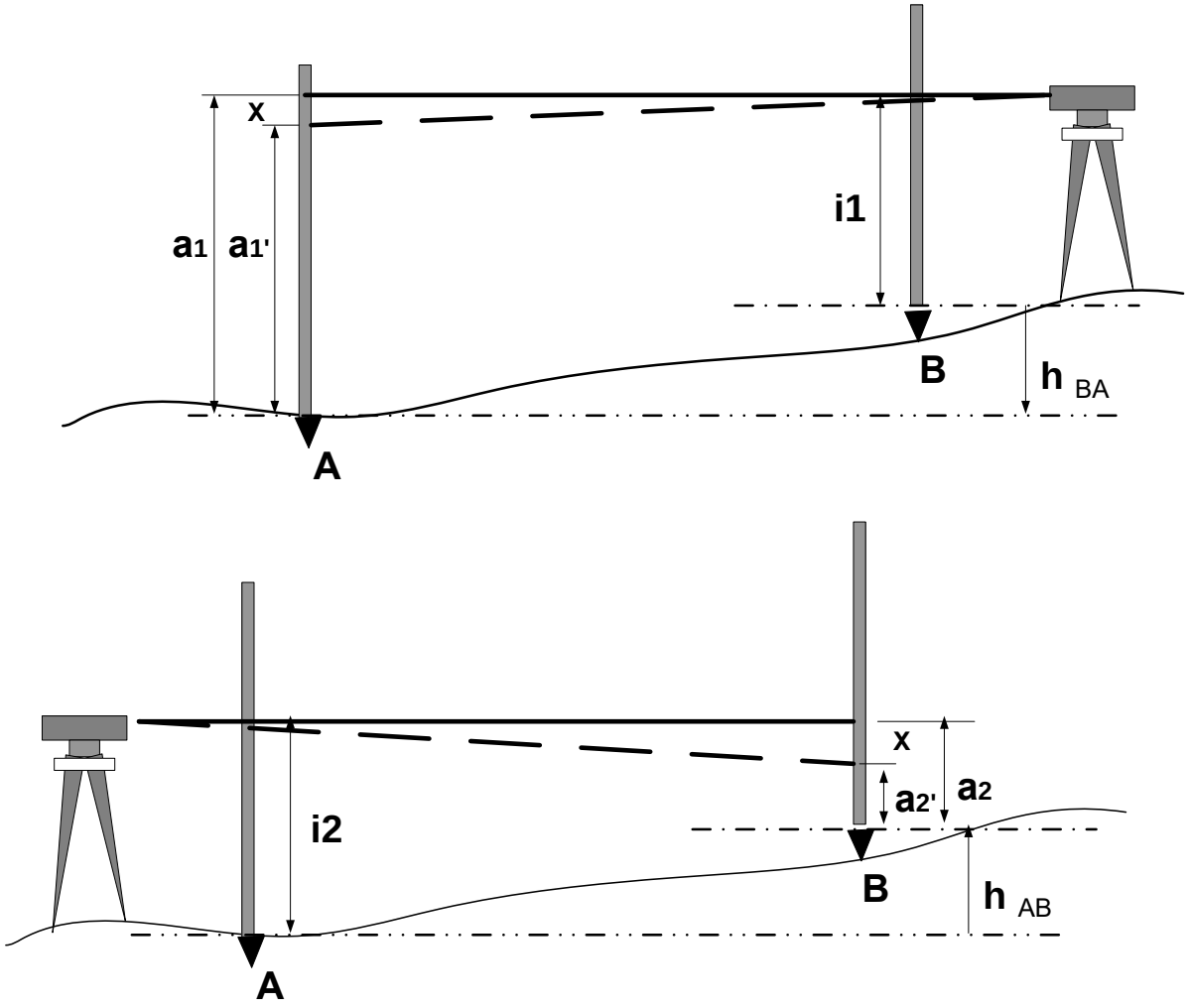


Рис. 6. Схема проверки основного условия нивелира

Для выполнения поверки производится нивелирование с разными плечами, для этого на местности закрепляют костылями или башмаками линию длиной 50-60 метров, на обеих концах на костыли или башмаки вертикально устанавливают нивелирные рейки (рис. 7) и определяют превышение между костылями с двух станций (рис.6). При этом нивелир устанавливают на расстоянии 3-5 метров от рейки на продолжении створа А-В (рис.6), горизонтируют прибор при помощи круглого уровня и визируются на ближайшую рейку.

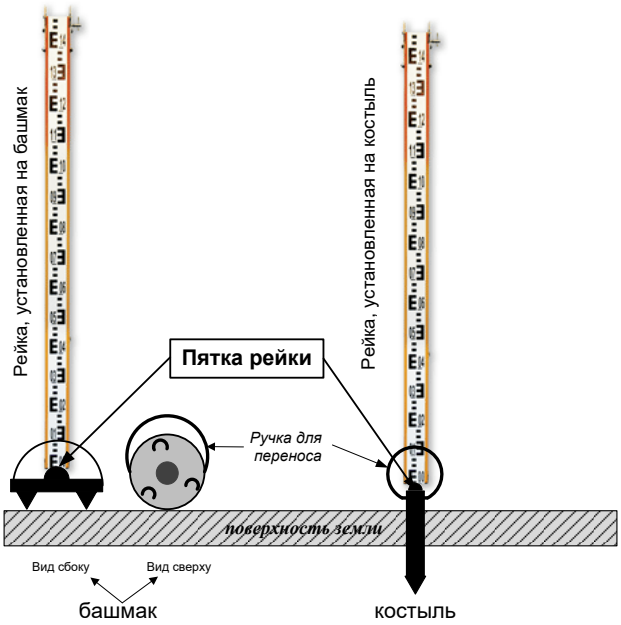


Рис. 7. Вид рейки, установленной на башмаке или костыле

С помощью элевационного винта пузырек цилиндрического уровня приводят в нуль-пункт (в поле зрения трубы совмещают изображения двух концов пузырька цилиндрического уровня как показано на рис.15). Производят отсчет i_1 по ближайшей рейке и, изменив фокусировку трубы, производят отсчет a'_1 по дальней рейке. Сохраняя фокусировку трубы, устанавливают нивелир на расстоянии 3-5 метров от второй рейки на продолжении створа 2-1. Приводят прибор в рабочее положение, как описано выше и производят отсчеты a'_2 по дальней рейке и i_2 по ближней рейке. Значение угла между визирной осью и осью цилиндрического уровня вычисляют по формуле (19):

$$\tau = \frac{X(мм) \cdot \rho''}{S(мм)}$$

где $$X = \frac{i_1 + i_2}{2} - \frac{a'_1 + a'_2}{2}. \qquad (19)$$

Расстояние определяют с точностью 0,5 метра.

Значение угла определяют 3 раза при разных горизонтах инструмента. Расхождение между отдельными значениями угла не должно превышать 5″. За окончательный результат принимают среднее арифметическое значение

$$\tau_0 = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n}{n} \quad . \qquad (20)$$

Угол $|\tau_0|$ не должен превышать 10″. При $|\tau_0|$ > 10″ производят юстировку. Для этого устанавливают горизонтальный штрих при помощи элевационного винта на исправленный отсчет, после чего приводят пузырек на середину, действуя юстировочными винтами уровня. Для контроля юстировки поверку повторяют.

Юстировку выполняют под руководством преподавателя.

Результаты поверок записывают в журнал.

Проверку правильности установки сетки нитей производят для того, чтобы убедиться, что вертикальная нить сетки при среднем положении пузырька уровня совпадает с отвесной линией, а горизонтальная нить сетки перпендикулярна к вертикальной оси нивелира. Проверку выполняют следующим образом. На удалении 10-15 м от нивелира подвешивают отвес. Приводят нивелир в рабочее положение и наводят вертикальную нить сетки на нить отвеса. Если один конец вертикальной нити сетки отклоняется от нити отвеса более чем на 0,5 мм (определяется при помощи линейки), то установку сетки нитей исправляют.

После юстировки положения сетки проверку повторяют, чтобы убедиться, что вертикальная нить установлена правильно.

В процессе измерения превышений используются нивелирные рейки.

Нивелирная рейка является точным геодезическим прибором, поэтому к ее изготовлению, разбивке и правилам эксплуатации предъявляются жесткие требования.

Согласно ГОСТу 11158-83 выпускают три типа **нивелирных реек**: РН-05, РН-3, РН-10.

РН-05 — штриховая трехметровая рейка с инварной полосой, на которую нанесены основная и дополнительная шкалы с делениями 5 мм.

НР-05 предназначены для нивелирования **I** и **II** классов и высокоточного нивелирования в прикладной **геодезии**, геодинамике и т. п., их можно использовать и при **нивелировании III** класса в комплекте с **нивелиром** N2, Ni-007 и др., имеющими оптические микрометры.

РН-3, РН-10 — сантиметровые, шашечные, двусторонние, 3- и 4-метровые рейки, изготавливаемые из выдержанного, пропитанного маслом хвойного дерева, цельные или складные.

Для нивелирования I—IV классов применяют, как правило, цельные трехметровые рейки. Концы реек оковывают, к корпусу рейки прикрепляют ручки и круглые уровни с ценой деления 7÷15' на 2 мм. При **геометрическом нивелировании** рейки устанавливают на башмаки или костыли.

РН-3 используют при нивелировании III, IV классов и технического нивелирования с нивелирами Н-3, Н-3К и другими равноточными им нивелирами.

Рейки нивелирные РН-3 применяются в комплекте с оптико-механическими нивелирами и теодолитами и предназначены для определения превышения методом геометрического нивелирования при проведении исследовательских работ в инженерно-геодезических изысканиях, выполнении топографических съемок, в строительных и других работах. Рейка нивелирная представляет собой два деревянных бруса, окантованных планкой по длинной стороне, соединенных шарнирно и имеющих возможность складываться и раскладываться в одну прямую линию.

На изготовление реек идет сосна, имеющая незначительный коэффициент линейного расширения. Для предохранения реек от влаги их выдерживают в масле и покрывают белой масляной краской.

Рейки, предназначенные для технического нивелирования, имеют сантиметровые деления, нанесенные делительной машиной или по трафарету. Дециметровые интервалы с черной стороны отмечены цифрами от 00 до 29, а с красной - от 48 до 77 (рис.12).

Подписи на рейке делают через 1 дм в перевернутом или прямом изображении (для приборов с астрономической трубой, имеющей перевернутое изображение и с прямым изображением зрительной трубы). Каждый дециметр при разбивке на сантиметры сгруппирован в фигуру, похожую на букву Е, и отдельные шашки.

По конструкции рейки бывают цельные, складные и раздвижные (телескопические) длиной 3 и 4 метра. Цельные рейки предпочтительнее складных или раздвижных, т.к. в них нет шарниров и специальных зажимов, за счет которых длина их может быть нарушена. Пятка рейки защищена от износа металлической пластиной. На черной стороне рейки пятка имеет нулевой отсчет, а у красной – произвольный 4687 или 4787 (4700 или 4800). Как правило при выполнении нивелирования используется комплект из двух реек. На рейках одного комплекта отсчеты по красным сторонам реек различаются на 100 мм., это позволяет осуществлять надежный контроль в работе, т.к. по разным цифровым отсчетам получают одинаковые результаты.

Нивелирные рейки РН-3 характеризуются следующими техническими параметрами:

Наименование	РН-3
Номинальная длина, мм	3000

Интервал деления шкалы	10
Допускаемое отклонение интервала деления шкалы, мм	± 0.2
Допускаемое отклонение дециметрового интервала, мм	± 0.3
Допускаемое отклонение метрового интервала, мм	± 0.5

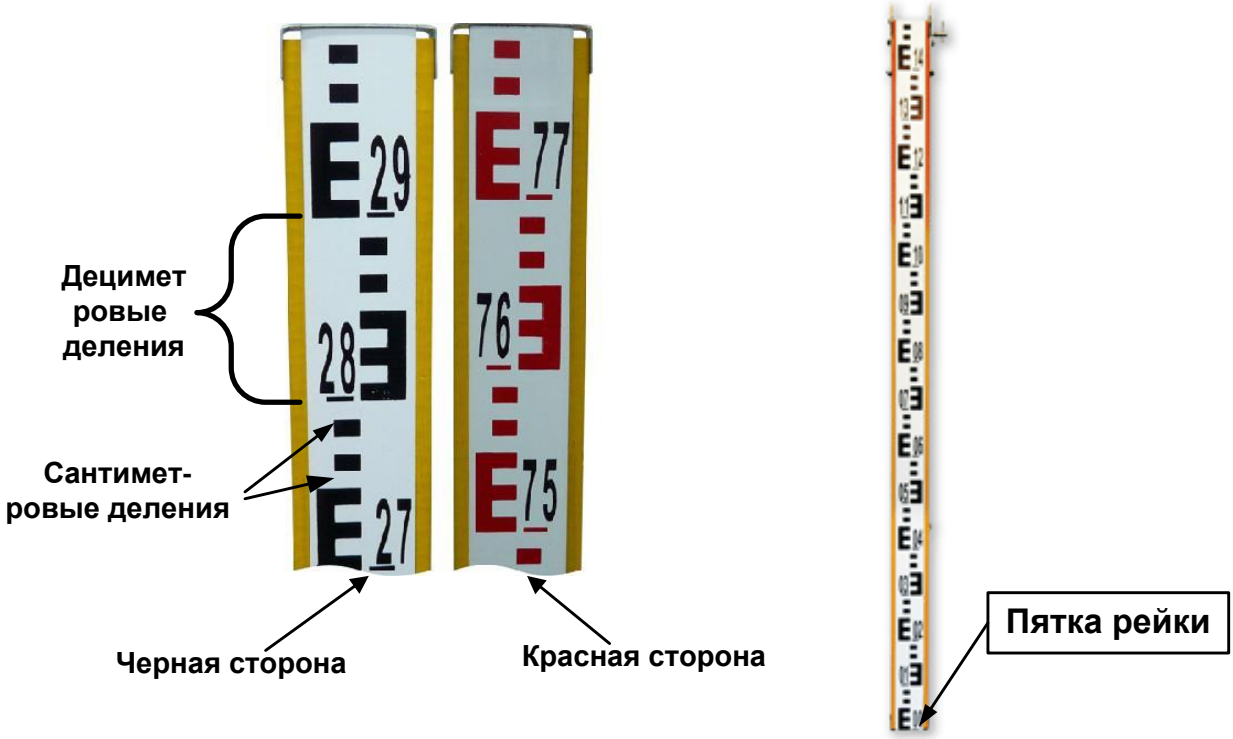


Рис.12. Нивелирная рейка РН-3

Перед выполнением измерений необходимо выполнить поверки реек.

При внешнем осмотре реек обращают внимание на качество окраски штрихов и оцифровки реек , а также на равномерность и чистоту красочных покрытий. На рабочей поверхности реек не должно быть больших пятен, царапин и отслаивания краски, затрудняющих взятие отсчетов по рейке. Крепление ручек, круглого уровня и пяток реек должно быть надежным. Между корпусом и пяткой рейки не должно быть щелей. По эксплуатационной документации проверяют наличие принадлежностей в комплекте реек.

При опробовании проверяют работоспособность и надежность фиксации фурнитуры складных реек.

Проверка правильности установки круглого уровня на рейке.

Правильность установки круглого уровня на рейке проверяют при помощи вертикальной нити сетки трубы нивелира или теодолита.

Рейку устанавливают на расстоянии 30 - 50 м от нивелира. Приводят вертикальную ось прибора в отвесное положение при помощи уровня и по команде наблюдателя устанавливают рейку так, чтобы ее ребро точно совпадало с вертикальной нитью сетки. Юстировочными винтами круглого уровня, установленного на рейке, приводят пузырек на середину ампулы. После этого поворачивают рейку на 90^0 и повторяют проверку. Во время проверки рейку следует поддерживать при помощи рейкодержателя штатива или прислонять ее к какому-либо предмету (столбу, забору).

Деревянные рейки допускается проверять по отвесу, подвешенному с помощью укрепленного на рейке кронштейна.

Контрольное определение длин метровых интервалов рейки в полевых условиях производят при помощи контрольной линейки.

При исследовании деревянных реек края шашечных делений, по которым будут производить отсчитывание, отмечают тонкими штрихами при помощи металлической линейки и остро отточенного карандаша. Исследуемую деревянную рейку кладут горизонтально. Интервалы шкалы 1-10, 10-20, 20-29, 48-57, 57-67 и 67-76 измеряют сначала в прямом, а затем в обратном направлении. При обратных измерениях контрольную линейку поворачивают на 180°. Измерение состоит из двукратного отсчитывания по концам метрового интервала при помощи контрольной линейки. Сначала отсчитывают по левому концу, а затем – по правому. Перед вторым измерением интервала линейку немного сдвигают.

Разности отсчетов по правому и левому концам контрольной линейки на каждом интервале не должны различаться между собой более чем на 0,10 мм. Если были получены большие расхождения, то контрольную линейку сдвигают еще раз и повторяют измерения. Грубые отсчеты вычеркивают, а из оставшихся берут среднее. Перед началом и в конце измерений каждой стороны рейки измеряют и записывают температуру контрольной линейки.

Разность высот нулей черной и красной сторон деревянных реек определяют следующим образом:

В 20-30 м от нивелира забивают костыль (кол с гвоздем) или устанавливают нивелирный башмак. Устанавливают на него рейку и берут последовательно отсчеты по разным ее шкалам. Разность отсчетов определяет значение разности высот нулей шкал (сторон). Всего делают три приема, между приемами изменяют горизонт нивелира на произвольную высоту. За окончательное значение разности высот нулей принимают среднее арифметическое из трех приемов.

Для определения прогиба корпуса рейки, последнюю укладывают боковым ребром на ровную поверхность и между ее концами натягивают нить. Линейкой с миллиметровыми делениями измеряют расстояния а1, а2 и а3 от нити до плоскости шкалы на краях и в средней части рейки.

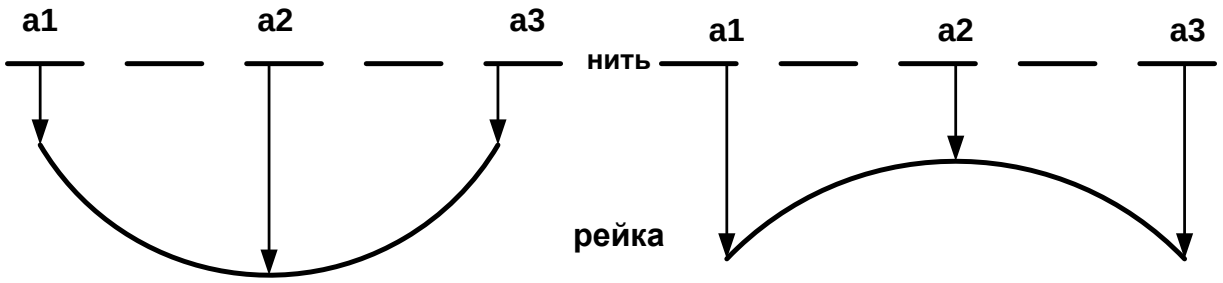


Рис.13. Определение стрелы прогиба рейки

Стрелку прогиба корпуса рейки F характеризуют значением разности:

F = [a2 - (a1+a3) / 2], выраженным в миллиметрах (рис.13).

Стела прогиба для рейки РН-3 не должна превышать 6 мм.

После выполнения поверок нивелира и ознакомления с поверками реек студентам предлагается измерить превышение между заданными точками в прямом и обратном направлениях. Нивелирование выполняется способом «из средины». Схема нивелирования представлена на рис. 14.

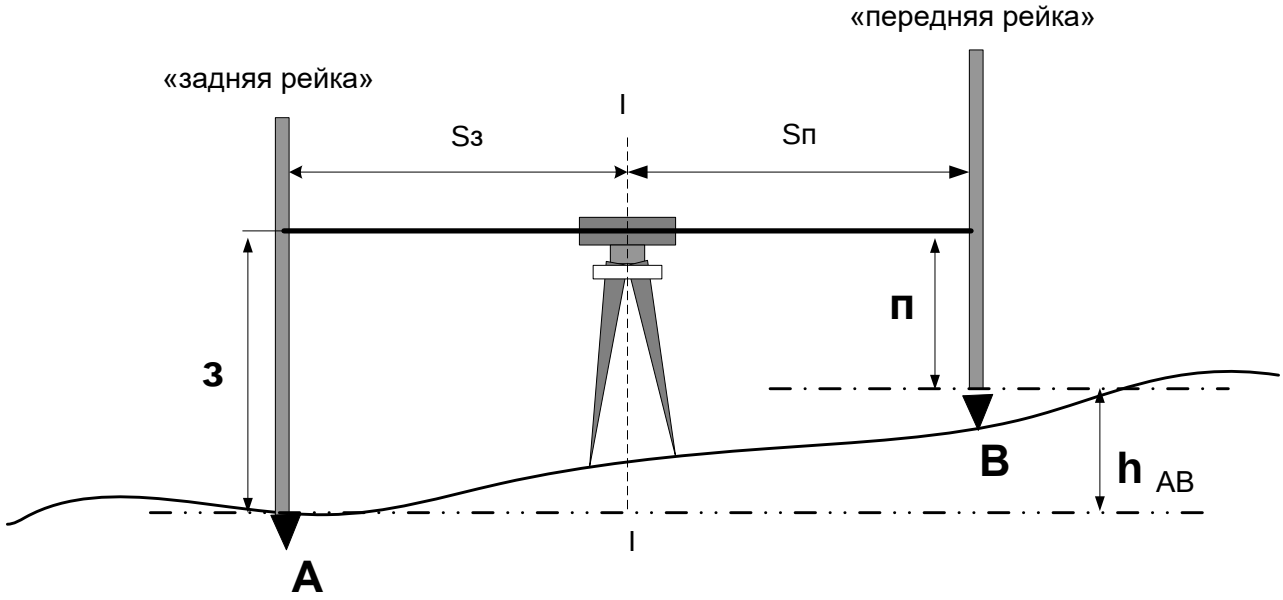


Рис.14. Схема нивелирования «из средины»

Требуется определить превышение h_{AB}, в этом случае точка А (исходная для определения этого превышения) является «задней» по ходу нивелирования точкой, а точка В – «передней». В точках устанавливаются нивелирные рейки. Нивелир устанавливается между рейками на станции, равноудаленной от обеих реек. Расстояние от станции до реек определяется шагами.

Измерения на станции выполняют в следующей последовательности.

1. Устанавливают нивелир в рабочее положение с помощью установочного (круглого) уровня.
2. Наводят зрительную трубу на черную сторону задней рейки, приводят пузырек цилиндрического уровня точно на середину при помощи элевационного винта, как показано на рис. 15,

фокусируют зрительную трубу и снимают отсчеты по верхней (или нижней) дальномерной и средней нити сетки зрительной трубы. Отсчеты записывают в журнал (табл. 10 отсчеты (1) и (2)).

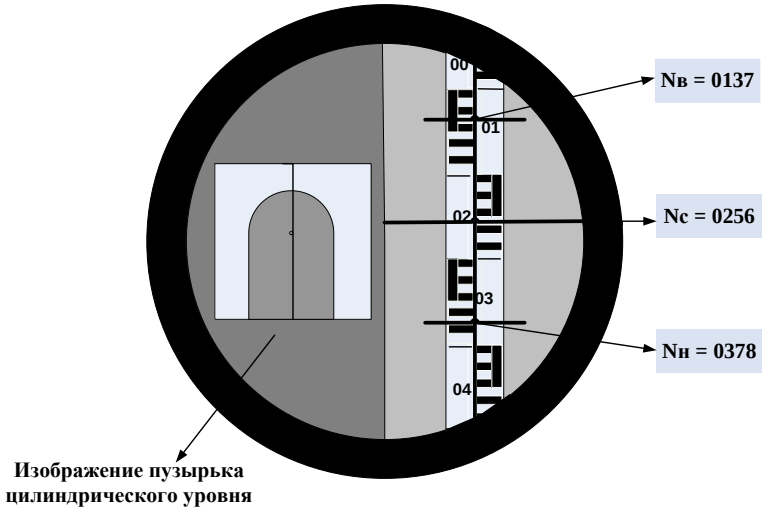


Рис. 15 Поле зрения нивелира

3. Наводят зрительную трубу на черную сторону передней рейки, приводят пузырек цилиндрического уровня точно на середину при помощи элевационного винта, как показано на рис. 15 и снимают отсчеты по верхней (или нижней) дальномерной и средней нити сетки зрительной трубы. Отсчеты записывают в журнал (табл. 10, отсчеты (3) и (4)).
4. Наводят зрительную трубу на красную сторону передней рейки и делают отсчет по среднему штриху сетки (табл. 10, отсчет (5))
5. Наводят зрительную трубу на красную сторону задней рейки и делают отсчет по среднему штриху сетки (табл. 10, отсчет (6)).

6. Вычисляют превышение по черной стороне рейки, используя отсчеты (1) и (4), затем вычисляют превышение по красной стороне рейки, используя отсчеты (5) и (6).
7. Сравнивают значения превышения на станции, определенных по черным и красным сторонам реек, расхождение в превышениях допускают до 5 мм с учетом разности высот нулей пары реек. При большем расхождении наблюдения на станции повторяют, предварительно изменив положение нивелира по высоте не менее чем на 3 см.
8. Вычисляют длины плеч на станции до задней рейки – разность отсчетов (2) и (1) и передней рейки – разность отсчетов (4) и (3).

2.3.2 Последовательность выполнения работы

Работа выполняется бригадой студентов из 3 человек. Перед началом работы студенты получают нивелир, штатив, две рейки, подставку для установки прибора, бланки журналов.

Для выполнения поверок прибор и рейки устанавливают, как показано на рис. 10,11.

Выполняют визуальный осмотр прибора и приемочные поверки по программе, описанной выше, результаты измерений, вычисления и результаты заносят в журнал (табл.10).

Устанавливают прибор как показано на рис. 14 и измеряют превышение АВ методом «из середины». Результаты измерений, вычисления и результаты заносят в журнал (табл. 10).

С помощью штатива изменяют высоту прибора, приводят его в рабочее положение и определяют превышение ВА.

Бланк журнала оформляют и сдают на проверку.

Таблица 10

Образец заполнения журнала по результатам лабораторной работы

Дата: 15 октября 2009 г
Состав бригады: Малышев Иван (ЗК-05)
Крюкова Мария (ЗК-05)
Латыпов Альберт (ЗК-05)

Номера штатива и реек	Дальномерные расстояния до задней и передней реек	Отсчеты по рейке		Превышение	Среднее превышение
		задняя	передняя		
- комплектность прибора: *полный комплект* - исправность всех винтов: *винты в исправном состоянии* - исправность сетки нитей и чистоты поля зрения трубы: *сетка нитей четкая, поле зрения чистое* *Ось круглого уровня должна быть параллельна вертикальной оси.* Результат: *Пузырек отклонился на 1 деление – условие выполняется* *Визирная ось должна быть параллельна оси цилиндрического уровня.* Результат:					
i1=	1302	a'_1=	1327		
i2=	1507	a'_2=	1476		
∑=	2809	∑=	2803	S=	65 м
$x = \frac{2803}{2} - \frac{2809}{2} = 1401.5 - 1404.5 = -3мм$ $\tau = \frac{-3 \cdot 20626''}{65000} = -9.5''$ *Условие выполняется.*					
Определение превышения АВ					
1 / A – B	(2)-(1) 119	0137 (1)	0274(3)		
	(4)-(3) 125	0256 (2)	0399 (4)	(2)-(4) -143	-144
		5040(5)	5085(6)	(5)-(6) -45	
Определение превышения ВА					
1 / B – A	129	0342	0203		
	121	0471	0324	+147	+148
		5156	5107	+49	

2.2. Лабораторная работа №3. Линейные измерения

Линейные измерения (измерения длин) при производстве геодезических работ могут выполняться как непосредственно (лентами и рулетками), так и косвенно (дальномерами).

Лабораторная работа состоит из двух частей. Первая часть работы посвящена технологии измерения длин линий светодальномером. Во второй части студенты выполняют измерение длины линии нитяным дальномером.

2.2.1. Светодальномер СТ5 «Блеск»

Светодальномер СТ5 предназначен для измерения расстояний при создании геодезических сетей сгущения 4 класса, 1 и 2 разряда и сетей съемочного геодезического обоснования.

Основные технические характеристики:

Диапазон измеряемых расстояний – до 5 км.

Увеличение зрительной трубы – 12 крат.

Угол поля зрения – 3º.

Цена единицы младшего разряда цифрового табло – 1 мм.

Напряжение источника питания - 6 – 8 вольт.

Источник излучения – лазерный диод – 0.86 мкм.

Средняя квадратическая погрешность измерения расстояния –

$(10+5\cdot10^{-6}$ D км) мм.

Общий вид светодальномера СТ5 представлен на рис. 6*а*, однопризменного отражателя на рис. 6*б.*

а *б*

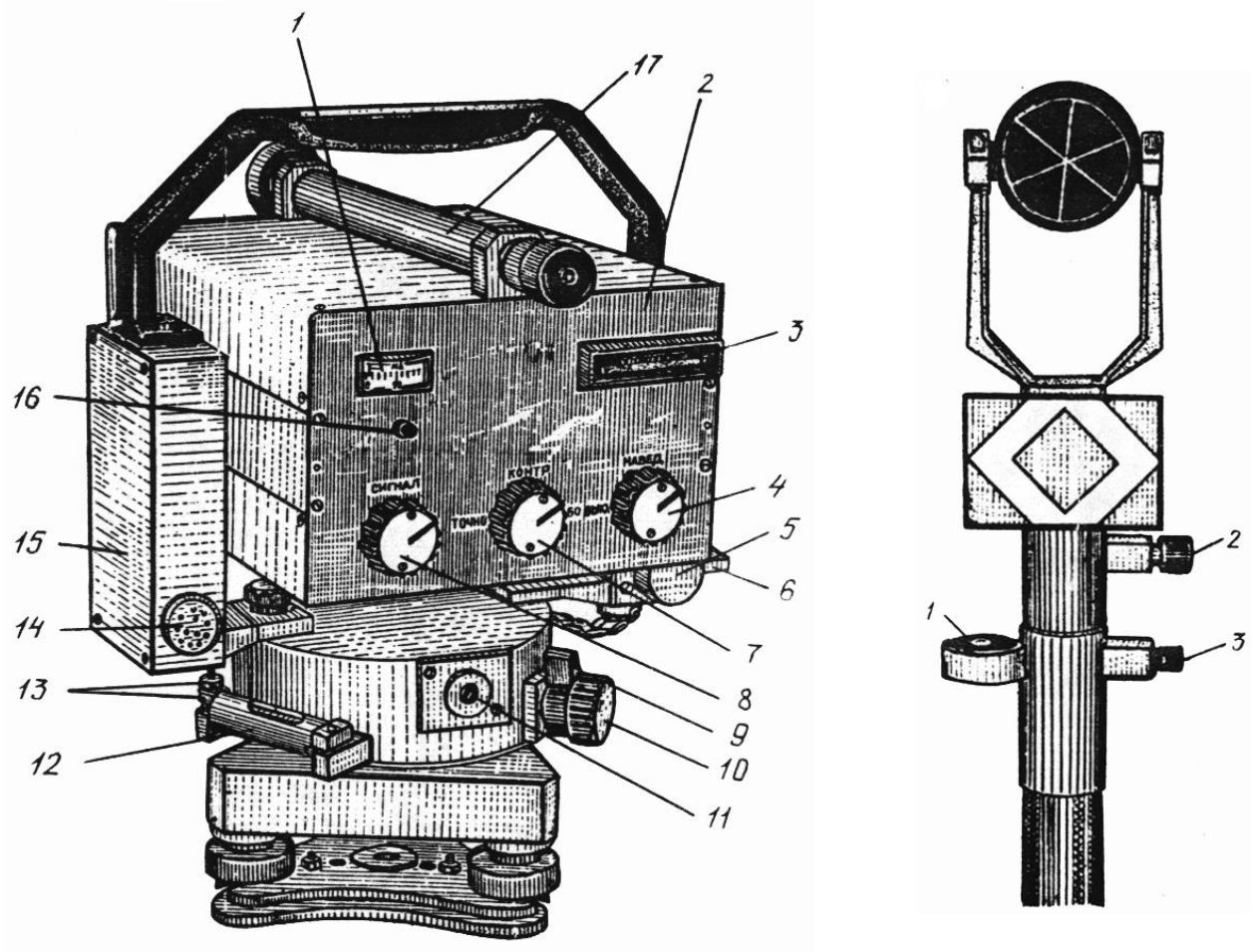


Рис. 6.

а – Светодальномер «Блеск» СТ5: *1* – стрелочный прибор; *2* – лицевая панель; *3* – цифровое табло; *4* – переключатель ВЫКЛ-НАВЕД-СЧЕТ; *5, 10* – головки винтов наводящих устройств; *6, 9* – рукоятки закрепительных устройств; *7* – переключатель ТОЧНО-КОНТРОЛЬ-ГРУБО; *8* – ручка СИГНАЛ; *11* – окуляр оптического центрира; *12* – цилиндрический уровень; *13* – юстировочные винты уровня; *14* – микротелефон; *15* – крышка; *16* – ручка установки контрольного отсчёта; *17* – зрительная труба.

б – призменный отражатель: *1* – круглый уровень; *2, 3* – закрепительные винты.

Рабочие поверки светодальномера СТ5 производят в следующем порядке:

1. *Напряжение аккумуляторных батарей должно быть достаточным.*

Переключатель 7 устанавливают в положение «КОНТР». Если на стрелочном приборе 1 показание равно 60 МКА и более – условие выполнено.

2. *Контрольный отсчет на цифровом табло 3 должен соответствовать паспортному значению.*

На объектив прибора надевают блок контрольного отсчета, переключатели 7 и 4 устанавливают в положения «ТОЧНО» и «СЧЕТ». Уровень сигнала устанавливают переключателем в положение стрелки на индикаторе 1 более 50мА. В этом положении контрольный отсчет на табло не должен отличаться от паспортного более чем на 3мм. Юстировка производиться вращением переключателя 16.

3. *Индикаторы табло должны функционировать нормально.*

В режиме «СЧЕТ», «ТОЧНО» на всех индикаторах табло 3 должна высвечиваться цифра 8.

4. *Схема измерения температуры кварцевого генератора должна функционировать нормально.*

В режиме «СЧЕТ», «Контроль» берут несколько отсчетов по табло 3. Каждый последующий отсчет не должен отличаться от предыдущего более чем на 5 единиц.

5. *Визирная ось зрительной трубы должна быть параллельна оси приемо-передающей системы светодальномера.*

Включить светодальномер в режим «НАВЕДЕНИЕ», навести прибор на отражатель и уточнить наведение по максимуму сигнала после чего оценить несовпадение центра окружности сетки нитей зрительной трубы с центром призмы отражателя. Если несовпадение превысит половину окружности, положение сетки нитей зрительной трубы регулируют с помощью исправительных винтов.

Измерение расстояний светодальномером СТ5

1. Приемопередатчик и отражатель устанавливают на концах измеряемой линии на штативах, центрируют, горизонтируют и взаимно ориентируют с помощью зрительной трубы светодальномера и разворота отражателя по направлению светодальномера. В режиме «КОНТРОЛЬ» (7) проверяют напряжение источника питания по стрелочному прибору (1). Показания прибора должны быть более 70 делений.

2. Устанавливают переключатель (7) в положение «ТОЧНО», а (4) в положение «НАВЕДЕНИЕ». Изменяя ориентирование светодальномера по азимуту и высоте наводящими винтами (5), (10), добиваются максимального отклонения стрелки стрелочного прибора, фиксируемое звуковым сигналом. Ручкой (8) устанавливают уровень сигнала в середине рабочей зоны.

3. Устанавливают переключатель (4) в положение «СЧЕТ» и после звукового сигнала берут три отсчета по табло в режиме «ТОЧНО». Затем дважды повторяют наведение светодальномера на отражатель и снова выполняют по три отсчета. Расхождение средних значений между наведениями не должно превышать 3 мм. В журнал измерений (табл. 6) записывают также метеоданные (атмосферное давление и температуру воздуха). По окончании измерений переключатели (7) и (4) переводят в положение «КОНТРОЛЬ» и «СЧЕТ» и по табло берут отсчет для определения поправки Kf за температурное изменение частоты генератора.

Таблица 9

Журнал измерения линий светодальномером СТ5

Измеренная линия — линия 2 –3

Дата 24. 06. 05 г. — малооблачно, слаб. ветер

<table>
<tr><td>Дистанция точно</td><td>Контрольный отсчет</td><td colspan="2">Результаты</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1. 467.030
.028
.029
Ср. 467.029</td><td rowspan="4">102
103
102</td><td>T^0, С</td><td>26.2</td></tr>
<tr><td>P мм рт. ст.</td><td>738 5</td></tr>
<tr><td>$K_n + K_f$</td><td>+1.36</td></tr>
<tr><td>$\Delta D_{t,p,f}$</td><td>+0.006</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. 467.026
.029
.029
.027
Ср.467.028</td><td rowspan="3">Контроль
для K_f</td><td>$\Delta D_Ц$</td><td>-0.003</td></tr>
<tr><td>$D_{ср}$</td><td>467.029</td></tr>
<tr><td>$\sum \Delta D$</td><td>+0.003</td></tr>
<tr><td>$D_И$</td><td>467.032</td></tr>
<tr><td>077</td><td rowspan="3">H
i
$\sum_1$</td><td rowspan="3">174.284
1.095
175.379</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3. 467.029
.030
.030
Ср. 467.030</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>H_0
i_0
$\sum_2$</td><td>167.187
1.480
168.667</td></tr>
<tr><td colspan="2">$h = \sum_1 - \sum_2 - 6.712$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$D_{ср}$ = 467.029</td><td>$\Delta D_Г$</td><td>0.048</td></tr>
<tr><td>D</td><td>466.984</td></tr>
</table>

Вычисление длин линий производят по формуле

$$D_{И} = D_{ср} + \Delta D_{t,\,p,\,f} + \Delta D_{Ц}, \qquad (15)$$

где $D_{И}$ – измеренное значение длины линии;

$D_{ср}$ – среднее значение линии из приемов, м;

$\Delta D_{t,\,p,\,f} = D_{ср}\,(K_{П} + K_{f})\ 10^{-5}$ мм, - поправка за влияние метеоусловий и изменение частоты;

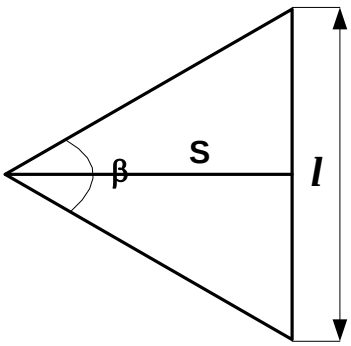
$K_{П}$ – коэффициент, учитывающий температуру и давление при измерениях (определяется по таблице в паспорте прибора);

K_{f} – коэффициент, учитывающей температурное изменение частоты кварцевого генератора;

$\Delta D_{Ц}$ – циклическая поправка.

Коэффициенты $K_{П}$ и K_{f} и поправку $\Delta D_{Ц}$ определяют по таблице или по монограмме и графику, которые приведены в паспорте светодальномера. Приведенная методика измерений применяется при измерении сторон полигонометрии, при измерении расстояний с целью создания съемочного обоснования поправки $\Delta D_{t,\,p,\,f}$ и $\Delta D_{Ц}$ могут не учитываться.

2.2.2. Нитяный дальномер



Нитяный дальномер относится к типу оптических дальномеров с постоянным углом β, называемым диастимометрическим углом. В основу определения расстояния дальномерами этого типа заложено решение равнобедренного треугольника. В этом треугольнике диастимометрический угол постоянен, а в зависимости от расстояния S изменяется дальномерный отчет l.

Расстояние S можно определить из выражения:

$$S = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = l \cdot C, \qquad (15)$$

где $C = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ - постоянная дальномера.

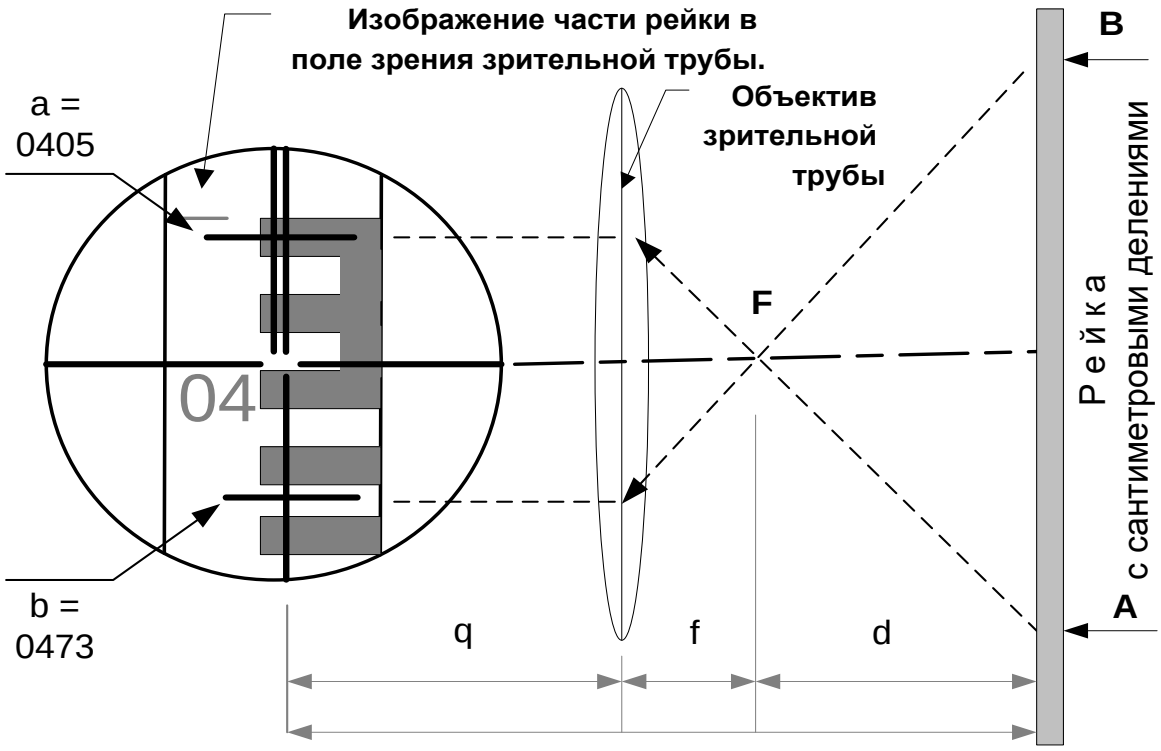


Рис. 7. Принцип определения расстояния нитяным дальномером

Нитяный дальномер представляет собой две дальномерные нити сетки нитей зрительной трубы геодезического прибора (теодолита или нивелира), с помощью которых определяется дальномерный отсчет l. Отчеты снимают по вертикально стоящей рейке, изображение которой видно в поле зрения трубы геодезического прибора (рис.7). Отсчет по верхней дальномерной нити -

a = 0405 мм, по нижней дальномерной нити – b = 0473 мм. Дальномерный отсчет (АВ) представляет собой расстояние на рейке, которое вычисляется, как разность отсчетов по дальномерным нитям

$$l = b - a = 0472 - 0405 = 67\text{мм}.$$

Определяемое расстояние S представляется как сумма отрезков:

$$S = q + f + d, \tag{16}$$

где

$$d = l \cdot C,\ q + f = c. \tag{17}$$

Тогда

$$S = l \cdot C + c. \tag{18}$$

В геодезических приборах значение C, как правило равно 100, а c конструкцией прибора сводится к незначимой величине и приравнивается к нулю. В нашем примере:

$$S = 67\text{мм} \cdot 100 = 6700\text{мм} = 6.7\text{м}.$$

Нетрудно заметить, что дальномерный отсчет на рейке равный 1 см соответствует 1 метру измеренного расстояния на местности. Этим фактом удобно воспользоваться при измерения расстояния с помощью теодолита. Для измерения расстояния верхнюю дальномерную нить устанавливают на целый отсчет (рис.8 – отсчет 1500). Расстояние между дальномерными нитями составляет два дециметра семь сантиметров или 27 см, что на местности соответствует 27 метрам.

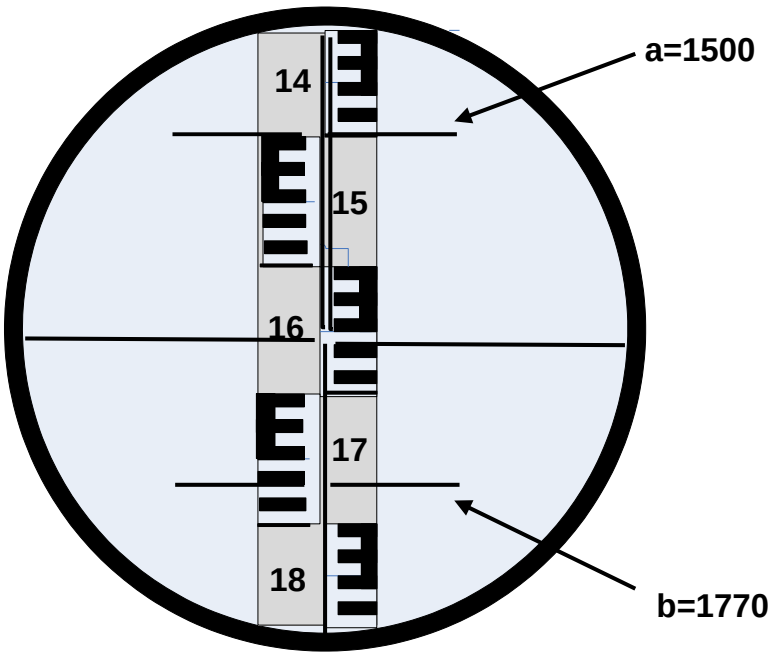


Рис.8 Поле зрения теодолита

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. Проректора по учебно-методическому комплексу _____ В.В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практико-ориентированных заданий (часть 2)

Б1.О.21 ГЕОДЕЗИЯ

Направление подготовки:
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль):
«Кадастр недвижимости»

форма обучения: очная, заочная

Автор: Акулова Е.А.

Одобрена на заседании кафедры

Геодезии и кадастров
(название кафедры)

Зав.кафедрой _____
(подпись)

Акулова Е.А.
(Фамилия И.О.)

Протокол № 1 от 9.09.2024
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета

Горно-технологического
(название факультета)

Председатель _____
(подпись)

Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)

Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)

Екатеринбург

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЫСОТ ПУНКТОВ СЪЕМОЧНОГО ОБОСНОВАНИЯ ...…….. 4

1. Вычисление горизонтальных проложений длин, измеренных в теодолитном ходе ……. 9

2. Вычисление отметок точек теодолитного хода по результатам геометрического нивелирования ……. 11

3. Вычисление отметок точек тахеометрического хода по результатам тригонометрического нивелирования ……..... 15

4. Вычисление координат пунктов замкнутого теодолитного хода ….. 20

5. Вычисление координат пунктов разомкнутого тахеометрического хода …..... 35

6. Составление каталога координат и высот пунктов съемочного обоснования……. 40

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. ПОСТРОЕНИЕ ТОПОГРАФИЧЕСКОГО ПЛАНА ……... 44

1. Построение координатной сетки и ее оцифровка ……... 46

2. Нанесение на план пикетных точек……... 52

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ…….. 65

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЫСОТ ПУНКТОВ СЪЕМОЧНОГО ОБОСНОВАНИЯ

Результатом данной лабораторной работы является каталог координат и высот пунктов съемочного обоснования. Для выполнения работы студентам предлагается:

- схема планово-высотного съемочного обоснования (рис. 1);
- координаты и высоты исходных пунктов (табл. 1);
- значения измеренных горизонтальных примычных углов (табл. 1);
- значения измеренных горизонтальных (левых по ходу) углов и длин линий (табл. 2 – 4);
- значения измеренных геометрическим нивелированием превышений (табл.2, 3);
- значения измеренных вертикальных углов (табл. 4).

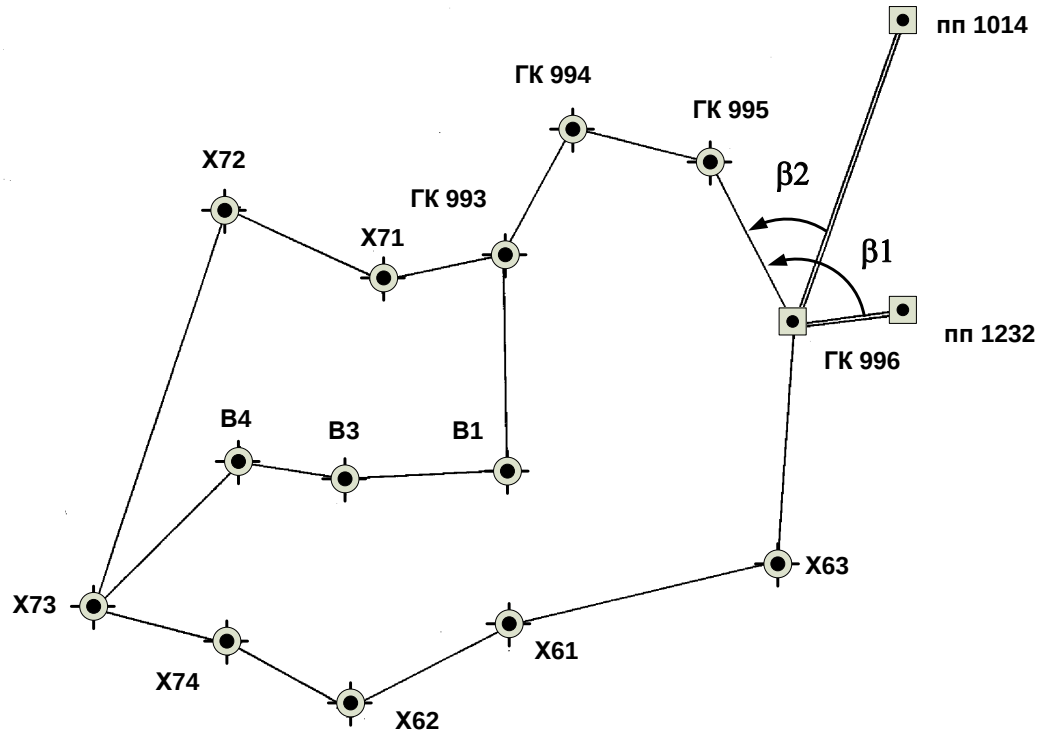


Рис. 1. Схема планово-высотного съемочного обоснования

Таблица 1

Координаты и высоты исходных пунктов

ГК 996: *X* = 33 247,590 м,

$У$ = 44 289,528 м

пп 1232			β_{X72}	β_{B3}	**пп 1014**		***H*ГК 996, м**
Номер вар.	***X*, м**	***У*, м**	**′**	**′ ″**	***X*, м**	***У*, м**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	**33 259,005**	**44 378,760**	**02**	**48 00**	**33 489,720**	**44 375,769**	**275,340**
1	33 271,737	44 375,916	12	47 00	33 589,750	44 357,769	184,344
2	33 264,233	44 377,664	14	47 02	33 494,462	44 361,129	172,155
3	33 277,402	44 374,134	16	47 04	33 502,488	44 322,996	175,261
4	33 162,942	44 319,711	18	47 06	33 215,782	44 538.650	177,335
5	33 178,681	44 347,087	20	47 08	33 305,912	44 541.677	179,201
6	33 198,146	44 364,410	22	47 10	33 375,236	44 513.456	181,373
7	33 202,327	44 367,001	24	47 12	33 387,246	44 506.146	183,902
8	33 211,132	44 371,498	26	47 14	33 410,094	44 488,515	184,105
9	33 217,975	44 374,203	28	47 16	33 425,835	44 474,568	186,205
10	33 229,407	44 377,360	30	47 18	33 448,663	44 449,511	188,105
11	33 248,363	44 379,214	32	47 20	33 477,894	44 403,587	190,309
12	33 257,090	44 378,714	34	47 22	33 487,903	44 380,694	192,667
13	33 282,249	44 372,272	36	47 24	33 504,010	44 308,234	194,772
14	33 292,365	44 367,283	38	47 26	33 504,369	44 275,997	196,201
15	33 295,976	44 365,096	40	47 28	33 503,464	44 263,964	198,413
16	33 299,991	44 362,379	42	47 30	33 501,729	44 250,216	200,808
17	33 304,473	44 358,950	44	47 32	33 498,782	44 234,360	300,010
18	33 308,037	44 355,882	46	47 34	33 495,570	44 221,308	298,230
19	33 311,608	44 352,459	48	47 36	33 491,459	44 207,779	296,506
20	33 317,078	44 346,390	50	47 38	33 483,061	44 185,989	294,111
21	33 473,900	44 167,213	52	47 40	33 240.849	44 031.272	292,055
22	33 325,252	44 334,658	54	47 42	33 463.724	44 149.784	290,815
23	33 327,379	44 330,807	56	47 44	33 456.657	44 138.584	288,012
24	33 329,348	44 326,785	58	47 46	33 448.949	44 128.802	286,908
25	33 330,991	44 322,975	59	47 48	33 441.739	44 119.345	284,802
26	33 332,506	44 318,955	06	47 50	33 433.074	44 110.194	282,303
27	33 334,098	44 313,937	08	47 52	33 422.34	44 099.648	280,112
28	33 335,791	44 306,956	10	47 54	33 406.733	44 086.306	278,334
29	33 336,859	44 300,377	04	47 56	33 391.344	44 075.078	276,222
30	33 337,518	44 291,615	11	47 58	33 369.864	44 062.066	274,009

Значения горизонтальных примычных углов

β1=	**110°**	**02′**	**03″**
β2=	**46°**	**55′**	**42″**

Таблица 2

Значения измеренных горизонтальных (левых по ходу) углов и длин линий

Название пунктов	**Измеренный горизонтальный угол**			**Измеренное расстояние, м**	**Измеренное превышение, м**
	°	'	''		
ГК 996					
				149,676	-15,575
ГК 995	131	37	36		
				116,743	-1,377
ГК 994	104	31	06		
				117,039	+6,784
ГК 993	229	09	24		
				101,200	***-4,172***
Х71	216	59	34		
				140,365	***+0,609***
Х72	83	33	***02***		
				343,555	-20,429
Х73	86	02	02		
				116,596	+25,677
Х74	194	08	50		
				111,491	***+3,208***
Х62	124	19	12		
				152,507	***+33,744***
Х61	193	56	06		
				225,041	+2,453
Х63	107	03	33		
				195,024	-30,875
ГК 996	148	38	36		
ГК 995					

Примечание. Значения, выделенные курсивом, вписываются в зависимости от номера варианта из таблицы 3.

Таблица 3

Варианты заданий (длин и превышений)

Номер вар.	*h*, м	*S*, м	*h*, м	*S*, м	*h*, м	*S*, м	*h*, м	*S*, м
	ГК 993-Х71		Х71-Х72		Х74-Х62		Х62-Х61	
0	-4,172	101,200	+0,609	140,365	+3,208	111,491	+33,744	152,507
1	- 5,795	101,300	+2,230	140,382	+ 2,539	111,473	+ 34,411	152,660
2	- 4,840	101,250	+1,275	140,370	+ 3,432	111,497	+ 33,518	152,456
3	- 2,810	101,173	- 0,755	140,366	+ 4,430	111,532	+ 32,520	152,234
4	- 0,902	101,138	- 2,663	140,389	+ 6,722	111,647	+ 30,228	151,750
5	+ 1,209	101,141	- 4,774	140,445	+ 8,663	111,780	+ 28,287	151,368
6	+ 3,298	101,188	- 6,863	140,532	+ 10,832	111,970	+ 26,118	150,972
7	+ 5,152	101,265	- 8,717	140,635	+ 12,528	112,148	+ 24,422	150,683
8	+ 7,537	101,415	- 11,102	140,803	+ 14,776	112,423	+ 22,174	150,331
9	+ 9,447	101,575	- 13,012	140,967	+ 26,681	114,637	+ 10,269	149,032
10	+ 10,875	101,718	- 14,440	141,107	+ 28,539	115,098	+ 8,411	148,916
11	+ 13,464	102,030	- 17,029	141,397	+ 30,479	115,611	+ 6,471	148,819
12	+ 15,186	102,274	- 18,751	141,617	+ 32,832	116,280	+ 4,118	148,735
13	+ 17,449	102,639	- 21,014	141,938	+ 34,831	116,887	+ 2,119	148,693
14	+ 19,196	102,955	- 22,761	142,210	+ 36,828	117,528	+ 0,122	148,678
15	+ 21,205	103,557	- 24,770	142,550	+ 38,822	118,205	- 1,972	148,689
16	- 0,835	101,138	- 2,730	140,391	+ 23,631	113,949	+ 13,319	149,274
17	- 2,801	101,173	- 0,764	140,366	+ 21,871	113,588	+ 15,079	149,442
18	- 5,155	101,265	+ 1,590	140,373	+ 19,476	113,146	+ 17,474	149,705
19	- 6,553	101,346	+ 2,988	140,396	+ 17,871	112,878	+ 19,079	149,902
20	- 8,715	101,510	+ 5,150	140,458	+15,208	112,481	+ 21,742	150,267
21	- 10,553	101,685	+ 6,988	140,538	+ 13,828	112,302	+ 23,122	150,476
22	- 12,859	101,952	+ 9,294	140,672	+ 12,172	112,109	+ 24,778	150,742
23	- 14,512	102,176	+ 10,947	140,791	+ 9,572	111,855	+ 27,378	151,198
24	- 16,206	102,433	+ 12,641	140,933	+ 7,506	111,697	+ 29,444	151,593
25	- 18,161	102,765	+ 14,596	141,123	+ 5,818	111,596	+ 31,132	151,937
26	- 20,495	103,211	+ 16,930	141,385	+ 4,170	111,522	+ 32,780	152,291
27	- 22,605	103,661	+ 19,004	141,655	+ 1,715	111,457	+ 35,235	152,852
28	- 25,155	104,263	+ 21,590	142,024	+ 0,127	111,444	+ 36,823	153,237
29	- 26,461	104,596	+ 22,896	142,231	- 2,494	111,472	+ 39,444	153,909
30	- 28,652	105,193	+ 25,087	142,605	- 4,821	111,548	+41,771	154,545

Таблица 4

Результаты измерений в диагональном ходе

Название пунктов	Измеренный горизонтальный угол			Горизонтальное проложение, м	Измеренный вертикальный угол			
	°	'	"			°	′	Направление
ГК 994								
ГК 993	150	09	12		+	*11*	*30*	*Прямой*
				175,612	-	*11*	*29*	*Обратный*
В1	268	16	18		-	*10*	*43*	*Прямой*
				133,762	+	*10*	*44*	*Обратный*
В3	191	***48***	***00***		-	*14*	*10*	*Прямой*
				85,882	+	*14*	*11*	*Обратный*
В4	126	19	31		-	*4*	*16*	*Прямой*
				168,461	+	*4*	*15*	*Обратный*
Х73	59	13	28					
Х74								

Примечание. Значение, выделенное курсивом, вписываются в зависимости от номера варианта из таблицы 1.

Планово-высотное съемочное обоснование представлено замкнутым теодолитным ходом (полигоном), включающим в себя исходный пункт полигонометрии 2-го разряда (ГК 996). С этого пункта произведена угловая привязка на исходные пункты полигонометрии пп 1232 и пп 1014 (измерены примычные углы β1, β2). Схема хода и привязки показаны на рис. 1. В ходе измерены левые по ходу лежащие углы и длины сторон. Координаты исходных пунктов пп 1232 и пп 1014 студенты выбирают по варианту из таблицы 1. Значения координат исходного пункта ГК 996 и примычных углов β1, β2 для всех вариантов одинаковые. По точкам теодолитного хода для получения высот пунктов проложен ход геометрического нивелирования технической точности. Данные результатов измерений представлены в табл. 2 и 3.

С целью сгущения планово-высотного съемочного обоснования проложен тахеометрический разомкнутый диагональный ход, опирающийся на стороны теодолитного хода ГК 994-ГК 993 и Х73-Х74, в котором измерены горизонтальные левые по ходу лежащие углы, длины сторон (в табл. 4 даны горизонтальные проложения измеренных длин), прямые и обратные вертикальные углы (см. табл. 4).

В качестве примера вычисления проведены для «0» варианта.

Работу следует выполнять в следующей последовательности:

– вычисление горизонтальных проложений длин, измеренных в теодолитном ходе;

– вычисление отметок точек теодолитного хода по результатам геометрического нивелирования;

– вычисление отметок точек тахеометрического хода по результатам тригонометрического нивелирования;

– вычисление координат точек теодолитного хода;

– вычисление координат точек тахеометрического хода;

– составление каталога координат и высот пунктов съемочного обоснования.

1. Вычисление горизонтальных проложений длин, измеренных в теодолитном ходе

Вычисление удобно производить в табл. 5.

В столбцы 1 – 3 выписывают названия пунктов, измеренные превышения и измеренные длины соответственно.

Таблица 5

Вычисление горизонтальных проложений измеренных длин линий и высот пунктов съемочного обоснования

Название точки	h **измер., м**	S **измер., м**	ΔS_h, **м**	D, **м**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
ГК 996				
	- 15,575	149,676	- 0,810	148,866
ГК 995				
	- 1,377	116,743	- 0,008	116,735
ГК 994				
	+ 6,784	117,039	- 0,197	116,842
ГК 993				
	- 4,172	101,220	- 0,086	101,134
Х71				
	+ 0,609	140,365	- 0,001	140,364
Х72				
	- 20,429	343,555	- 0,607	342,948
Х73				
	+ 25,677	116,596	- 2,827	113,769
Х74				
	+ 3,208	11,491	- 0,046	111,445
Х62				
	+ 33,744	152,507	- 3,733	148,774
Х61				
	+ 2,453	225,041	- 0,013	225,028
Х63				
	- 30,875	195,024	- 2,444	192,580
ГК 996				

Вычисление горизонтального проложения D производится путем внесения поправки в измеренное расстояние по формуле (1):

$$D = S + \Delta S_h \,, \tag{1}$$

$$\Delta S_h = -\frac{h^2}{2 \cdot S} \,,$$

где D – горизонтальное проложение измеренной линии (записывается в столбец 5 табл. 5);

S – измеренное расстояние (столбец 3 табл. 5);

ΔS_h – поправка, вносимая при редуцировании на горизонтальную плоскость (столбец 4 табл. 5);

h – измеренное превышение (столбец 3 табл. 5).

Пример

Для измеренного расстояния ГК 996–ГК 995,

$$S = 149{,}676 \text{ м}, \; h = -15{,}575 \text{м},$$

$$\Delta S_h = -\frac{(-15{,}575)^2}{2 \cdot 149{,}676} = -\frac{242{,}581}{299{,}352} = -0{,}810 \text{ м},$$

$$D = 149{,}676 - 0{,}810 = 148{,}866 \text{ м}.$$

Вычисленное значение записывается в столбец 5 табл. 5.

2. Вычисление высот точек теодолитного хода по результатам геометрического нивелирования

Вследствие влияния различных факторов, измеренные превышения содержат ошибки. Поэтому перед вычислением отметок точек теодолитного хода необходимо выполнить уравнивание измеренных величин. Для этого необходимо вычислить невязку нивелирного хода, сравнить ее с допустимым значением. Если невязка не превышает допустимого значения, вычисляются поправки и вносятся в измеренные превышения.

Вычисления выполняются в таблице 6.

В столбцы 1 – 3 выписывают названия пунктов, измеренные превышения и измеренные длины соответственно.

В столбец 6 напротив названия исходной точки ГК 996 вписывают значение высотной отметки.

Таблица 6

Вычисление высот точек теодолитного хода по результатам геометрического нивелирования

Название точки	h **измер., м**	S **измер., м**	V_h**, м**	h **ур., м**	H**, м**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ГК 996					**275,340**
	- 15,575	149,676	- 0,004	- 15,579	
ГК 995					259,761
	- 1,377	116,743	- 0,003	- 1,380	
ГК 994					258,381
	+ 6,784	117,039	- 0,003	+ 6,781	
ГК 993					265,162
	- 4,172	101,220	- 0,003	- 4,175	
Х71					260,987
	+ 0,609	140,365	- 0,004	+ 0,605	
Х72					261,592
	- 20,429	343,555	- 0,009	- 20,438	
Х73					241,154
	+ 25,677	116,596	- 0,003	+ 25,674	
Х74					266,828
	+ 3,208	111,491	- 0,003	+ 3,205	
Х62					270,033
	+ 33,744	152,507	- 0,004	+ 33, 740	
Х61					303,773
	+ 2,453	225,041	- 0,006	+ 2,447	
Х63					306,220
	- 30,875	195,024	- 0,005	- 30,880	
ГК 996					**275,340** √
	$\sum h_{\text{изм}}$ = **-0,047 м**	$\sum S$ = **1769,257 м**	$\sum V$ = **-0.047 м**	$\sum h_{\text{ур.}}=0$	

$$f_h = \sum_1^n h_i - h_{\text{теор.}} = +0{,}047 - 0 = +0{,}047 \text{ м},$$

$$f_{h\,\text{доп}} = \pm 50\text{мм}\sqrt{\sum S(\text{км})} = \pm 50\sqrt{1{,}769} = \pm 66 \text{ мм} = \pm 0{,}066 \text{ м}$$

Невязка нивелирного хода вычисляется по формуле

$$f_h = \sum_1^n h_i - h_{\text{теор.}}, \qquad (2)$$

где f_h – невязка нивелирного хода;

$\sum_1^n h_i$ – сумма измеренных превышений;

n – количество превышений в ходе;

$h_{\text{теор.}}$ – теоретическое превышение, вычисляемое по формуле (3) по отметкам исходных точек.

$$h_{\text{теор.}} = H_{\text{к}} - H_{\text{н}}, \qquad (3)$$

где $H_{\text{к}}$ – отметка конечной исходной точки нивелирного хода;

$H_{\text{н}}$ – отметка начальной исходной точки нивелирного хода.

В нашем случае $H_{\text{к}} = H_{\text{н}} = H_{\text{ГК 996}} = 275{,}340$ м, поэтому

$$h_{\text{теор.}} = H_{\text{ГК996}} - H_{\text{ГК996}} = 0,$$

$\sum_1^{11} h_i = +0{,}047$ м (записывается в последнюю строку 2 столбца табл.6),

$$f_h = +0{,}047 \text{ м} - 0 \text{ м} = +0{,}047 \text{ м}.$$

Вычисленное значение записывают под таблицей 6.

Допустимое значение невязки нивелирного хода технической точности вычисляется по формуле (4) и записывают под таблицей 6:

$$f_{h\text{доп}} = \pm 50 \text{ мм} \sqrt{\sum S(\text{км})}, \qquad (4)$$

где $f_{h\text{доп}}$ – допустимое значение невязки.

$\sum S(\text{км})$ – длина хода в км (вычисляется по измеренным значениям длин сторон хода).

В нашем примере – $f_{h\,\text{доп}} = \pm 50 \text{ мм} \sqrt{1{,}769} = \pm 66 \text{ мм} = \pm 0{,}066 \text{ м}$.

Невязка хода геометрического нивелирования не превышает допустимого значения. Можно предположить, что ошибки измерений носят случайный характер, и можно приступать к вычислению поправок в измеренные превышения. Поправки вычисляют и вносят пропорционально длинам линий по формуле

$$V_i = \frac{(-f_h)}{\sum S} \cdot S_i, \qquad (5)$$

где V_i – вносимая в превышение поправка (вписывается в столбец 4 табл. 6);

$(-f_h)$ – невязка нивелирного хода, в формулу подставляется с обратным знаком;

$\sum S$, м – длина хода, м;

S_i – длина стороны хода, для которой вносится поправка в превышение.

Пример

Для стороны ГК 996 – ГК 995:

$$V = \frac{(-f_h)}{\sum S} \; S_{\text{ГК996}-\text{ГК995}} = \frac{-0{,}047}{1769{,}257} \; 149{,}676 = -0{,}004 \text{ м}.$$

Вычисленные поправки записывают в столбец 4 и производят контроль – вычисляют их сумму, которая должна быть равна невязке нивелирного хода, взятой с обратным знаком (сумма записывается в последней строке столбца 4 табл. 6).

Если контроль выполняется, приступают к внесению поправки и вычислению уравненных превышений по формуле

$$h_{i\ \text{ур.}} = h_{i\ \text{изм.}} + V_i, \qquad (6)$$

где $h_{i\ \text{ур.}}$ – уравненное значение превышения;

$h_{i\text{изм.}}$ – измеренное значение превышения;

V_i – вносимая поправка.

Для стороны ГК 996 – ГК 995:

$$h_{\text{ур.}} = -15{,}575 - 0{,}004 = -15{,}579\,\text{м}.$$

Значения уравненных превышений вписывают в столбец 5 табл. 6 и производят контроль. Для контроля вычисляют сумму уравненных превышений и сравнивают с теоретическим значением. В нашем случае сумма должна быть равна нулю.

На заключительном этапе вычисляются отметки пунктов теодолитного хода по формуле

$$H_i = H_{i-1} + h_{i-(i-1)}. \qquad (7)$$

Вычисления начинают от исходного пункта с заданной отметкой:

$$H_{\text{ГК 995}} = H_{\text{ГК 996}} + h_{\text{ГК 996–ГК 995}} = 275{,}340 + (-15{,}79) = 259{,}761\,\text{м},$$

$$H_{\text{ГК 994}} = H_{\text{ГК 995}} + h_{\text{ГК 995–ГК 994}} = 259{,}761 + (-1{,}380) = 258{,}381\,\text{м}.$$

Далее последовательно вычисляют отметки следующих по ходу точек.

Вычисленные значения вписывают в столбец 6 табл.6 и выполняют контроль, при котором вычисленное значение отметки конечного исходного пункта должно совпасть с его теоретическим значением. В случае совпадения значений делают отметку (ставят галочку).

3. Вычисление отметок точек тахеометрического хода по результатам тригонометрического нивелирования

Исходные данные для вычисления отметок точек тахеометрического хода представлены в таблице 4.

Тахеометрический ход опирается на пункты замкнутого теодолитного хода ГК 993 и Х73. Отметки этих точек, вычисленные в табл. 6, принимаются за исходные для вычисления отметок точек тахеометрического хода (точки В1, В3, В4).

Вычисления производятся в таблице 7.

Перед началом вычислений в столбцы 1 – 4 выписывают значения измеренных прямых и обратных вертикальных углов и горизонтальных проложений. В столбец 9 из таблицы 6 выписывают отметки точек теодолитного хода ГК 993 и Х73.

Вычисления превышений производят по формулам (8) тригонометрического нивелирования учитывая, что высота прибора на станции равна высоте визирования:

$$h_{\text{прямое}} = D_i \cdot \operatorname{tg}\nu_{\text{прямой}}, \qquad (8)$$

$$h_{\text{обратное}} = D_i \cdot \operatorname{tg}\nu_{\text{обратный}},$$

где $h_{\text{прямое}}$, $h_{\text{обратное}}$ – прямое и обратное превышения соответственно;

D_i – горизонтальное проложение стороны тахеометрического хода;

$\nu_{\text{прямой}}$, $\nu_{\text{обратный}}$ – прямые и обратные вертикальные углы соответственно.

Пример

Для стороны ГК 993 – В1:

$D_{\text{ГК 993–Х73}} = 175{,}612$ м, $\nu_{\text{прямой}} = +11^\circ 29' 41''$, $\nu_{\text{обраный}} = -11^\circ 29' 00''$,

$$h_{\text{прямое}} = D_i \cdot \operatorname{tg}\nu_{\text{прямой}} = 175{,}612 \cdot \operatorname{tg}(+11^\circ 29' 41'') = +35{,}712 \text{ м},$$

$$h_{\text{обратное}} = D_i \cdot \operatorname{tg}\nu_{\text{обратный}} = 175{,}612 \cdot \operatorname{tg}(-11^\circ 29' 00'') = -35{,}675 \text{ м}.$$

Таблица 7

Номер точки	**Вертикальные углы**		**Гор. прол. *D*, м**	**П р е в ы ш е н и я**				***H*, м**
	прямой	**обратный**		**прямое**	**обратное**	**среднее**	**исправ.**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
ГК 993						***-0,026***		**265,162**
	$+11^\circ 29' 41''$	$-11^\circ 29' 00''$	175,612	+ 35,712	- 35,675	+ 35,694	+ 35,668	
В1						***-0,020***		300,830
	$-10^\circ 43' 31''$	$+10^\circ 44' 38''$	133,762	- 25,336	+ 25,381	- 25,358	- 25,378	
В3						***-0,013***		275,452
	$-14^\circ 10' 02''$	$+14^\circ 11' 00''$	85,882	- 21,679	+ 21,705	- 21,692	- 21,705	
В4						***-0,025***		253,747
	$-4^\circ 16' 18''$	$+4^\circ 15' 22''$	168,461	- 12,583	+ 12,553	- 12,568	- 12,593	
Х73								**241,154**
$\sum$			***563,717***	***- 23,886***	***+ 23,964***	***- 23,924***		

$$f_h = \sum h_{\text{изм}} - \sum h_{\text{теор}} = -23{,}924 - (-24{,}008) = +0.084 \text{ м},$$

$$\sum h_{\text{теор}} = (H_{\text{Х73}} - H_{\text{ГК 993}}) = (241{,}154 - 265{,}162) = -24{,}008 \text{ м},$$

$$f_{\text{доп}} = \pm 0{,}04\, D_{\text{ср}} \sqrt{n} = \pm 0{,}04 \cdot 140{,}929 \sqrt{4} = \pm 11{,}2 \text{ см} = \pm 0{,}112 \text{ м}.$$

Полученные значения записывают в соответствующие ячейки таблицы 7.

Среднее значение превышения вычисляют по формуле

$$h_{\text{среднее}} = \frac{\left|h_{\text{прямое}}\right| + \left|h_{\text{обратное}}\right|}{2} = \frac{35{,}712 + 35{,}675}{2} = +35{,}694\ \text{м}, \qquad (9)$$

при этом усредняются абсолютные значения превышений, и вычисленному значению присваивается знак прямого превышения (см. табл. 7).

Вычисленные значения средних превышений подлежат уравниванию. Для этого необходимо вычислить невязку и сравнить ее с допустимым значением.

Вычисления производят по следующим формулам:

$$f_h = \sum h_{\text{изм}} - \sum h_{\text{теор}}, \qquad (10)$$

где f_h – невязка хода тригонометрического нивелирования;

$\sum h_{\text{изм}}$ – сумма всех измеренных в ходе превышений;

$$\sum h_{\text{теор.}} = H_{\text{к}} - H_{\text{н}}, \qquad (11)$$

где $H_{\text{к}}$ – отметка исходного пункта, расположенного в конце хода тригонометрического нивелирования;

$H_{\text{н}}$ – отметка исходного пункта, расположенного в начале хода тригонометрического нивелирования.

Пример

$$\sum h_{\text{изм}} = -23{,}924\ \text{м},$$

$$\sum h_{\text{теор}} = (H_{\text{Х73}} - H_{\text{ГК 993}}) = (241{,}154 - 265{,}162) = -24{,}008\ \text{м},$$

$$f_h = \sum h_{\text{изм}} - \sum h_{\text{теор}} = -23{,}924 - (-24{,}008) = +0{,}084\ \text{м}.$$

Согласно Инструкции по топографической съемке… [1], допустимое значение высотной невязки вычисляется по формуле

$$f_{\text{доп}} = \pm 0{,}04\, D_{\text{ср}} \sqrt{n}\,, \qquad (12)$$

где $D_{\text{ср}} = \dfrac{\sum D_i}{n}$ – средняя длина линии хода тригонометрического нивелирования;

n – количество сторон хода, i=1, …, n.

Пример

$$n=4; \qquad D_{\text{ср}} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{563{,}717}{4} = 140{,}929\,\text{м},$$

$$f_{\text{доп}} = \pm 0{,}04\, D_{\text{ср}} \sqrt{n} = \pm 0{,}04 \cdot 140{,}929 \cdot \sqrt{4} = \pm 11{,}2\,\text{см} = \pm 0{,}112\,\text{м}\,.$$

Если вычисленное значение высотной невязки не превосходит допустимого значения, можно приступать к вычислению поправок в измеренные превышения. Поскольку в случае измерения превышений речь идет о неравноточных измерениях, то поправки вычисляются пропорционально горизонтальным проложениям сторон хода по формуле (5).

Пример

Для стороны ГК993-В1:

$$V = \frac{(-f_h)}{\sum D_i} d_{\text{ГК 993–В1}} = \frac{-0{,}084}{563{,}717} \cdot 175{,}612 = -0{,}026\,\text{м},$$

значения вычисленных поправок вписывают над превышением в столбце 7 (см. табл. 7). Для контроля вычисляют сумму поправок и сравнивают ее с невязкой. Должно выполняться равенство: $\sum V_i = (-f_h)$.

Вычисление уравненных превышений и отметок точек хода тригонометрического нивелирования производят по формулам (6) и (7).

Пример

Для стороны ГК993 – В1:

$$h_{\text{урав}} = +35{,}694 + (-0{,}026) = +35{,}668\ \text{м},$$

$$H_{\text{В1}} = H_{\text{ГК993}} + h_{\text{урав}} = 265{,}162 + 35{,}668 = 300{,}830\ \text{м}.$$

Уравненные превышения и вычисленные отметки вычисляют с контролем (см. пункт 2) и записывают в табл. 7 в соответствующие ячейки.

4. Вычисление координат пунктов замкнутого теодолитного хода

Вычисление координат пунктов теодолитного хода производится по формулам прямой геодезической задачи. Для ее решения необходимо иметь координаты исходного пункта, дирекционный угол исходной стороны и данные геодезических измерений горизонтальных углов и длин линий. Исходные величины представлены в таблицах 1, 2 и 5.

В качестве исходного пункта в нашем примере принят пункт полигонометрии ГК996. Для вычисления исходного дирекционного угла теодолитного хода (направление ГК 996 – ГК 995) необходимо воспользоваться значениями примычных горизонтальных углов (см. табл. 1).

Исходные данные для вычислений выписывают в зависимости от варианта из таблицы 1– это координаты пунктов полигонометрии пп 1232 и пп 1014.

Пример

Для варианта № 0:

$X_{\text{пп1232}}$ = 33 259,005 м, $X_{\text{ГК 996}}$ = 33 247,590 м, $X_{\text{пп1014}}$= 33 489,720 м,

$У_{\text{пп1232}}$ = 44 378,760 м, $У_{\text{ГК 996}}$ = 44 289,528 м, $У_{\text{пп1014}}$ = 44 375,769 м.

Значения примычных углов: $\beta 1 = 110^\circ 02' 03''$, $\beta 2 = 46^\circ 55' 42''$ (см. рис. 2).

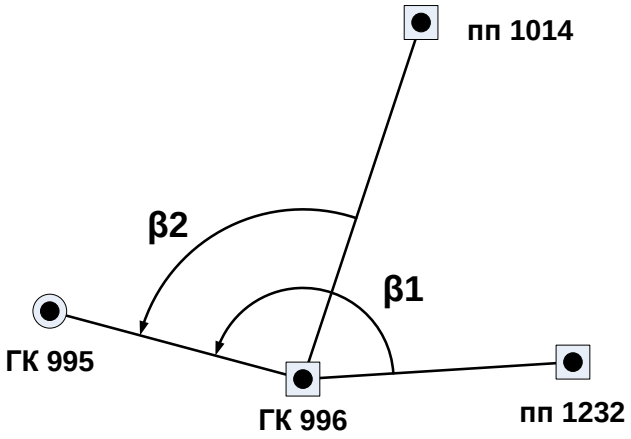


Рис. 2. Схема привязки

Исходный дирекционный угол $\alpha_{ГК\,996-ГК\,995}$ вычисляется дважды с контролем. Для вычисления используют исходные стороны ГК996 – пп 1232 и ГК996 – пп 1014. Расчеты производят по формулам:

$$\alpha_{ГК\,996-ГК\,995} = \alpha_{ГК\,996-пп\,1232} - \beta 1, \quad \alpha_{ГК\,996-ГК\,995} = \alpha_{ГК\,996-пп\,1014} - \beta 2 .$$

Для нахождения дирекционного угла исходной стороны ГК 996 – пп1232 решают обратную геодезическую задачу, для этого используют формулы:

$$r_{i-j} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{i-j}}{\Delta X_{i-j}} = \operatorname{arctg}\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}, \qquad (13)$$

$$d_{i-j} = \sqrt{\Delta Y^2 + \Delta X^2} = \sqrt{(Y_j - Y_i)^2 + (X_j - X_i)^2},$$

где r_{i-j} – значение румба направления;

d_{i-j} – горизонтальное проложение стороны хода, соответствующей направлению.

После нахождения значения румба необходимо определить координатную четверть, содержащую направление. Координатную четверть определяют по знакам приращений координат (см. рис. 3).

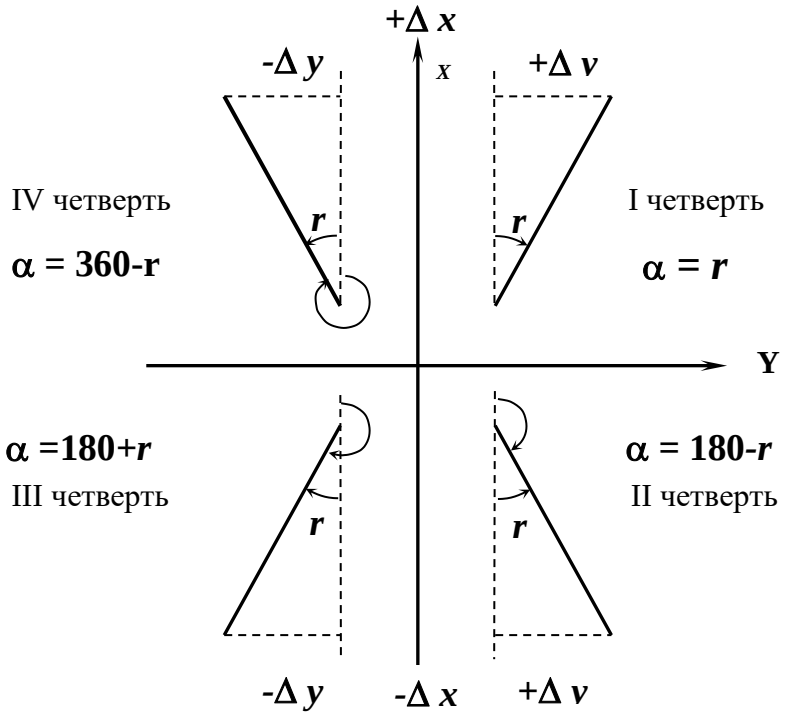


Рис 3. Зависимости между дирекционными углами и румбами

В нашем случае в первую очередь находим дирекционный угол $\alpha_{ГК996-пп\,1232}$:

$$r_{ГК\,996-пп1232} = \text{arctg}\frac{Y_{пп1232} - Y_{ГК996}}{X_{пп1232} - X_{ГК996}} = \text{arctg}\frac{44378{,}760 - 44289{,}528}{33259{,}005 - 33247{,}590} = \text{arctg}\frac{+89{,}232}{+11{,}415} =$$

$= 82^{\circ}{,}710034 = 82^{\circ}42'36''$(I четверть).

На основании зависимости дирекционного угла и румба в I координатной четверти $\alpha_{ГК\,996-пп\,1232} = 82^{\circ}42'36''$.

Аналогично находим дирекционный угол $\alpha_{ГК996-пп\,1014}$:

$$r_{ГК\,996-пп1014} = \text{arctg}\frac{Y_{пп1014} - Y_{ГК\,996}}{X_{пп1014} - X_{ГК\,996}} = \text{arctg}\frac{44375{,}769 - 44289{,}528}{33489{,}720 - 33247{,}590} = \text{arctg}\frac{+86{,}241}{+242{,}13} =$$

$= 19^{\circ}{,}604701 = 19^{\circ}36'17''$(I четверть),

$\alpha_{ГК\,996-пп\,1014} = 19^{\circ}36'17''$.

Используя вычисленные значения исходных дирекционных углов получаем значение дирекционного угла $\alpha_{ГК\,996-ГК\,995}$:

$$\alpha_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} = 82^\circ 42' 36'' - 110^\circ 02' 03'' = (82^\circ 42' 36'' + 360^\circ) - 110^\circ 02' 03'' =$$
$$= 442^\circ 42' 36'' - 110^\circ 02' 03'' = 332^\circ 40' 33'',$$

$$\alpha_{\text{ГК996}-\text{ГК995}} = 19^\circ 36' 17'' - 46^\circ 55' 42'' = -27^\circ 19' 25'' + 360^\circ = 332^\circ 40' 35''.$$

Среднее значение дирекционного угла примем за окончательный результат.

$\alpha^{\text{ср.}}_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} = 332^\circ 40' 34''$. Вычисленное значение записывают в таблицу 8 (столбец 5).

В столбцы 1, 2, 10 и 11 выписывают соответственно: название пунктов теодолитного хода, значения измеренных горизонтальных углов, координаты *X* и *Y* исходного пункта геодезической сети ГК 996. Необходимые сведения берут из таблиц 1 и 2.

В столбец 4 табл. 8 выписывают вычисленные в таблице 5 горизонтальные проложения сторон теодолитного хода.

Дальнейшие вычисления производят в следующей последовательности:

– уравнивание горизонтальных углов;

– вычисление дирекционных углов сторон теодолитного хода;

– вычисление приращений координат;

– уравнивание приращений координат;

– вычисление координат точек теодолитного хода.

Уравнивание горизонтальных углов включает в себя:

– вычисление угловой невязки хода и сравнение ее с допустимым значением;

– внесение поправок в измеренные значения горизонтальных углов в случае допустимого значения невязки;

– контроль вычислений.

Таблица 8

Вычисление координат точек съемочного обоснования (теодолитный ход)

Номер станции	Горизонтальные углы						Гор. прол., м.	Дирекционные углы			Приращения координат, м				Координаты, м	
	измеренные			исправленные							вычисленные		исправленные			
	°	′	″	°	′	″		°	′	″	ΔX	ΔY	ΔX	ΔY	***X***	***Y***
1	**2**			**3**			**4**	**5**			**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
ГК 996											*+0,006*	*-0,028*			**33247,590**	**44289,528**
			+5				148,866	**332**	**40**	**34**	+132,256	-68,332	+132,262	-68,360		
ГК 995	131	37	36	131	37	41					*+0,005*	*-0,022*			33379,852	44221,168
			+5				116,735	284	18	15	+28,842	-113,116	+28,847	-113,138		
ГК 994	104	31	06	104	31	11					*+0,005*	*-0,022*			33408,699	44108,030
			+5				116,842	208	49	26	-102,366	-56,332	-102,361	-56,354		
ГК 993	229	09	24	229	09	29					*+0,004*	*-0,019*			33306,338	44051,676
			+5				101,134	257	58	55	-21,058	-98,917	-21,054	-98,936		
Х71	216	59	34	216	59	39					*+0,006*	*-0,027*			33285,284	43952,740
			+5				140,364	294	58	34	+59,267	-127,238	+59,273	-127,265		
Х72	83	33	02	83	33	07					*+0,015*	*-0,066*			33344,557	43825,475
			+5				342,948	198	31	41	-325,172	-108,978	-325,156	-109,044		
Х73	86	02	02	86	02	07					*+0,005*	*-0,022*			33019,400	43716,431
			+5				113,769	104	33	48	-28,607	+110,137	-28,602	+110,115		
Х74	194	08	50	194	08	55									32990,798	43826,546

Окончание табл. 8

Номер станции	Горизонтальные углы						Гор. прол., м.	Дирекционные углы			Приращения координат, м				Координаты, м	
	измеренные			исправленные							вычисленные		исправленные			
	°	′	″	°	′	″		°	′	″	ΔX	ΔY	ΔX	ΔY	***X***	***Y***
											+0,005	*-0,022*				
			+6				111,445	118	42	43	-53,539	+97,742	-53,534	+97,720		
Х62	124	19	12	124	19	18					*+0,006*	*-0,028*			32937,264	43924,266
			+6				148,774	63	02	01	+67,464	+132,598	+67,470	+132,570		
Х61	193	56	06	193	56	12					*+0,010*	*-0,043*			33004,734	44056,836
			+6				225,028	76	58	13	+50,734	+219,234	+50,744	+219,191		
Х63	107	03	33	107	3	39					*+0,008*	*-0,037*			33055,478	44276,027
			+6				192,580	4	01	52	+192,104	+13,538	+192,112	+13,501		
ГК996	148	38	36	148	38	42									**33247,590**	**44289,528**
								332	40	34						
ГК995																
Σ	***1619***	***59***	***01***	***1620***	***00***	***00***	***1758,485***				***-0,075***	***+0,336***	***0***	***0***		

$$\sum \beta_{\text{изм.}} = 1619^\circ 59' 01''$$

$$\sum \beta_{\text{теор.}} = 180^\circ (n-2) = 180^\circ (11-2) = 1620^\circ,$$

$$f_\beta = \sum \beta_{\text{изм}} - \sum \beta_{\text{теор.}} = -59'',$$

$$f_\beta (\text{доп}) = \mp 1' \sqrt{n} = \pm 1' \sqrt{11} = \pm 3' 18'',$$

$$f_X = -0{,}075\text{м} \; ; \; f_Y = +0{,}336\,\text{м},$$

$$f_S = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2} = 0{,}344\text{м},$$

$$f_{\text{отн}} = \frac{f_S}{\sum d} = \frac{1}{\sum d : f_S} = \frac{1}{5112} < \frac{1}{2000}.$$

Угловую невязку замкнутого теодолитного хода вычисляют по формуле:

$$f_\beta = \sum\beta_{\text{изм.}} - \sum\beta_{\text{теор.}}, \qquad (14)$$

где f_β – угловая невязка хода;

$\sum\beta_{\text{изм.}}$ – сумма измеренных горизонтальных углов;

$\sum\beta_{\text{теор.}}$ – теоретическая сумма горизонтальных углов (истинное значение измеренной величины, в данном случае суммы углов).

Теоретическую сумму углов находят по известной в математике формуле суммы углов в многоугольнике:

$$\sum\beta_{\text{теор.}} = 180^o(n-2), \qquad (15)$$

где n – количество вершин теодолитного хода.

Пример

$\sum\beta_{\text{изм.}} = 1619^\circ 59' 01''$, $n=11$,

$\sum\beta_{\text{теор.}} = 180^\circ(n-2) - 180^\circ(11-2) = 180^\circ \cdot 9 = 1620^\circ$,

$f_\beta = \sum\beta_{\text{изм.}} - \sum\beta_{\text{теор.}} = 1619^\circ 59' 01'' - 1620^\circ = -0^\circ 00' 59''$.

Получена угловая невязка замкнутого теодолитного хода, равная пятидесяти девяти секундам со знаком «минус». Для сравнения вычисленной величины с допустимым значением необходимо рассчитать допустимую угловую невязку по формуле

$$f_{\beta(\text{доп.})} = \pm 1'\sqrt{n}. \qquad (16)$$

Для хода из 11 вершин $f_{\beta(\text{доп.})} = \pm 1'\sqrt{n} = \pm 1'\sqrt{11} = \pm 3' 18''$.

Угловая невязка хода не превышает допустимого значения. Выполнение данного условия дает право на вычисление поправки в измеренные горизонтальные углы. Вычисления производятся по формуле

$$\delta_\beta = \frac{(-f_\beta)}{n}, \qquad (17)$$

где δ_β – поправка в измеренный горизонтальный угол;

$(-f_\beta)$ – угловая невязка хода, взятая с «обратным знаком»;

n – количество вершин хода, на которых были измерены горизонтальные углы.

Пример

$$\delta_\beta = \frac{(-f_\beta)}{11} = \frac{-(-59'')}{11} = \frac{+59''}{11} = +5'',36.$$

Вычисленная поправка вносится в измеренные углы с точностью до $1''$. Другие словами, в 11-ть углов вносится поправка, равная $+5''$. В сумме внесенные поправки составят $+55''$, оставшиеся $4''$ распределяют случайным образом в четыре измеренных угла. В нашем случае в горизонтальные углы при вершинах Х62, Х61, Х63 и ГК 996 вносятся поправки, равные $6''$, а в остальные – $5''$. Значения вносимых поправок записывают над соответствующим разрядом (разрядом секунд) измеренного угла в столбце 2 таблицы 8.

Для контроля вычисляют сумму вносимых поправок, она должна быть равна значению невязки, взятой с обратным знаком.

Внесение поправки и вычисление исправленных горизонтальных углов производится по формуле

$$\beta_{испр} = \beta_{изм.} + \delta_\beta. \qquad (18)$$

Пример

Для горизонтального угла при вершине ГК 995:

$$\beta_{\text{испр}} = 131^\circ 37' 36'' + 0^\circ 00' 05'' = 131^\circ 37' 41''.$$

Вычисленные значения записывают в столбце 3 таблицы 8 напротив соответствующих вершин.

Для контроля вычисляют сумму исправленных горизонтальных углов и сравнивают ее с теоретическим значением. Суммы должны совпадать. В случае несовпадения сумм необходимо проверить все вычисления по уравниванию горизонтальных углов «во вторую руку».

Следует заметить, что пренебрежение необходимым контролем может привести к недопустимым ошибкам дальнейших вычислений, что в конечном итоге увеличит время на выполнения работы!!!

Вычисление дирекционных углов сторон теодолитного хода производится по формулам (19) «передачи дирекционного угла» с исходной стороны на определяемую.

$$\alpha_i = (\alpha_{i-1} \pm 180^\circ) + \beta_{\text{лев.}}, \qquad (19)$$

$$\alpha_i = (\alpha_{i-1} \pm 180^\circ) - \beta_{\text{прав.}}$$

где α_i – дирекционный угол определяемой стороны;

α_{i-1} – дирекционный угол исходной стороны (или предыдущей стороны теодолитного хода, дирекционный угол для которой уже вычислен);

$\beta_{\text{лев.}}(\beta_{\text{прав.}})$ – уравненные значения горизонтальных углов, левых или правых походу лежащих.

Необходимые данные для вычисления берут из таблицы 8.

В нашем примере измерены и уравнены «левые» по ходу лежащие углы, вычисления будем производить по первой формуле в формулах (19).

Вычислим дирекционный угол стороны ГК 995 – ГК 994, дирекционный угол исходной стороны ГК 996 – ГК 995 был вычислен ранее.

$$\alpha_{\text{ГК995–ГК994}} = (\alpha_{\text{ГК996–ГК995}} \pm 180^\circ) + \beta_{\text{ГК995}} = (332^\circ 40' 34'' - 180^\circ) +$$
$$+ 131^\circ 37' 41'' = 152^\circ 40' 34'' + 131^\circ 37' 41'' = 284^\circ 18' 15''.$$

Вычисленное значение заносим в колонку 5 таблицы 8.

Дирекционный угол следующей стороны ГК 994 – ГК 993 вычисляем аналогично:

$$\alpha_{\text{ГК994–ГК993}} = (\alpha_{\text{ГК995–ГК994}} \pm 180^\circ) + \beta_{\text{ГК995}} = (284^\circ 18' 15'' - 180^\circ) +$$
$$+ 104^\circ 31' 11'' = 104^\circ 18' 15'' + 104^\circ 31' 11'' = 208^\circ 49' 26''.$$

Контролем правильности вычислений является равенство вычисленного по формулам (19) и записанного в последней строке столбца 5 (табл.8) значения исходного дирекционного угла стороны ГК 996 – ГК 995.

Вычисление приращений координат производится по формулам прямой геодезической задачи:

$$X_i = X_j + \Delta X_{ji}, \qquad (20)$$
$$Y_i = Y_j + \Delta Y_{ji},$$

где X_i, Y_i – определяемые координаты *i*-й точки теодолитного хода;

X_j, Y_j – известные координаты *j*-й точки теодолитного хода;

$\Delta X_{ji}, \Delta Y_{ji}$ – приращения координат *i*-й точки относительно *j*-й, вычисляемые по формулам:

$$\Delta X_{ji} = d_{ji} \cdot \cos\alpha_{ji}, \qquad (21)$$
$$\Delta Y_{ji} = d_{ji} \cdot \sin\alpha_{ji},$$

где d_{ji} – горизонтальное проложение ***j-i*** стороны теодолитного хода;

α_{ji} – дирекционный угол ***j-i*** стороны теодолитного хода.

Для вычисления приращений координат по формулам (21) значения горизонтальных проложений сторон теодолитного хода выбирают из таблицы 8 (колонка 4), а дирекционные углы – из колонки 5 той же таблицы.

Пример

Для стороны ГК 996 – ГК 995:

$$\Delta X_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} = d_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} \cdot \cos\alpha_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} =$$
$$= 148{,}866 \cdot \cos(332^\circ 40' 34'') = 148{,}866 \cdot 0.888426 = +132{,}256 \text{ м}$$

$$\Delta Y_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} = d_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} \cdot \sin\alpha_{\text{ГК 996}-\text{ГК 995}} =$$
$$= 148{,}866 \cdot \sin(332^\circ 40' 34'') = 148{,}866 \cdot (-0{,}459020) = -68{,}332 \text{ м}$$

Вычисленные значения **со своим знаком** записывают в таблицу 8 (колонки 6 и 7) соответственно.

Поскольку в вычислениях использовались дирекционные углы, вычисленные по уравненным горизонтальным углам и погрешности угловых измерений учтены, значимыми остаются ошибки линейных измерений, входящие в горизонтальные проложения.

Уравнивание приращений координат и оценка точности линейных измерений включает в себя:

– вычисление невязок линейных измерений в проекции на ось X – f_x;

– вычисление невязок линейных измерений в проекции на ось Y – f_Y;

– вычисление абсолютной невязки измерений;

– вычисление относительной невязки и оценка точности линейных измерений;

– вычисление и внесение поправок в приращения координат;

– контроль вычислений.

Вычисление невязок производят по следующим формулам:

$$f_X = \sum \Delta X_{\text{изм.}} + \sum \Delta X_{\text{теор.}}\,, \qquad (22)$$

$$f_Y = \sum \Delta Y_{\text{изм.}} + \sum \Delta Y_{\text{теор.}}\,,$$

где $\Delta X_{\text{изм.}}$, $\Delta Y_{\text{изм.}}$ – приращения координат, полученные по измеренным величинам, вычисленные по формулам (21);

$\sum \Delta X_{\text{теор}}$, $\sum \Delta Y_{\text{теор.}}$ – теоретические суммы приращений координат, вычисляемые по формулам:

$$\sum \Delta X_{\text{теор.}} = X_{\text{кон.}} - X_{\text{нач.}}\,, \qquad (23)$$

$$\sum \Delta Y_{\text{теор.}} = Y_{\text{кон.}} - Y_{\text{нач.}}\,,$$

где $X_{\text{кон.}}$, $Y_{\text{кон.}}$ – координаты конечного пункта теодолитного хода – принятого за исходный;

$X_{\text{нач.}}$, $Y_{\text{нач.}}$ – координаты начального пункта теодолитного хода, принятого за исходный.

В нашем случае для замкнутого теодолитного хода в качестве исходного начального пункта принят пункт ГК 996, он же является и конечным исходным пунктом, поэтому $X_{\text{нач.}} = X_{\text{кон.}}$, $Y_{\text{нач.}} = Y_{\text{кон.}}$.

$$\sum \Delta X_{\text{теор.}} = X_{\text{кон.}} - X_{\text{нач.}} = 0,$$

$$\sum \Delta Y_{\text{теор.}} = Y_{\text{кон.}} - Y_{\text{нач.}} = 0.$$

В связи с этим нахождение невязок сводится к вычислению сумм приращений координат с учетом знаков по осям ***X*** и ***Y*** соответственно.

В рассматриваемом примере вычисленные суммы получились равными следующим значениям:

$$f_X = \sum \Delta X_{\text{изм.}} = -0{,}075\,\text{м},$$

$$f_Y = \sum \Delta Y_{\text{изм.}} = +0{,}336\,\text{м}.$$

Значения должны быть записаны под соответствующими столбцами таблицы 8.

Вычисление абсолютной невязки f_S производится по формуле

$$f_S = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}\ . \qquad (24)$$

Для нашего примера: $f_S = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2} = 0{,}344\text{м}$.

В зависимости от абсолютной ошибки вычисляют относительную ошибку $f_{\text{отн}}$ по формуле:

$$f_{\text{отн}} = \frac{f_S}{\sum d} = \frac{1}{f_S : \sum d}, \qquad (25)$$

где $\sum d$ – сумма горизонтальных проложений сторон теодолитного хода или периметр полигона.

В нашем случае $\sum d$ ***=1758,485*** **м** и значение относительной ошибки:

$$f_{\text{отн}} = \frac{f_S}{\sum d} = \frac{1}{\sum d : f_S} = \frac{1}{1758 : 0{,}344} = \frac{1}{5112} < \frac{1}{2000}.$$

В результате полученная величина относительной ошибки не превосходит допустимого значения, определенного технической инструкцией [1].

После оценки точности линейных измерений необходимо вычислить поправки в приращения координат. Поскольку линейные измерения являются неравноточным и зависят от измеренного расстояния, невязки распределяются пропорционально горизонтальным проложениям сторон теодолитного хода по формулам:

$$\delta_{\Delta X} = \frac{(-f_X)}{\sum d} d_i, \quad \delta_{\Delta Y} = \frac{(-f_Y)}{\sum d} d_i, \qquad (26)$$

где $\delta_{\Delta X}, \delta_{\Delta Y}$ – поправки, вносимые в соответствующие приращения координат;

d_i – горизонтальное проложение стороны теодолитного хода, в которую вносятся поправки.

Пример

Для стороны ГК 996 – ГК 995:

$$\delta_{\Delta x} = \frac{(-f_X)}{\sum d} d_{ГК996-ГК995} = \frac{+0{,}075}{1758{,}485} 148{,}866 = +0{,}006 \text{ м},$$

$$\delta_{\Delta Y} = \frac{(-f_Y)}{\sum d} d_{ГК996-ГК995} = \frac{-0{,}336}{1758{,}485} 148{,}866 = -0{,}028 \text{ м}.$$

Значения вносимых поправок записывают над соответствующим разрядом вычисленных приращений координат в столбцах 6 и 7 таблицы 8.

Для контроля вычислений необходимо найти сумму всех вносимых поправок, которая должна бать равна невязке, взятой с обратным знаком, а именно:

$$\sum \delta_{\Delta X} = (-f_X), \quad \sum \delta_{\Delta Y} = (-f_Y). \tag{27}$$

Пример

$$\sum \delta_{\Delta X} = +0{,}075 \text{ м}, \ \sum \delta_{\Delta Y} = -0{,}336 \text{ м},$$

что подтверждает правильность выполненных расчетов.

Вычисление исправленных приращений координат производится в колонках 8 и 9 таблицы 8 по формулам

$$\Delta X_{\text{испр.}} = \Delta X_{\text{изм.}} + \delta_{\Delta X}, \tag{28}$$

$$\Delta Y_{\text{испр.}} = \Delta Y_{\text{изм.}} + \delta_{\Delta Y}.$$

Пример

Для стороны ГК 996–ГК 995:

$$\Delta X_{\text{испр.}} = \Delta X_{\text{изм.}} + \delta_{\Delta X} = +132{,}256 + (+0{,}006) = +132{,}262\,\text{м},$$

$$\Delta Y_{\text{испр.}} = \Delta Y_{\text{изм.}} + \delta_{\Delta Y} = -68{,}332 + (-0{,}028) = -68{,}360\,\text{м}.$$

Исправленные поправками значения заносят в столбцы 10 и 11 таблицы 8.

Для контроля вычисляют сумму исправленных значений приращений координат и сравнивают ее с теоретической

$$\sum \Delta X_{\text{испр.}} = \sum \Delta X_{\text{теор.}}, \qquad (29)$$

$$\sum \Delta Y_{\text{испр.}} = \sum \Delta Y_{\text{теор.}}$$

Значения контрольных сумм вписывают в последнюю строку столбцов 10 и 11.

Далее по исправленным значениям приращений координат по формулам (20) последовательно, начиная с начального исходного пункта, вычисляют координаты пунктов теодолитного хода.

Пример

$$X_{\text{ГК995}} = X_{\text{ГК996}} + \Delta X_{\text{испр.}} = 33247{,}590 + 132{,}262 = 33379{,}852\ \text{м},$$

$$Y_{\text{ГК995}} = Y_{\text{ГК996}} + \Delta Y_{\text{испр.}} = 44289{,}528 - 68{,}360 = 44221{,}168\,\text{м},$$

$$X_{\text{ГК994}} = X_{\text{ГК995}} + \Delta X_{\text{испр.}} = 33379{,}852 + 28{,}847 = 33408{,}699\,\text{м},$$

$$Y_{\text{ГК994}} = Y_{\text{ГК995}} + \Delta Y_{\text{испр.}} = 44221{,}168 - 113{,}138 = 44108{,}030\,\text{м}.$$

Вычисленные координаты заносят в столбцы 12 и 13. Контролем служит вычисленное значение конечного исходного пункта (ГК 996), которое должно быть равно теоретическому.

5. Вычисление координат пунктов разомкнутого тахеометрического хода

Вычисление координат разомкнутого тахеометрического хода производится в той же последовательности, что и вычисление координат замкнутого теодолитного хода.

Перед началом вычислений в таблицу 9 выписывают названия вершин, определяющих ход, значения измеренных горизонтальных углов, «левых» по ходу, горизонтальные проложения длин сторон тахеометрического хода. Данные берут из таблицы 4.

В качестве исходных пунктов для тахеометрического хода принимаются пункты теодолитного хода ГК 993 и Х73, координаты этих пунктов берут из таблицы 8 и вписывают в соответствующие колонки таблицы 9.

За исходные принимают направления, соответствующие сторонам теодолитного хода ГК 994 – ГК 993 и Х73 – Х74. Значения дирекционных углов этих направлений выписывают из таблицы 8.

Дальнейшие вычисления производят в следующей последовательности:

– уравнивание горизонтальных углов;

– вычисление дирекционных углов сторон теодолитного хода;

– вычисление приращений координат;

– уравнивание приращений координат;

– вычисление координат точек теодолитного хода.

Уравнивание горизонтальных углов включает в себя:

Угловую невязку разомкнутого тахеометрического хода вычисляют по формуле

а) $f_\beta = \sum \beta_{изм.} + (\alpha_н - \alpha_к) - 180^\circ \cdot n$, для «левых» углов , (30)

б) $f_\beta = \sum \beta_{изм.} + (\alpha_к - \alpha_н) - 180^\circ \cdot n$, для «правых» углов,

где f_β – угловая невязка хода;

$\sum\beta_{изм.}$ – сумма измеренных горизонтальных углов;

$(\alpha_н - \alpha_к)$ – разность дирекционных углов начального и конечного исходных направлений;

n – количество вершин хода.

В нашем случае измерены «левые» по ходу углы, поэтому следует воспользоваться формулой а) в формулах (30).

Пример

$$\sum\beta_{изм.} = 795^\circ 46'29''; \ (\alpha_н - \alpha_к) = 208^\circ 49'26'' - 104^\circ 33'48'' = 104^\circ 15'38'';$$

$$n=5; \quad 180^\circ \cdot 5 = 900^\circ;$$

$$f_\beta = 795^\circ 46'29'' + 104^\circ 15'38'' - 900^\circ = 900^\circ 02'07'' - 900^\circ = +2'07''.$$

Для сравнения вычисленной величины с допустимым значением необходимо рассчитать допустимую угловую невязку по формуле (16).

Для хода из 5 вершин $f_{\beta(доп.)} = \pm 1'\sqrt{n} = \pm 1'\sqrt{5} = \pm 2'12''$.

Угловая невязка хода не превышает допустимого значения.

Вычисление поправки в измеренные углы производится по формуле (17).

Пример

$$\delta_\beta = \frac{(-f_\beta)}{5} = \frac{-(+2'07'')}{5} = \frac{-127''}{5} = -25{,}4''.$$

Вычисленная поправка вносится в измеренные углы с точностью до $\mathbf{1''}$.

Для контроля вычисляют сумму вносимых поправок, она должна быть равна значению невязки, взятой с обратным знаком.

Внесение поправки и вычисление исправленных горизонтальных углов производится по формуле (18).

Таблица 9

Вычисление координат точек съемочного обоснования (тахеометрический ход)

Номер станции	Горизонтальные углы измеренные °	′	″	исправленные °	′	″	Гор. прол., м	Дирекционные углы °	′	″	Приращения координат, м вычисленные ΔX	ΔY	исправленные ΔX	ΔY	Координаты, м X	Y
1	**2**			**3**			4	**5**			**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
ГК994																
			-25					**208**	**49**	**26**						
ГК993	150	09	12	150	08	47					*+0,007*	*-0,044*			**33306,338**	**44051,676**
			-26				175,612	178	58	13	-175,584	+3,156	-175,577	+3,112		
В1	268	16	18	268	15	52					*+0,005*	*-0,033*			33130,761	44054,788
			-26				133,762	267	14	05	-6,453	-133,606	-6,448	-133,639		
В3	191	48	00	191	47	34					*+0,003*	*-0,021*			33124,313	43921,149
			-25				85,882	279	01	39	+13,476	-84,818	+13,479	-84,839		
В4	126	19	31	126	19	06					*+0,007*	*-0,042*			33137,792	43836,310
			-25				168,461	225	20	45	-118,399	-119,837	-118,392	-119,879		
Х73	59	13	28	59	13	03									**33019,400**	**43716,431**
								104	**33**	**48**						
Х74																
Σ	***795***	***46***	***29***	***795***	***44***	***22***	***563,717***				***-286,960***	***-335,105***	***-286,938***	***-335,245***		

$$f_\beta = \sum \beta_{изм} + (\alpha_н - \alpha_к) - 180^0 \cdot n,$$

$$(\alpha_н - \alpha_к) = 104^\circ 15' 38'',$$

$$f_\beta = 900^\circ 02' 07'' - 900^\circ = +2' 07'',$$

$$f_\beta (доп) = \mp 1' \sqrt{n} = \pm 1' \cdot \sqrt{5} = \pm 2' 12'',$$

$$X_к - X_н = -286{,}938 м,$$

$$Y_к - Y_н = -335{,}245 м,$$

$$f_X = -0{,}022 м, \qquad f_Y = +0{,}140 м,$$

$$f_S = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2} = 0{,}141 м,$$

$$f_{отн} = \frac{f_S}{\sum d} = \frac{1}{\sum d : f_S} = \frac{1}{3998} < \frac{1}{1000}.$$

После внесения поправок и вычисления исправленных углов необходимо проконтролировать решение, повторно вычислив невязку, ее значение должно быть равно нулю.

Вычисление дирекционных углов сторон теодолитного хода производится по формулам (19) «передачи дирекционного угла» с исходной стороны на определяемую для «левых» углов.

Пример

$$\alpha_{\text{ГК 993–Вl}} = (\alpha_{\text{ГК 994–ГК 993}} \pm 180^\circ) + \beta_{\text{ГК 993}} = (208^\circ 49' 26'' - 180^\circ) +$$
$$+ 150^\circ 08' 47'' = 28^\circ 49' 26'' + 150^\circ 08' 47'' = 178^\circ 58' 13''.$$

Вычисленное значение заносим в колонку 5 таблицы 9.

Контролем правильности вычислений является равенство вычисленного по формулам (19) и записанного в последней строке столбца 5 (табл. 9) значения конечного исходного дирекционного угла стороны Х73 – Х74.

Вычисление приращений координат производится по формулам прямой геодезической задачи (20).

После вычисления приращений координат производят уравнивание линейных измерений и оценку точности.

Вычисление невязок производят по формулам (22) и (23).

В нашем случае для разомкнутого тахеометрического хода в качестве исходного начального пункта принят пункт ГК 993, а исходного конечного пункта – пункт Х73.

Пример

$$\sum \Delta X_{\text{теор.}} = X_{\text{кон.}} - X_{\text{нач.}} = X_{\text{Х73}} - X_{\text{ГК 993}} = 33019{,}400 - 33306{,}338 = -286{,}938\,\text{м},$$
$$\sum \Delta Y_{\text{теор.}} = Y_{\text{кон.}} - Y_{\text{нач.}} = Y_{\text{Х73}} - Y_{\text{ГК 993}} = 43716{,}431 - 44051{,}676 = -335{,}245\,\text{м}.$$

.

В рассматриваемом примере вычисленные невязки получились равными следующим значениям:

$$f_X = -286{,}960 - (-286{,}938) = -0{,}022\,\text{м},$$

$$f_Y = -335{,}105 - (-335{,}245) = +0{,}140\,\text{м}.$$

Вычисление абсолютной невязки f_S производится по формуле (24).

Для нашего примера: $f_S = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2} = 0{,}141\text{м}$.

В зависимости от абсолютной ошибки вычисляют относительную ошибку $f_{\text{отн}}$ по формуле (25).

В нашем случае $\sum d$ =563,717 м и значение относительной ошибки:

$$f_{\text{отн}} = \frac{f_S}{\sum d} = \frac{1}{\sum d : f_S} = \frac{1}{563{,}7 : 0{,}141} = \frac{1}{3998} < \frac{1}{1000}.$$

В результате полученная величина относительной ошибки не превосходит допустимого значения, определенного технической инструкцией [1].

После оценки точности линейных измерений необходимо вычислить поправки в приращения координат по формулам (26).

Значения вносимых поправок записывают над соответствующим разрядом вычисленных приращений координат в столбцах 6 и 7 таблицы 9. Для контроля вычислений необходимо вычислить сумму всех вносимых поправок, которая должна бать равна невязке, взятой с обратным знаком.

Вычисление исправленных приращений координат производится в колонках 8 и 9 таблицы 9 по формулам (28).

Для контроля вычисляют сумму исправленных значений приращений координат и сравнивают ее с теоретической.

Далее по исправленным значениям приращений координат по формулам (20) последовательно, начиная с начального исходного пункта (ГК993), вычисляют координаты точек теодолитного хода.

Вычисленные координаты заносят в столбцы 12 и 13. Контролем служит вычисленное значение конечного исходного пункта (Х73), которое должно быть равно теоретическому.

6. Составление каталога координат и высот пунктов съемочного обоснования

Каталог координат и высот пунктов съемочного геодезического обоснования составляется отдельно для исходных пунктов и определяемых пунктов. Для этого составляются таблицы 10 и 11.

В столбец 1 таблиц 10 и 11 выписывают названия пунктов, в столбцы 2 и 3 – координаты пунктов из таблиц 1, 8 и 9. В столбец 4 выписывают значения высотных отметок пунктов обоснования из таблиц 6 и 7.

В столбце 5 приводят значения дирекционных углов направлений, соответствующих сторонам теодолитного и тахеометрического ходов. Для вычисления дирекционных углов используют формулы (13), порядок вычислений рассмотрен в параграфе 4. В столбце 6 указывается название пункта, определяющего направление.

Для вычисления длин сторон съемочного обоснования используют формулы (13) и координаты пунктов из столбцов 2 и 3. Значения вычисленных длин записывают в столбец 7.

По окончании всех вычислений работу оформляют и сдают на проверку.

Таблица 10

Каталог координат и высот пунктов съемочного геодезического обоснования (исходные пункты)

Пункт	*X*, м	*Y*, м	*H*, м	Дирекционный угол	На пункт	Сторона, м
1	2	3	4	5	6	7
Исходные пункты						
ГК996	33247,590	44289,528	275,340	19° 36' 17"	пп1014	257,030
				82° 42' 36"	пп1232	89,959
				184° 01' 12"	Х63	192,586
				332° 40' 04"	ГК995	148,884
пп1014	33489,720	44375,769		199° 36' 17"	ГК996	257,030
пп1232	33259,005	44378,760		262° 42' 36"	ГК996	89,959

41

Таблица 11

Каталог координат и высот пунктов съемочного геодезического обоснования (определяемые пункты)

Пункт	*X*, м	*Y*, м	*H*, м	Дирекционный угол	На пункт	Сторона, м
1	2	3	4	5	6	7
Определяемые пункты						
ПК995	33379,852	44221,168	259,761	152° 40' 04"	ПК996	148,884
ПК994	33408,699	44108,030	258,381	284° 18' 15"	ПК994	116,758
				104° 18' 15"	ПК995	116,758
ПК993	33306,338	44051,676	265,162	208° 50' 05"	ПК993	116,848
				28° 50' 05"	ПК9934	116,848
				178° 59' 04"	В1	175,605
Х71	33285,284	43952,740	260,987	257° 59' 11"	Х71	101,151
				77° 59' 11"	ПК993	101,151
Х72	33344,557	43825,475	261,592	294° 58' 25"	Х72	140,391
				114° 58' 25"	Х71	140,391
				198° 32' 21"	Х73	342,954

42

Окончание таблицы 11

Пункт	*X*, м	*Y*, м	*H*, м	Дирекционный угол	На пункт	Сторона, м
X73	33019,400	43716,431	241,154	18° 32' 21"	X72	342,954
				45° 21' 27"	B4	168,486
				104° 33' 38"	X74	113,769
X74	32990,798	43826,546	266,828	284° 33' 38"	X73	113,769
				118° 42' 55"	X62	111,423
X62	32937,264	43924,266	270,033	63° 01' 36"	X61	148,751
				298° 42' 55"	X74	111,423
X61	33004,734	44056,836	303,773	76° 57' 55"	X63	224,988
				243° 01' 36"	X62	148,751
X63	33055,478	44276,027	306,220	4° 01' 12"	ГК996	192,586
				256° 57' 55"	X61	224,988
B1	33130,761	44054,788	300,830	267° 14' 16"	B3	133,794
				358° 59' 04"	ГК993	175,605
B3	33124,313	43921,149	275,452	87° 14' 16"	B1	133,794
				279° 01' 39"	B4	85,903

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
ПОСТРОЕНИЕ ТОПОГРАФИЧЕСКОГО ПЛАНА

Основной задачей данной лабораторной работы является построение топографического плана масштаба 1:500 по результатам тахеометрической съемки. Работа выполняется в следующей последовательности:

– нанесение на лист чертежной бумаги координатной сетки и ее оцифровка в зависимости от масштаба съемки;

– нанесение на лист чертежной бумаги съемочных точек по их прямоугольным координатам, выполнение контроля графических построений;

– вычисление горизонтальных проложений до пикетных точек;

– нанесение на лист чертежной бумаги пикетных точек по их полярным координатам;

– соединение контуров ситуации согласно абрису съемки;

– проведение горизонталей по отметкам пикетных точек;

– оформление топографического плана.

Для выполнения лабораторной работы студент должен иметь: лист чертежной бумаги формата А1, остро отточенные простые карандаши Т и ТМ, линейку, «круглый» транспортир, измеритель, поперечный масштаб, калькулятор. Варианты задания представлены в таблице 12.

Перед началом работ студент должен выписать координаты съемочных точек ГК 993, ГК 994 и ГК 995, координаты исходной точки ГК 996 одинаковые для всех вариантов.

Горизонтали по отметкам пикетных точек проводятся с сечением 1 м.

Таблица 12

Варианты заданий для построения топографического плана

Координаты исходной точки ГК 996: X = 33 247,590 м; $У$ = 44 289,258 м

ГК 995		
Номер точки	***X*, м**	***У*, м**
1	33 379,902	44 221,019
2	33 375,582	44 213,225
3	33 362,622	44 194,756
4	33 342,959	44 403,572
5	33 376,587	44 363,572
6	33 392,475	44 323,484
7	33 394,129	44 315,513
8	33 396,125	44 299,273
9	33 396,447	44 287,101
10	33 394,869	44 267,538
11	33 386,996	44 237,018
12	33 381,267	44 223,734
13	33 356,979	44 188,277
14	33 343,482	44 175,382
15	33 338,034	44 171,009
16	33 331,532	44 166,308
17	33 323,659	44 161,287
18	33 316,867	44 157,487
19	33 309,519	44 153,878
20	33 296,980	44 148,817
21	33 285,415	44 145,271
22	33 274,104	44 142,766
23	33 266,911	44 141,645
24	33 259,541	44 140,866
25	33 252,685	44 140,473
26	33 245,577	44 140,399
27	33 236,873	44 140,772
28	33 225,059	44 142,100
29	33 214,226	44 144,172
30	33 200,226	44 148,121

ГК 994		
Номер точки	***X*, м**	***У*, м**
1	33 408,842	44 107,913
2	33 397,705	44 098,591
3	33 367,167	44 078,095
4	33 459,651	44 407,234
5	33 487,356	44 326,683
6	33 488,024	44 256,396
7	33 485,868	44 243,303
8	33 479,386	44 217,431
9	33 472,740	44 198,728
10	33 458,875	44 169,897
11	33 429,010	44 128,090
12	33 412,511	44 111,243
13	33 354,785	44 071,548
14	33 326,699	44 059,845
15	33 315,848	44 056,386
16	33 303,203	44 053,047
17	33 288,285	44 050,025
18	33 275,727	44 048,226
19	33 262,435	44 047,043
20	33 241,549	44 049,056
21	33 220,729	44 048,080
22	33 202,056	44 050,899
23	33 190,457	44 053,410
24	33 178,792	44 056,545
25	33 168,133	44 059,966
26	33 157,279	44 064,020
27	33 144,258	44 069,688
28	33 127,069	44 078,633
29	33 111,804	44 088,135
30	33 092,825	44 102,346

ГК 993		
Номер точки	***X*, м**	***У*, м**
1	33 306,527	44051,480
2	33 292,196	44 048,380
3	33 255,283	44 044,405
4	33 492,494	44 295,097
5	33 479,424	44 210,106
6	33 447,013	44 146,982
7	33 438,938	44 136,294
8	33 420,996	44 116,219
9	33 406,274	44 102,626
10	33 386,406	44 078,239
11	33 334,025	44 060,039
12	33 311,369	44 052,732
13	33 241,143	44 044,369
14	33 210,549	44 047,101
15	33 199,228	44 049,105
16	33 186,360	44 052,060
17	33 171,611	44 056,365
18	33 159,543	44 060,654
19	33 147,110	44 065,839
20	33 127,254	44 075,877
21	33 110,327	44 086,351
22	33 094,964	44 097,640
23	33 085,779	44 105,330
24	33 076,827	44 113,610
25	33 068,908	44 121,672
26	33 061,113	44 130,392
27	33 052,139	44 141,573
28	33 040,978	44 157,639
29	33 031,800	44 173,297
30	33 021,514	44 194,909

Координаты съемочных точек удобнее представить в таблице 13

Пример Вариант № 1:

Таблица 13

Значения координат съемочных точек

Название съемочной точки	**Координата *X*, м**	**Координата *У*, м**
ГК 996	33 247,590	44 289,258
ГК 995	33379,902	44221,019
ГК 994	33408,842	44107,913
ГК 993	33306,527	44051,480

1. Построение координатной сетки и ее оцифровка

Из листа формата А1 необходимо вырезать квадрат со сторонами, равными короткой стороне формата А1.

Для построения координатной сетки на листе чертежной бумаги проводят карандашом диагонали (относительно углов листа (рис. 4)). Из точки пресечения диагоналей (точка О) откладывают на них измерителем четыре равных отрезка (полудиагонали) и получают точки а, б, в, г . Соединив эти точки получают вспомогательный прямоугольник, на сторонах которого, начиная с точки «а», измерителем откладывают отрезки, равные 10 см.

Правильность построения координатной сетки контролируют путем измерения циркулем-измерителем диагоналей квадратов. Ошибка в длинах диагоналей не должна превышать 0,3 мм.

После контроля все вспомогательные построения убирают.

Координатную сетку оцифровывают через 50 м (для масштаба 1:500), начиная с юго-западного угла таким образом, чтобы съемочные точки ГК 993,

ГК 994, ГК 995 попали на лист. Квадраты координатной сетки, в которые попадают съемочные точки, для удобства помечают (см. рис. 4).

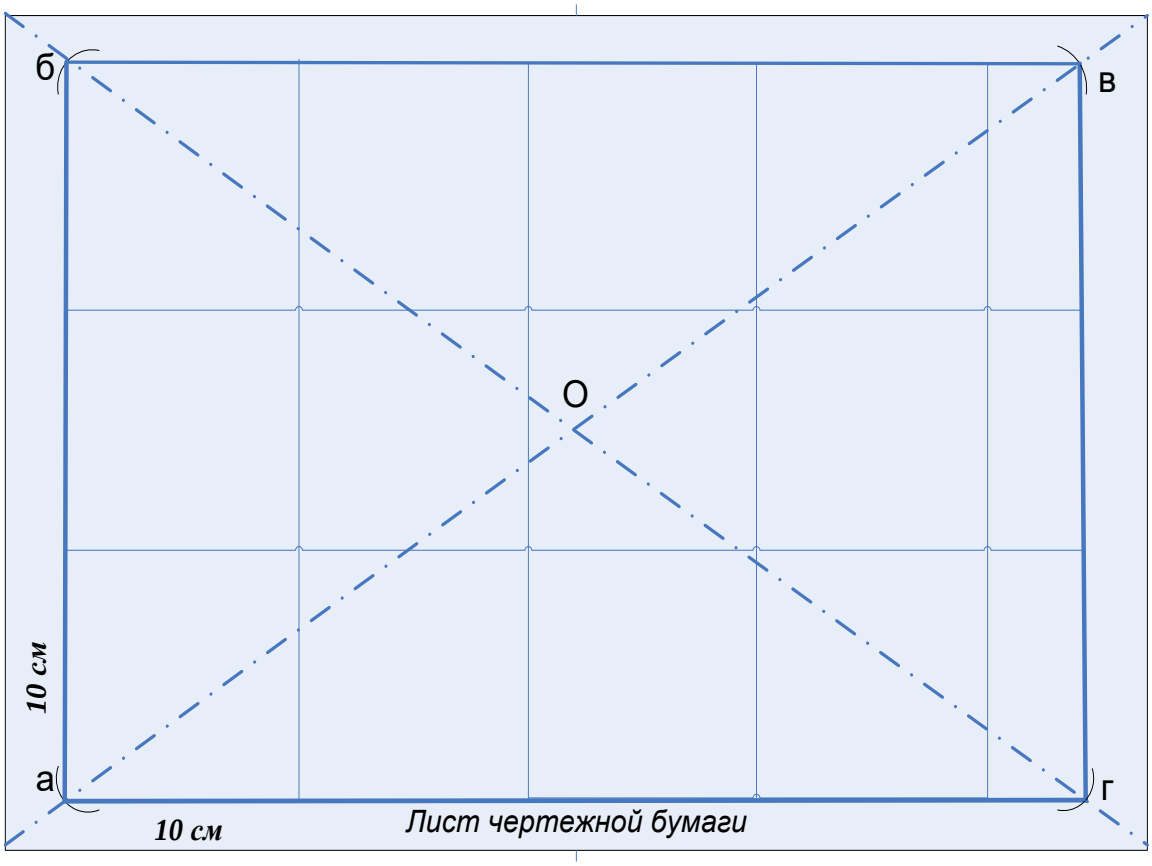


Рис. 4. Построение координатной сетки

Нанесение съемочных точек производится по их прямоугольным координатам с помощью циркуля-измерителя и поперечного масштаба. Для этого от юго-западного угла квадрата, в котором должна находится точка (рис. 6), откладывают значения приращений координат, «набранных» с помощью поперечного масштаба. Координаты точки представляют следующим образом (для точки ГК 995):

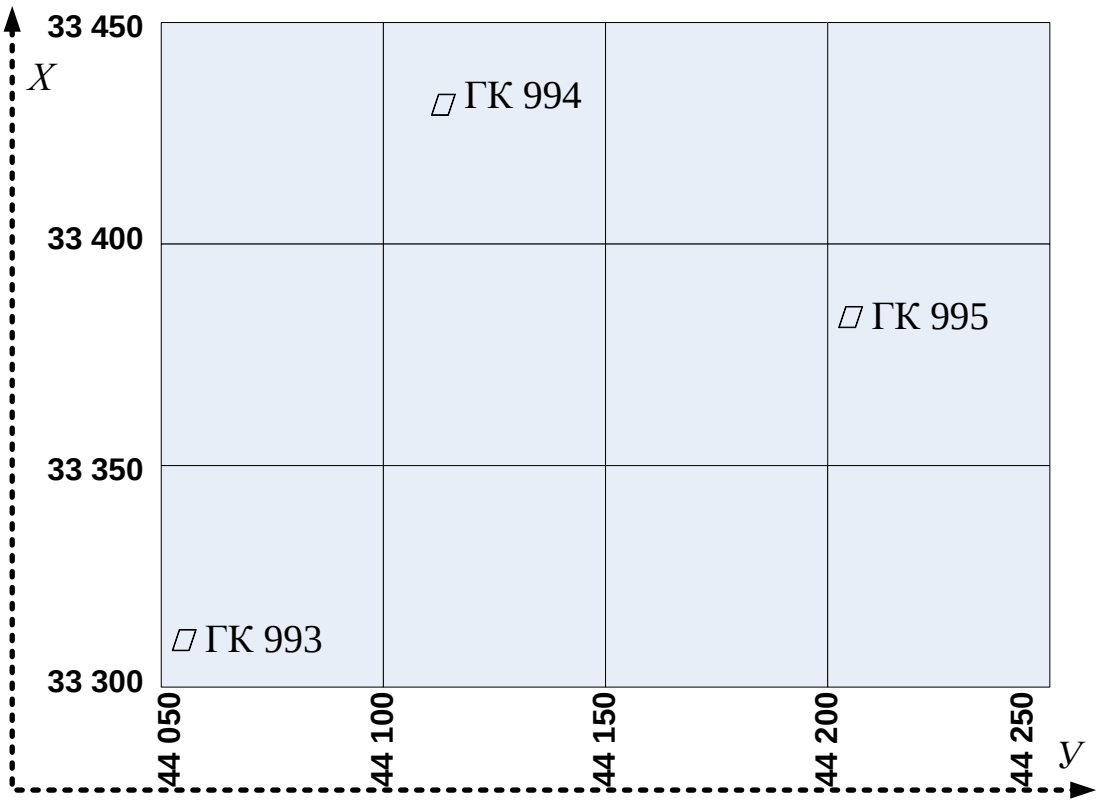


Рис. 5. Оцифровка координатной сетки

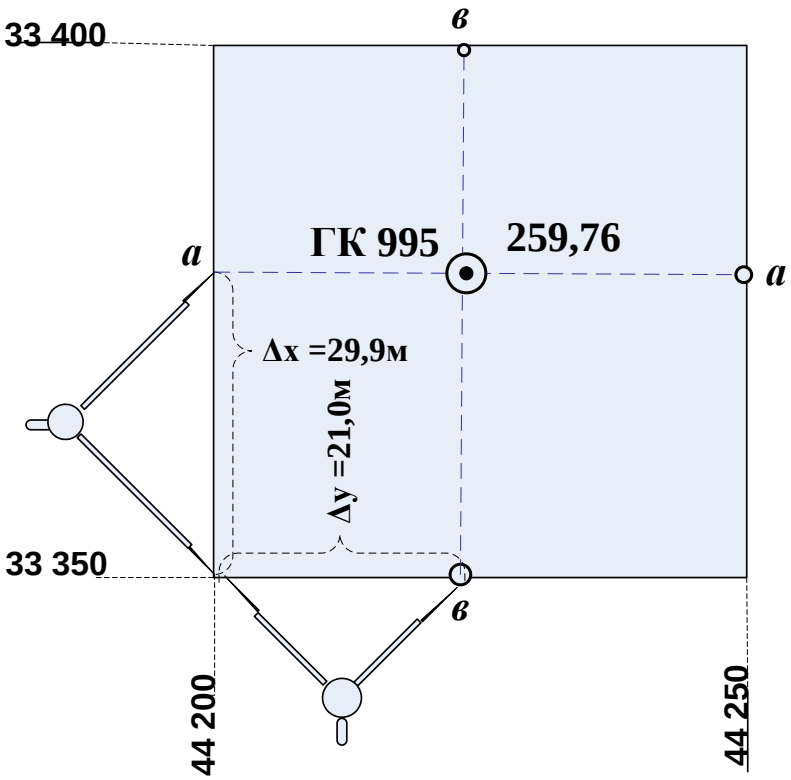


Рис. 6. Нанесение съемочных точек по их координатам

$$X_{\text{ГК995}} = X_0 + \Delta x = 33350 \text{ м} + 29{,}9 \text{ м},$$

$$Y_{\text{ГК995}} = Y_0 + \Delta y = 44200 \text{м} + 21{,}0 \text{ м}.$$

Значения X_0, Y_0 – координаты юго-западного угла квадрата координатной сетки. Для определения длин отрезков на плане масштаба 1:500, соответствующих значениям приращений координат, воспользуемся поперечным масштабом (рис. 7).

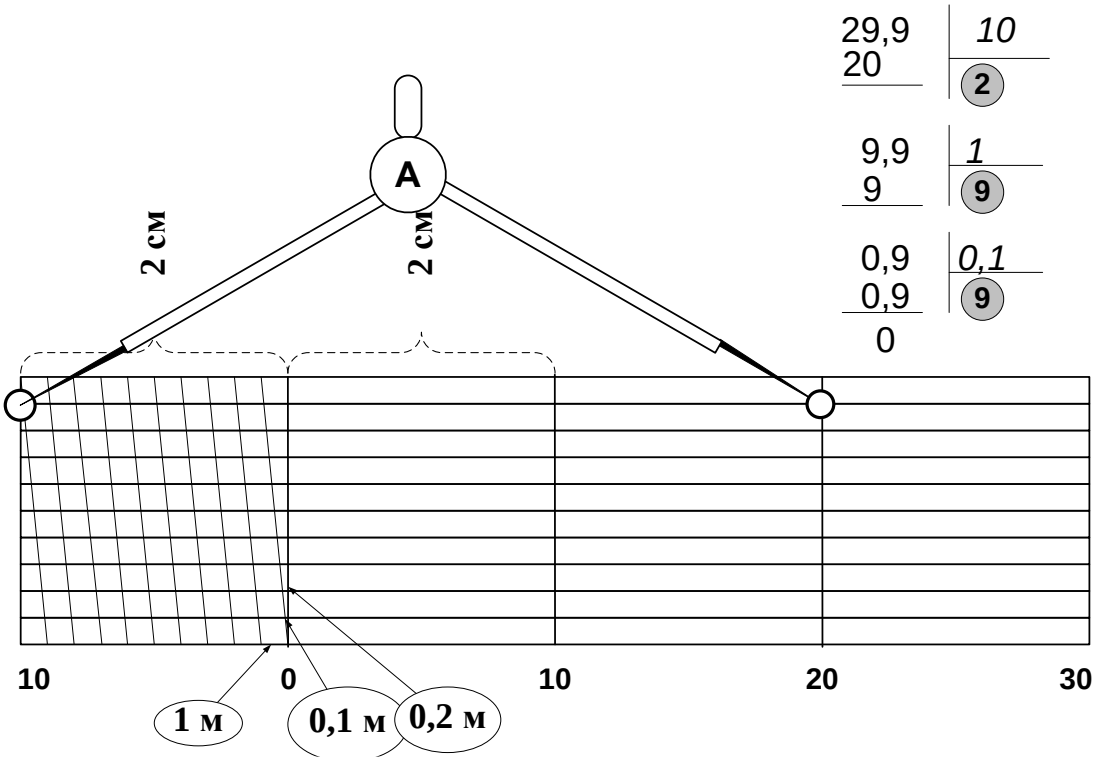


Рис. 7. Поперечный масштаб

Поперечный масштаб представляет собой систему взаимно перпендикулярных линий, образующих номограмму длиной 12 или 20 см и высотой 3 см. Вертикальные линии (секущие) проведены через равные расстояния (основания масштаба). В нашем случае длина основания масштаба равна 2 см. По высоте номограмма разделена на 10 равных частей параллельными линиями, которые нумеруются снизу вверх. Левое крайнее

основание разделено на 10 равных частей, между которыми образована система параллельных наклонных линий (трансверсалей). Для масштаба 1:500 основание масштаба соответствует расстоянию на местности равному 10 м (1 см плана масштаба 1:500 соответствует 5 м местности, соответственно 2 см – 10 м). Каждая часть левого основания равна величине 10 м : 10 и составляет 1 м. Эта часть пропорционально делится параллелями на отрезки, заключенные между секущей линией и ближайшей к ней трансверсалью. Самым маленьким из них является отрезок первой параллели (см. рис. 7), который называется наименьшим делением поперечного масштаба (в нашем случае длина наименьшего деления соответствует 0,1 м (1 м разделить на 10 частей)). Отрезок второй параллели соответственно равен 2 умножить на 0,1 и составляет 0,2 м (см. рис. 7), третей – 0,3 м и т. д.

Для определения расстояния с помощью поперечного масштаба длину отрезка фиксируют раствором измерителя (см. рис. 7). В этом случае линия складывается из трех частей: первая часть представляет собой сумму оснований, отложенных вправо от нуля, вторая – суммарной длине общего количества малых делений левого основания, третья – отрезку соответствующей параллели, заключенному между первой трансверсалью и секущей линией, проходящей через нулевой штрих номограммы.

Например, нам необходимо отложить отрезок на плане, соответствующий расстоянию на местности, равному 29,9 м (значение Δx). Для этого вычислим, сколько полных оснований необходимо отложить (см. рис. 7), разделим 29,9 м на 10 м (длина основания масштаба) и найдем сколько полных оснований укладывается в нашем отрезке, в результате деления получим число **2** (длина первой части линии равна 10 м умножить на 2 и составляет 20 м). Оставшуюся часть отрезка – 9,9 м отложим с помощью малых делений левого основания, разделим 9,9 м на 1 м и получим количество малых отрезков, равное **9** (длина второй части равна 1 м умножить на 9 и составляет 9 м). Для вычисления

номера параллели разделим оставшуюся часть – 0,9 м – на длину наименьшего деления поперечного масштаба – 0,1 м – и получим значение, равное **9**.

Дальнейшая последовательность действий такова:

– на левом основании отсчитываем 9 делений;

– поднимаемся по трансверсали на параллель с номером 9 и фиксируем левую иглу измерителя;

– в правой части масштаба отсчитываем 2 полных основания и устанавливаем правую иглу измерителя на пересечении секущей, соответствующей суммарному отрезку двух оснований и параллели с номером 9 (см. рис. 7);

– в квадрате километровой сетки, где расположена точка, откладывают полученный отрезок с обоих сторон квадрата и накалывают точки а и а, через которые проводят вспомогательную линию (см. рис. 6);

– аналогично откладывают отрезок, соответствующий приращению $\Delta y = 21{,}0$ м;

– на пересечении вспомогательных линий получаем положение съемочной точки;

– справа подписываем название съемочной точки, слева – отметку, которую берем из таблицы 14;

– после того, как все съемочные точки будут нанесены, необходимо выполнить контроль;

– для контроля из решения обратных геодезических задач получают длины сторон съемочного обоснования, которые сравнивают с их графическими значениями, при этом используют поперечный масштаб. Допустимое расхождение в положении точек – 0,3 мм.

Пример

Вычисление длин:

$$d_{\text{ГК993-ГК994}} = \sqrt{(X_{\text{ГК994}} - X_{\text{ГК993}})^2 + (Y_{\text{ГК994}} - Y_{\text{ГК993}})^2} = \sqrt{(102{,}315)^2 + (56{,}433)^2} =$$
$$= \sqrt{13653{,}043} = 116{,}846\,\text{м},$$
$$d_{\text{ГК994-ГК995}} = \sqrt{(X_{\text{ГК995}} - X_{\text{ГК994}})^2 + (Y_{\text{ГК995}} - Y_{\text{ГК994}})^2} = \sqrt{(-28{,}94)^2 + (113{,}106)^2} =$$
$$= \sqrt{13630{,}491} = 116{,}750\,\text{м},$$
$$d_{\text{ГК995-ГК996}} = \sqrt{(X_{\text{ГК996}} - X_{\text{ГК995}})^2 + (Y_{\text{ГК996}} - Y_{\text{ГК995}})^2} = \sqrt{(-132{,}312)^2 + (68{,}509)^2} =$$
$$= \sqrt{22199{,}948} = 148{,}996\text{м}.$$

2. Нанесение на план пикетных точек

Нанесение на план пикетных точек производится по результатам тахеометрической съемки, которые представлены в таблице 14.

Таблица 14

Результаты тахеометрической съемки

Станция № **ГК 993**; МО = **+ 0,5'**; H = **265,16** м; i = **1,40** м

Номер пикета	**Характ. пикета**	**Расстояние, м**		**Горизонт. круг** ° '	**Вертик. круг** ° '	***V*, м**	***H*, м**
		измер.	**прив.**				
ГК-994				0 00.0			
1	Край дороги	85,65		333 11	- 5 03	2,0	
2	Край откоса	76,80		333 21	- 5 29	2,0	
3	Верх откоса	64,65		334 26	- 6 00	2,0	
4	Низ откоса	63,70		333 22	- 6 24	2,0	
5	Низ откоса	72,11		330 34	- 6 16	2,0	
6	Верх откоса	57,68		349 18	- 5 26	2,0	
7	Низ откоса	58,69		346 08	- 6 10	2,0	
8	Край откоса	42,66		346 01	- 6 11	2,0	
9	Край дороги	77,43		343 12	- 4 50	2,0	
10	Угол здания	84,98	Рул.	349 34			
11	Кромка леса	18,91		338 49	- 7 53	2,0	
12	Развилка	23,35		16 28	- 4 36	2,0	
13	Дорога	44,80		18 42	- 3 39	2,0	
14	Дорога	47,19		7 23	- 4 44	2,0	
15	Т.Р.	42,19		26 19	- 3 35	2,0	
16	Т.Р.	26,14		36 19	- 2 35	2,0	
17	Дорога	70,20		24 53	- 2 31	2,0	
18	Дорога	64,44		1 52	- 4 25	2,0	
19	Край асфальта	73,13	Рул.	0 13			

Станция № ГК 994; МО = + 0,5'; H = 258,38 м; i = 1,37 м

Номер пикета	Характ. пикета	Расстояние, м		Горизонт. круг ° '	Вертик. круг ° '	V, м	H, м
		измер.	прив.				
ГК-993				0 00,0			
20	Крыльцо	11,52		99 32	- 1 16	3,0	
21	Крыльцо	11,86		108 40	- 6 05	$i=v$	
22	Здание	14,64	Рул.	97 12			
23	Здание Н,	19,24		138 17	- 4 58	$i=v$	
24	Здание К Н.	23,84		147 52	- 4 25	$i=v$	
25	Здание К Н.	26,78		151 38	- 4 35	$i=v$	
26	Ограждение	27,15		157 21	- 4 47	$i=v$	
27	Стенд	30,26		189 29	- 3 45	$i=v$	
28	Т.П.	43,25		196 58	- 3 05	$i=v$	
29	Т.П.	44,40		201 52	- 2 50	$i=v$	
30	Тропа	38,19		186 20	- 4 07	$i=v$	
31	Т.Р.	36,85		212 03	- 2 15	$i=v$	
32	Забор	28,31		212 36	- 3 12	$i=v$	
33	Т.Р.	15,72		204 14	-5 07	$i=v$	
34	Забор	11,35		235 07	- 5 26	$i=v$	
35	Откос	13.25		348 33	+ 0 13	$i=v$	
36	Откос	7.53		318 42	- 4 50	$i=v$	
37	Откос	4.76		259 48	- 10 28	$i=v$	
38	Край площ.	47.59		357 13	+ 1 45	$i=v$	
39	Край площ.	31.59		355 04	+ 0 59	$i=v$	
40	Забор	16.81		327 18	- 0 18	$i=v$	
41	Забор	28.60		342 52	+ 1 15	$i=v$	
42	Забор	40.51		331 44	+ 2 01	$i=v$	
43	Забор	77.78		304 23	+ 3 38	$i=v$	
44	Т.Р.	42.3		295 48	+ 1 22	$i=v$	
45	Забор	20.0		274 59	- 1 20	$i=v$	
46	Забор	21.12		253 58	- 1 58	$i=v$	
47	Забор	35.96		272 11	+ 0 22	$i=v$	
48	Забор	43.48		261 28	- 0 12	$i=v$	
49	Здание	49.04		232 42	- 1 02	$i=v$	
50	Забор	49.66		238 37	- 1 08	$i=v$	
51	Тропа	54.76		222 48	- 1 34	$i=v$	
52	Угол здания	66.86	Рул.	244 34			-
53	Забор	59.30		248 23	- 0 45	$i=v$	
54	Ось дороги	47.84		256 49	- 0 36	$i=v$	
55	Столб	67.66		258 07	- 0 03	$i=v$	
56	Ось дороги	68.77		254 55	- 0 16	$i=v$	
57	Забор	76.06		253 51	- 0 07	$i=v$	
58	Контур леса	82.63		249 43	- 0 01	$i=v$	
59	Забор	76.42		264 31	+ 0 31	$i=v$	
60	Забор	75.77		270 18	+ 0 57	$i=v$	
61	Столб	70.68		279 29	+ 1 48	$i=v$	

Номер пикета	Характ. пикета	Расстояние, м		Горизонт. круг ° '	Вертик. круг ° '	*V*, м	*H*, м
		пзмер.	прив.				
62	Т. Р.	67,82		287 03	+ 2 08	*i*=*v*	
63	Забор	77,40		295 53	+ 2 51	*i*=*v*	
64	Столб	84,68		299 24	+ 3 21	*i*=*v*	
65	Тропа	64,75		321 18	+ 3 47	*i*=*v*	
66	Дорога	75,52		314 25	+ 4 19	*i*=*v*	
68	Заросли куст.	82,88		308 55	+ 4 17	*i*=*v*	
69	Заросли куст.	90,15		307 16	+ 4 24	*i*=*v*	
70	Заросли куст.	91,36		299 03	+ 3 24	*i*=*v*	
71	Дорога	90,.91		310 46	+ 4 35	*i*=*v*	
72	Контур леса	98,30		294 43	+ 3 07	*i*=*v*	
73	Контур леса	93,18		289 18	+ 2 33	*i*=*v*	
74	Забор	89,12		283 27	+ 1 54	*i*=*v*	
75	Контур леса	98,88		280 12	+ 1 50	*i*=*v*	
76	Забор	98,83		277 08	+ 1 38	*i*=*v*	
77	Контур леса	115,90		270 37	+ 1 33	*i*=*v*	
78	Т. Р,	116,85		275 25	+ 1 51	*i*=*v*	
79	Забор	99,16		267 52	+ 1 12	*i*=*v*	
80	Забор	91,46		273 31	+ 1 18	*i*=*v*	
81	Забор	79,52		272 43	+ 1 13	*i*=*v*	
82	Т. Р.	89,50		268 00	+ 0 50	*i*=*v*	
83	Забор	92,51		261 41	+ 0 48	*i*=*v*	
84	Забор	80,36		262 18	+ 0 29	*i*=*v*	
85	Сосна	101,78		267 47	+ 1 12	*i*=*v*	
86	Сосна	103,27		272 53	+ 1 35	*i*=*v*	
87	Забор	95,29		257 51	+ 0 39	*i*=*v*	
89	Т. Р.	103,50		252 50	-+0 32	*i*=*v*	

Станция № **ГК 995**; МО = **+ 1,0'**; *H* = **259,76** м; *i* = **1,30** м

Номер пикета	Характ. пикета	Расстояние, м		Горизонт. круг ° '	Вертик. круг ° '	*V*, м	*H*, м
		измер.	прив.				
ГК 996				0 00			
88	Ось дор.	9,36		61 26	+ 7 23	1,780	
90	Контур леса	17,73		50 26	+ 5 50	1,780	
91	Контур леса	11,13		338 52	+ 2 04	1,780	

Положение пикетной точки на плане определяется в полярной системе координат. За начало системы (полюс) принимается съемочная точка, с которой проводились измерения. Это точки ГК 993, ГК 994 и ГК 995. За начальное

направление принимается «нулевое» направление на станции: для станции ГК 993 это направление на ГК 994, для ГК 994 – направление на ГК 993 и для ГК 995 – направление на ГК 996. Координаты, определяющие положение точки – горизонтальный угол и горизонтальное проложение. Значение горизонтального угла представлено в таблице (столбец «горизонтальный отсчет»), а горизонтальное проложение необходимо вычислить по значениям угла наклона и измеренного расстояния. Для вычисления высоты пикетной точки необходимо вычислить превышение по формуле тригонометрического нивелирования. Вычисления выполняют в журнале тахеометрической съемки.

Для ознакомления с методикой вычисления горизонтальных проложений и высот пикетных точек данные из таблицы 14 переносят в журнал съемки (табл. 15), заполняя столбцы 1–4 и 8.

Для вычисления горизонтального проложения (столбец 6 табл. 15) воспользуемся формулой:

$$d = S \cdot \cos\nu, \qquad (31)$$

где d – значение горизонтального проложения:

S – значение измеренного расстояния;

ν – угол наклона, который рассчитывается по значению отсчета по вертикальному кругу и значению МО (столбец 5 табл. 15).

Пример

Для пикетной точки 1.

$$d = S\cos\nu = 85{,}65\cos(-5^\circ 03{,}5') = 85{,}65 \cdot 0{,}996105 = 85{,}32 \text{ м}.$$

Значение записывают в столбец 6 табл. 15.

Таблица 15

ЖУРНАЛ ТАХЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

Номер пикета	**Расстояния по дальномеру, м**	**Отсчеты по кругам /КЛ/**		**Углы наклона**	**Горизон. прилож., м**	$h' = d\mathrm{tg}\nu$, м	**Высота визир., м** V	$i - V$, **м**	**Превыш., м** $h = h' + i - V$	**Отметки пикетов, м** $H = H_o + h$
		горизонт. ° ′	**вертик.** ° ′	° ′						
1	2	**3**	**4**	5	6	7	8	9	10	11
Станция № ГК 993 ; МО = **+ 0,5** '; H = **265.16** м; i = **1,40** м										
ГК994		0 00								
1	85,65	333 11	-5 03	***-5 03,5***	***85,32***	***-7,55***	2,0	***-0,60***	***-8,15***	***257,01***
……										
16	26,14	36 19	-2 35	***-2 35,5***	***26,11***	***-1,18***	2,0	***-0,60***	***-1,78***	***263,38***
……										
Станция № ГК 994; МО = **+ 0,5** '; H = **258.38** м; i = **1,37** м										
……										
26	27,15	157 21	-4 47	***-4 47,5***	***27,06***	***-2,27***	$i=v$	***0***	***-2,27***	***256,11***
……										
43	77,78	304 23	+3 38	***+3 37,5***	***77,62***	***+4,92***	$i=v$	***0***	***+4,92***	***263,30***
……										
Станция № ГК 995; МО = **+ 1,0** '; H = **259,76** м; i = **1,30** м										
……										
90	17,73	50 26	+5 50	***+5 49***	***17,64***	***+1,80***	***1,78***	***-0,48***	***+1,32***	***261,08***

Далее вычисляют значение превышения пикетной точки относительно станции по формуле тригонометрического нивелирования.

$$h = d \cdot \mathrm{tg}\nu + i - V\,, \qquad (32)$$

где d – значение горизонтального проложения (из столбца 6):

ν – угол наклона (из столбца 5 табл. 15);

i – высота прибора на станции (выбирается из описания станции, см. табл.14);

V – высота визирования (из столбца 8 табл. 14).

Вычисления по формуле 32 производят поэтапно.

На первом этапе вычисляют значение h':

$$h' = d \cdot \mathrm{tg}\nu\,, \qquad (33)$$

где d – значение горизонтального проложения:

ν – угол наклона.

Пример

Для точки 1:

$$h' = d \cdot \mathrm{tg}\nu = 85{,}32 \cdot \mathrm{tg}(-5^\circ 03{,}5') = 85{,}32(-0{,}088515) = -7{,}55 \text{ м.}$$

Вычисленное значение записывают в столбец 7 табл. 15.

$$i - V = 1{,}40 - 2{,}0 = -0{,}60 \text{ м}; \quad h = h' + (i - V) = -7{,}55 - 0{,}60 = -8{,}15 \text{ м.}$$

Вычисленное значение (i - V) записывают в столбец 9 табл. 15;значение h записывают в столбец 10 табл. 15.

Значение высоты пикетной точки вычисляют по формуле и записывают в столбец 11 табл. 15:

$$H = H_0 + h\,, \qquad (34)$$

где H – значение высоты пикетной точки;

H_0 – значение высоты станции;

h – превышение, вычисленное по формуле (32).

Пример

Для точки 1: $H = H_0 + h = 265{,}16 - 8{,}15 = 257{,}01$ м, значение записывают в столбец 11 табл.15.

Для точек 10, 22, 52 вычисления не требуются (расстояние до этой точки измерено рулеткой), значение, округленное до одного десятичного знака, записываем в таблицу 15.

После заполнения таблицы 15 приступают к нанесению пикетных точек на план.

Горизонтальные углы берут из таблицы 15 (столбец 3) и откладывают «круглым» транспортиром от исходного направления по ходу часовой стрелки, расстояния (горизонтальные проложения) из столбца 6 откладывают с помощью линейки в масштабе 1:500 (рис. 8). Для каждой пикетной точки следует подписать номер и отметку из столбца 11 (табл. 15) с точностью до одного десятичного знака.

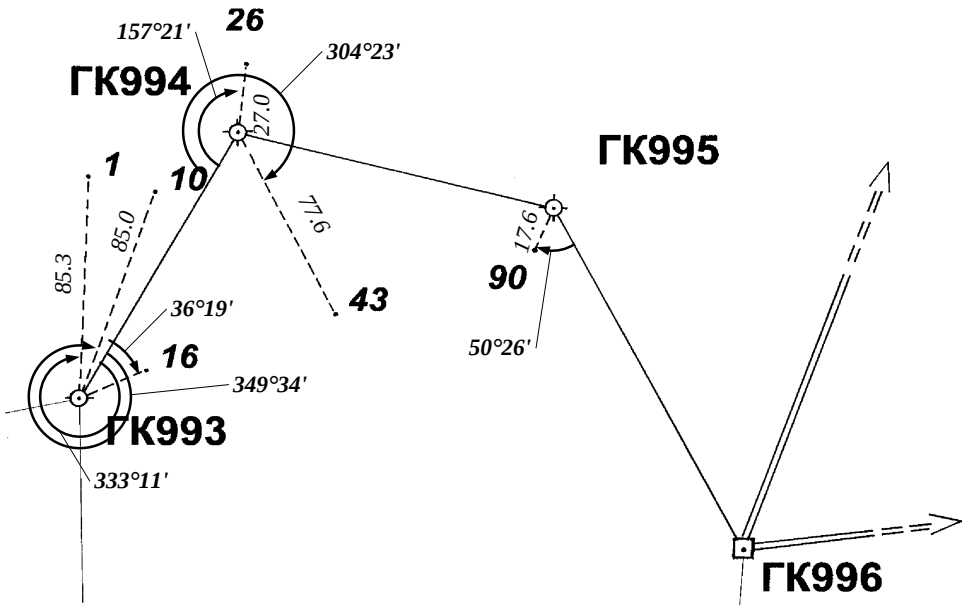


Рис. 8. Нанесение пикетных точек на план по их полярным координатам

После нанесения всех пикетных точек выполняют построения дополнительных точек по результатам обмеров зданий и линейных засечек, а также соединяют контура ситуации, согласно абрису съемки (рис. 10).

Проводят горизонтали по отметкам точек с высотой сечения рельефа 1 м путем линейного интерполирования отметок по линии ската. В результате интерполирования находят на плане точки, отметки которых кратны принятому сечению (рис. 9).

В нашем случае проведены горизонтали с отметками 165, 164 и 163 м.

Горизонтали можно провести с помощью палетки. Для изготовления палетки берут лист восковки размером 10 х 10 см. На восковке проводят ряд параллельных линий через равные интервалы (0,5 или 1,0 см), подписывают значения отметок через 1 м, начиная с минимальной отметки (например 260, 261 и т. д.) (рис. 9). Затем палетку накладывают на две смежных точки (например, точки с отметками 262,71 и 265,16) на плане таким образом, чтобы эти точки заняли на палетке соответствующее положение по высоте. Отрезок, ограниченный заданными точками пересекает линии палетки в точках «а», «в» и «с» с отметками 263, 264 и 265 м соответственно. Эти точки перекалывают на план.

Соединяя точки с одинаковыми отметками плавными линиями, проводят горизонтали. После проведения всех горизонталей подписывают и утолщают каждую четвертую и наносят берг-штрихи по направлению структурных линий рельефа. План оформляют в соответствии с Условными знаками для топографических карт и планов масштаба 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500 [2].

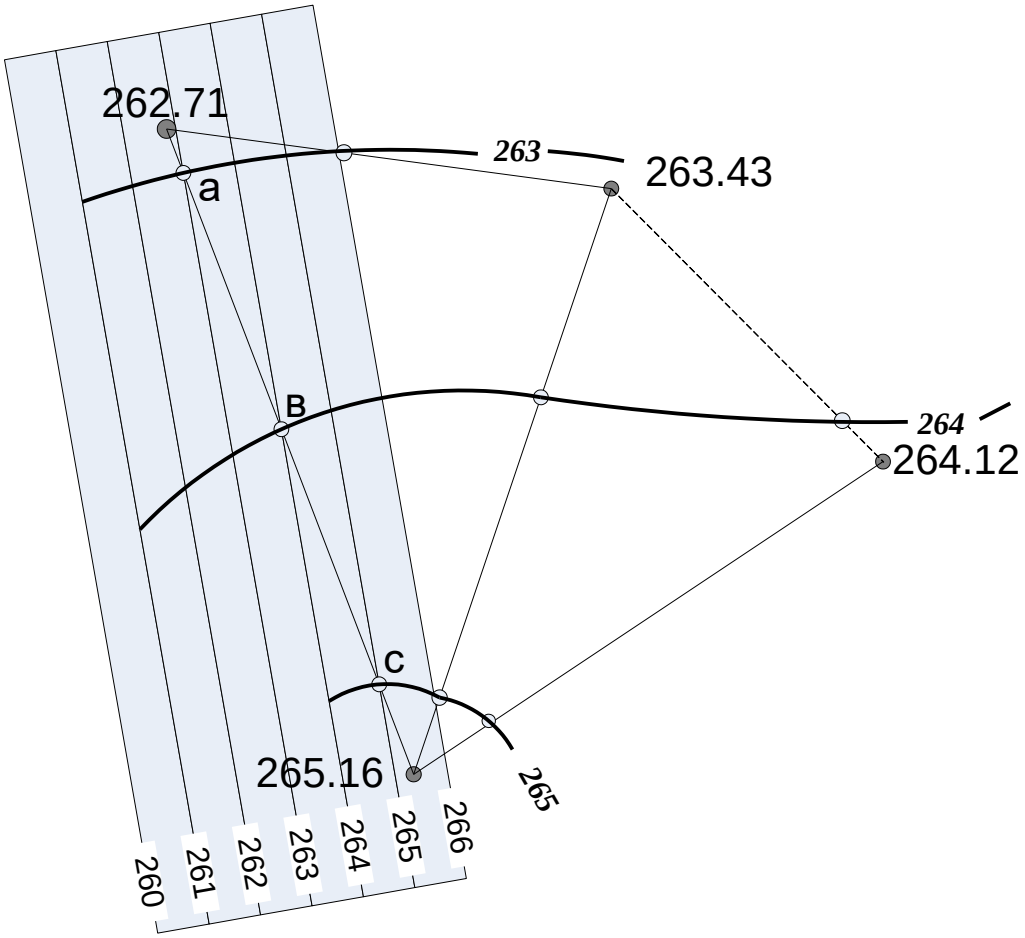


Рис. 9. Проведение горизонталей интерполированием и с помощью палетки

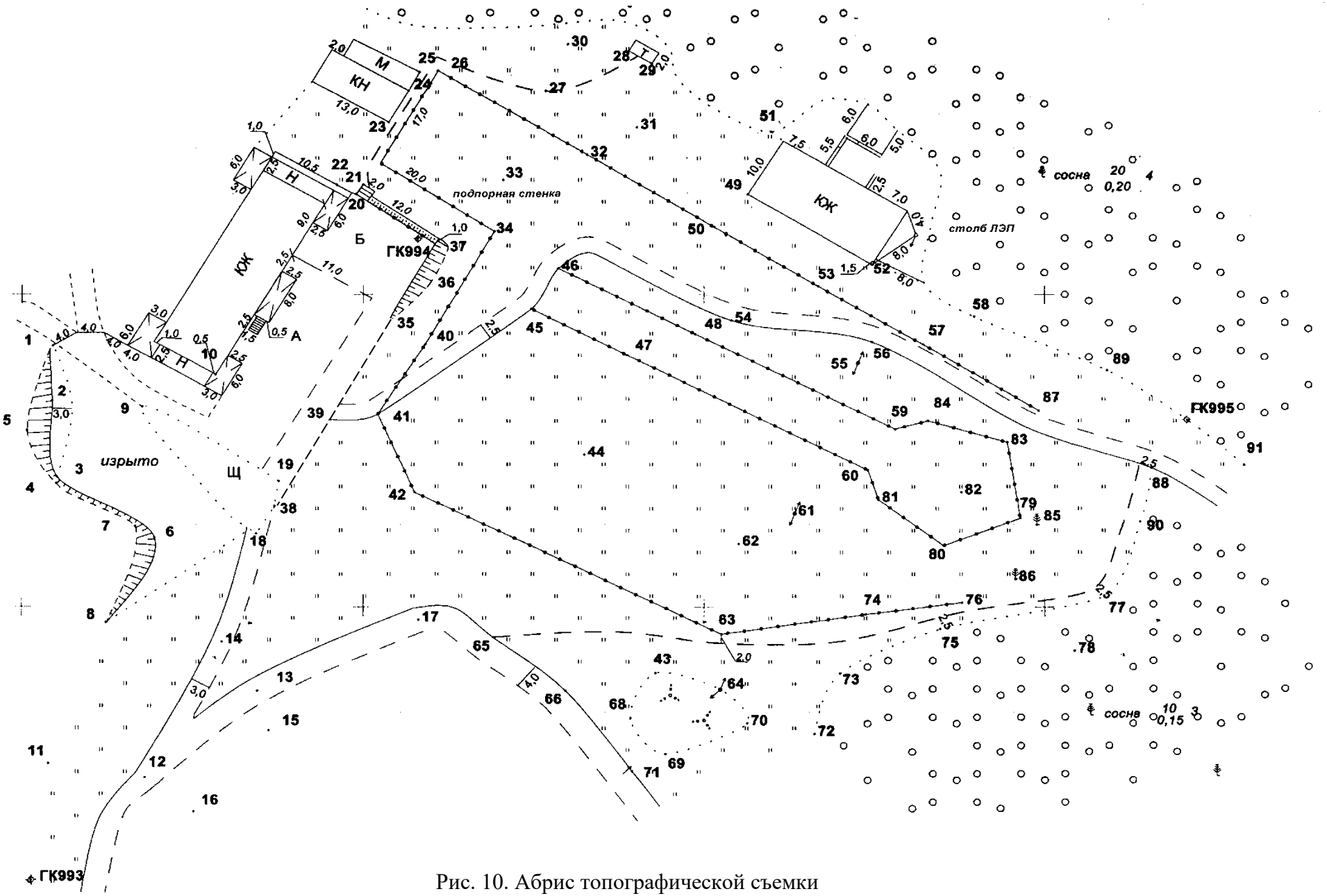


Рис. 10. Абрис топографической съемки

Вычерчивают план в следующей последовательности:

– пункты съемочного обоснования;

– здания, постройки, отдельные местные предметы;

– дороги, линии электропередач, просеки, границы контуров и другие линейные объекты;

– надписи объектов и отметки точек;

– вычерчивание горизонталей, выделение утолщенных горизонталей (каждую четвертую, начиная от кратной 5) и размещение подписей и берг-штрихов;

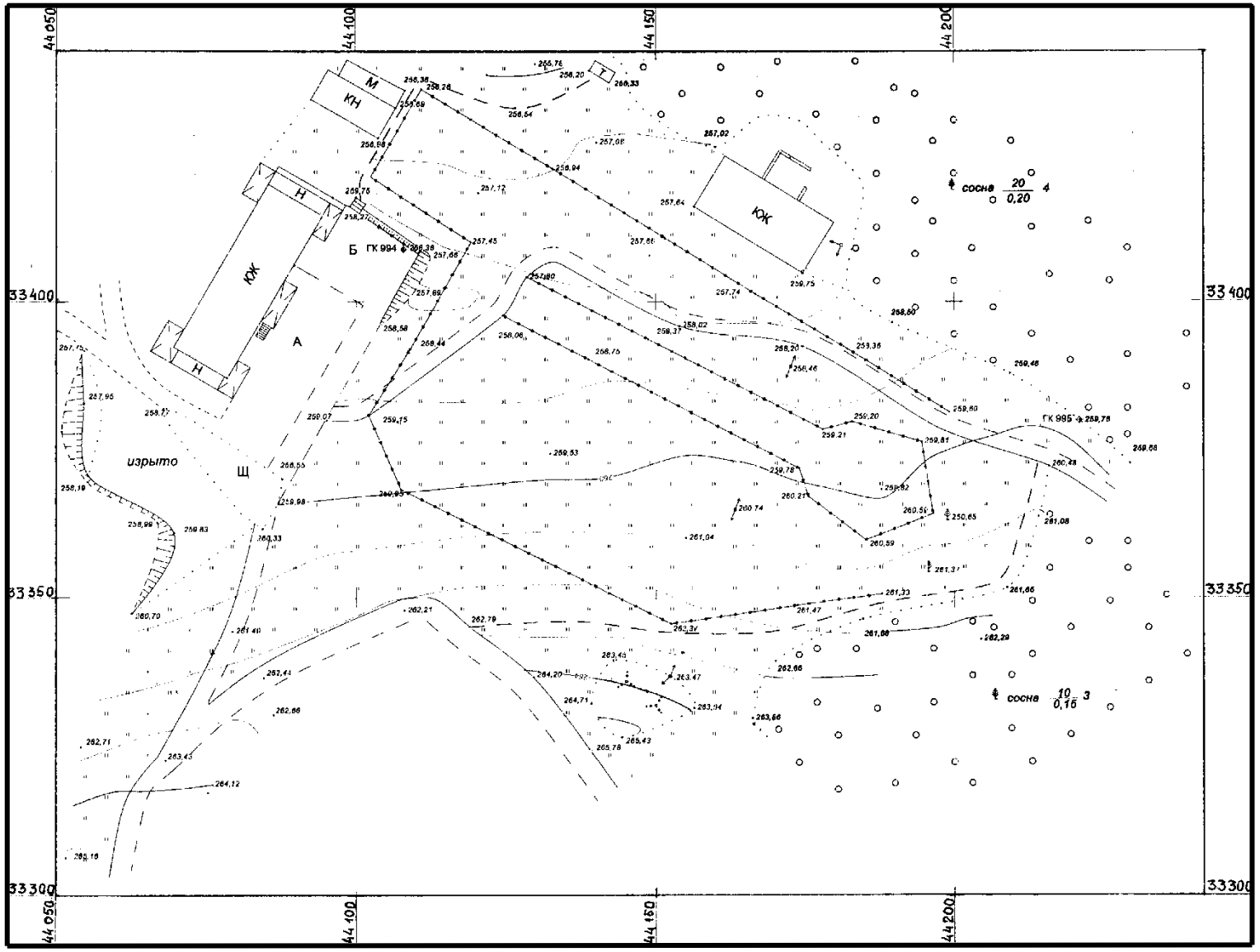
– почвенно-растительный покров (условные знаки угодий: лес, луг, кустарник и т. д.);

– рамка и зарамочное оформление.

Топографический план вычерчивают в карандаше в соответствии с требованиями [2]. Образец представлен на рис. 11.

Система координат условная

ТОПОГРАФИЧЕСКИЙ ПЛАН



1 : 500
в 1-м сантиметре 5 метров

Лапина Е. А., ЗК-12

Сплошные горизонтали проведены через 1 метр

Система высот Балтийская

Рис. 11. Топографический план

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500 / ГКИНП-02-033-82. М., – Недра, –1985. –315 с.

2. Условные знаки для топографических планов масштабов 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500 / М., – Картгеоцентр–Геодезиздат, – 2000. – 286 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. Проректора по учебно-методическому комплексу _____ В.В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации самостоятельной работы и задания

Б1.О.21 ГЕОДЕЗИЯ

Направление подготовки:
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль):
«Кадастр недвижимости»

форма обучения: очная, заочная

Автор: Акулова Е.А.

Одобрена на заседании кафедры
Геодезии и кадастров
(название кафедры)
Зав.кафедрой _____
(подпись)
Акулова Е.А.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 1 от 9.09.2024
(Дата)

Рассмотрена методической комиссией факультета
Горно-технологического
(название факультета)
Председатель _____
(подпись)
Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)
Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)

Екатеринбург

Содержание

	Стр.
1.Общие положения …….	**4**
2. Требования к уровню освоения образовательной программы……	**5**
3. Внутренние факторы, способствующие активизации самостоятельной работы	**7**
4. Виды самостоятельной работы …….	**8**
5. Организация СРС…….	**10**
6. Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы……	**20**
7. Требования к учебно-методическому обеспечению самостоятельной работы студентов……	**29**
8. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста…….	**32**
Список используемой литературы……	**35**

1.Общие положения

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. Любой вид занятий, создающий условия для зарождения самостоятельной мысли, познавательной активности студента связан с самостоятельной работой. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа студентов – это средство вовлечения студента в самостоятельную познавательную деятельность, формирующую у него психологическую потребность в систематическом самообразовании.

Сущность самостоятельной работы студентов как специфической педагогической конструкции определяется особенностями поставленных в ней учебно-познавательных задач. Следовательно, самостоятельная работа – это не просто самостоятельная деятельность по усвоению учебного материала, а особая система условий обучения, организуемых преподавателем.

Основные задачи самостоятельной работы:

- развитие и привитие навыков студентам самостоятельной учебной работы и формирование потребностей в самообразовании;

- освоение содержания дисциплины в рамках тем, выносимых на самостоятельное изучение студента;

- осознание, углубление содержания и основных положений курса в ходе конспектирования материала на лекциях, отработки в ходе подготовки к семинарским и практическим занятиям;

- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий, при написании курсовых и дипломной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Активная самостоятельная работа студентов возможна только при наличии серьезной и устойчивой мотивации. Самый сильный мотивирующий фактор - подготовка к дальнейшей эффективной профессиональной деятельности.

2. Требования к уровню освоения образовательной программы

Объектом профессиональной деятельности выпускника по направлению подготовки бакалавриата 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» являются земельные ресурсы, используемые в различных отраслях народного хозяйства, их распределение по категориям земель, землевладениям и землепользованиям, правовой режим землепользования, количественная и качественная характеристики, управление и контроль за их состоянием и использованием, а также объекты недвижимости, включая земельные участки, находящиеся в границах городов и других поселений, их правовой статус, регистрация, оценка, контроль использования; городская среда; кадастровые информационные системы; проектно-техническая документация.

Выпускник по направлению подготовки бакалавриата 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» должен знать:

— методы проектирования и проведения технико-экономических расчетов; принципы землеустройства, земельного кадастра и городского кадастра; технологии проектирования; постановления, распоряжения, приказы вышестоящих и других органов;

— методические и нормативные материалы по землеустройству, земельному кадастру и городскому кадастру;

— стандарты, технические условия и другие руководящие материалы по разработке и оформлению проектно-сметной документации; технические средства проектирования в землеустройстве, земельном и городскому кадастрах, основы патентоведения;

— передовой отечественный и зарубежный опыт землеустройства, земельного и городского кадастров;

— технические, экономические, экологические и социальные требования к проектам (схемам) землеустройства и автоматизированным системам земельного и городского кадастров;

— законы, указы, постановления, приказы, методические и нормативные материалы по вопросам землеустройства организации государственного земельного и городского кадастров и автоматизированных кадастровых систем; перспективы их развития; организацию экономического планирования и оперативного регулирования производства;

— структуру проектных предприятий и кадастровых организаций, производственные и функциональные связи между его подразделениями;

— задачи и содержание земельно-кадастровых систем; порядок разработки системы государственного земельного и городского кадастров; прогнозов, планов, схем и проектов землеустройства, технических и рабочих проектов;

— экономико-математические и статистические методы и модели;

— средства вычислительной техники, коммуникаций и связи; порядок постановки задач, их алгоритмизации;

— методы определения экономической эффективности землеустройства; внедрения кадастровых систем и технологий;

— стандарты унифицированной системы проектной и кадастровой документации;

— порядок разработки и оформления технической документации;

— основы экономики, организации производства, труда и управления в землеустройстве и земельном кадастре, основы трудового законодательства, правила и нормы охраны труда.

Государственным образовательным стандартом предусмотрено 8640 часов теоретического обучения (240 з.е).

Срок освоения основной образовательной программы подготовки выпускника при очной форме обучения составляет 208 недель, в том числе: теоретическое обучение, включая научно-исследовательскую работу студентов, практикумы, в том числе лабораторные - 177 недель; экзаменационные сессии 23 недели; практики: 30 недель; итоговая государственная аттестация, включая подготовку и защиту выпускной квалификационной работы (проекта) 6 недель; каникулы (включая 8 недель последипломного отпуска) 31 неделя.

Максимальный объем учебной нагрузки студента устанавливается 54 часа в неделю, включая все виды его аудиторной и внеаудиторной (самостоятельной) учебной работы.

Объем аудиторных занятий студента при очной форме обучения не должен превышать в среднем за период теоретического обучения 24 часов в неделю. При этом в указанный объем не входят обязательные практические занятия по физической культуре и занятия по факультативным дисциплинам. При очно-заочной (вечерней) форме обучения объем аудиторных занятий должен быть не менее 10 часов в неделю.

Следует заметить, что самостоятельная работа в пределах теоретического обучения составляет 4150 часов. Учебные практики составляют 16 недель, из расчета 36 часов в неделю самостоятельная работа составляет 576 часов. В период экзаменационной сессии самостоятельная работа студента в среднем составляет 25-30 часов. Не составляет исключение и выпускная квалификационная работа, где самостоятельная работа может составлять в среднем 500 часов. В итоге, за весь период обучения самостоятельная работа студентов составляет более 5000 часов. Для эффективного использования этого времени при подготовке дипломированного специалиста необходимо рационально его использовать, грамотно организовать работу и иметь мотивацию для ее реализации.

3. Внутренние факторы, способствующие активизации самостоятельной работы

Среди них можно выделить следующие:

1. Полезность выполняемой работы. Если студент знает, что результаты его работы будут использованы в лекционном курсе, в методическом пособии, в лабораторном практикуме, при подготовке публикации или иным образом, то отношение к выполнению задания существенно меняется в лучшую сторону и качество выполняемой работы возрастает. При этом важно психологически настроить студента, показать ему, как необходима выполняемая работа.

Другим вариантом использования фактора полезности является активное применение результатов работы в профессиональной подготовке. Так, например, если студент получил задание на дипломную (квалификационную) работу на одном из младших курсов, он может выполнять самостоятельные задания по ряду дисциплин гуманитарного и социально-экономического, естественно-научного и общепрофессионального циклов дисциплин, которые затем войдут как разделы в его квалификационную работу.

Материальные стимулирующие факторы могут выражаться в надбавках к основной стипендии, номинированные на именные стипендии, участие в конкурсах научно-исследовательских работ, где в качестве приза могут выступать материальные поощрения.

2. Участие студентов в творческой деятельности. Это может быть участие в научно-исследовательской, опытно-конструкторской или методической работе, проводимой на кафедре.

3. Участие в олимпиадах по учебным дисциплинам, конкурсах научно-исследовательских или прикладных работ и т.д.

4. Использование мотивирующих факторов контроля знаний (накопительные оценки, рейтинг, тесты, нестандартные экзаменационные процедуры). Эти факторы при определенных условиях могут вызвать стремление к состязательности, что само по себе является сильным мотивационным фактором самосовершенствования студента.

5. Поощрение студентов за успехи в учебе и творческой деятельности (стипендии, премирование, поощрительные баллы) и санкции за плохую учебу. Например, за работу, сданную раньше срока, можно проставлять повышенную оценку, а в противном случае ее снижать.

6. Индивидуализация заданий, выполняемых как в аудитории, так и вне ее, постоянное их обновление.

7. Мотивационным фактором в интенсивной учебной работе и, в первую очередь, самостоятельной является личность преподавателя. Преподаватель может быть примером для студента как профессионал, как творческая личность. Преподаватель может и должен помочь студенту раскрыть свой творческий потенциал, определить перспективы своего внутреннего роста.

4. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации,

содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

— формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);

— написание рефератов;

— подготовка к лабораторным работам, их оформление;

— выполнение микроисследований;

— подготовка практических разработок;

— выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;

— выполнение конкретного задания в период прохождения учебной практики;

— компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов;

— подготовка докладов и презентаций для конкурсов НИРС и конкурсов профессионального мастерства;

— подготовка к контрольным мероприятиям, таким как текущий контроль знаний в виде проверочных тестов или расчетно-графических работ, зачетов, экзаменов;

— выполнение курсовой работы или проекта;

— подготовка выпускной квалификационной работы.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

— текущие консультации;

— прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);

— прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);

— выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);

— выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);

— прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);

— выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

5. Организация СРС

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории контролируется усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам, тестового контроля знаний, опроса студентов и т.д.

На практических и лабораторных занятиях различные виды СРС позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

На практических занятиях не менее 1 часа из двух (50% времени) отводится на самостоятельное решение задач. Лабораторные занятия строятся следующим образом:

1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены).

2. Беглый опрос.

3. Решение 1-2 типовых задач.

4. Самостоятельное решение задач.

5. Проверка решения задач с обязательной работой над ошибками. Лабораторная или практическая работа считается выполненной при условии отсутствия ошибок.

Для проведения занятий необходимо иметь большой банк заданий и задач для самостоятельного решения, причем эти задания могут быть дифференцированы по степени сложности. В зависимости от дисциплины или от ее раздела можно использовать два пути:

1. Давать определенное количество задач для самостоятельного решения, равных по трудности, а оценку ставить за количество решенных за определенное время задач.

2. Выдавать задания с задачами разной трудности и оценку ставить за трудность решенной задачи.

По результатам самостоятельного решения задач следует выставлять по каждому занятию оценку.

При проведении лабораторных работ и учебных практик студенты могут выполнять СРС как индивидуально, так и малыми группами, каждая из которых разрабатывает свою задачу. Выполненная задача затем рецензируется преподавателем и членами бригады. Публичное обсуждение и защита своего варианта повышают роль СРС и усиливают стремление к ее качественному выполнению. Данная система организации практических занятий позволяет вводить в задачи научно-исследовательские элементы, упрощать или усложнять задания.

Активность работы студентов на обычных практических занятиях может быть усилена введением новой формы СРС, сущность которой состоит в том, что на каждую задачу студент получает свое индивидуальное задание (вариант), при этом условие задачи для всех студентов одинаковое, а исходные данные различны. Перед началом выполнения задачи преподаватель дает лишь общие методические указания (общий порядок решения, точность и единицы измерения определенных величин, имеющиеся справочные материалы и т.п.). Выполнение СРС на занятиях с проверкой результатов преподавателем приучает студентов грамотно и правильно выполнять технические расчеты, пользоваться вычислительными средствами и справочными данными. Изучаемый материал усваивается более глубоко, у студентов меняется отношение к лекциям, так как без понимания теории предмета, без хорошего конспекта трудно рассчитывать на успех в решении задачи. Это улучшает посещаемость как практических, так и лекционных занятий.

Выполнение лабораторного практикума, как и другие виды учебной деятельности, содержит много возможностей применения активных методов обучения и организации СРС на основе индивидуального подхода.

Любая лабораторная работа должна включать глубокую самостоятельную проработку теоретического материала, изучение методик проведения и планирование эксперимента, освоение измерительных средств, обработку и интерпретацию экспериментальных данных. При этом часть работ может не носить обязательный характер, а выполняться в рамках

самостоятельной работы по курсу. В ряд работ целесообразно включить разделы с дополнительными элементами научных исследований, которые потребуют углубленной самостоятельной проработки теоретического материала.

Разработка комплекса методического обеспечения учебного процесса является важнейшим условием эффективности самостоятельной работы студентов. К такому комплексу следует отнести тексты лекций, учебные и методические пособия, лабораторные практикумы, банки заданий и задач, сформулированных на основе реальных данных, банк расчетных, моделирующих, тренажерных программ и программ для самоконтроля, автоматизированные обучающие и контролирующие системы, информационные базы дисциплины или группы родственных дисциплин и другое. Это позволит организовать проблемное обучение, в котором студент является равноправным участником учебного процесса.

Результативность самостоятельной работы студентов во многом определяется наличием активных методов ее контроля. Существуют следующие виды контроля:

- входной контроль знаний и умений студентов при начале изучения очередной дисциплины;

- текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях;

- промежуточный контроль по окончании изучения раздела или модуля курса;

- самоконтроль, осуществляемый студентом в процессе изучения дисциплины при подготовке к контрольным мероприятиям;

- итоговый контроль по дисциплине в виде зачета или экзамена;

- контроль остаточных знаний и умений спустя определенное время после завершения изучения дисциплины.

В последние годы наряду с традиционными формами контроля - коллоквиумами, зачетами, экзаменами достаточно широко вводятся новые методы, то есть организация самостоятельной работы студентов производится на основе современных образовательных технологий. В качестве такой технологии в современной практике высшего профессионального образования часто рассматривается рейтинговая система обучения, позволяющая студенту и преподавателю выступать в виде субъектов образовательной деятельности, т.е. являться партнерами.

Тестовый контроль знаний и умений студентов, который отличается объективностью, экономит время преподавателя, в значительной мере освобождает его от рутинной работы и позволяет в большей степени сосредоточиться на творческой части преподавания, обладает высокой степенью дифференциации испытуемых по уровню знаний и умений и очень эффективен при реализации рейтинговых систем, дает возможность в значительной мере индивидуализировать процесс обучения путем подбора индивидуальных заданий для практических занятий, индивидуальной и самостоятельной работы, позволяет прогнозировать темпы и результативность обучения каждого студента.

Тестирование помогает преподавателю выявить структуру знаний студентов и на этой основе переоценить методические подходы к обучению по дисциплине, индивидуализировать процесс обучения. Весьма эффективно использование тестов непосредственно в процессе обучения, при самостоятельной работе студентов. В этом случае студент сам проверяет свои знания. Не ответив сразу на тестовое задание, студент получает подсказку, разъясняющую логику задания и выполняет его второй раз.

Следует отметить и все шире проникающие в учебный процесс автоматизированные обучающие и обучающе-контролирующие системы, которые позволяют студенту самостоятельно изучать ту или иную дисциплину и одновременно контролировать уровень усвоения материала.

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов,

материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой.

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. Первичное - эти внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не

должно остаться ни одного непонятного олова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача вторичного чтения полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой. Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

• Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

• Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

• Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).
• Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

• При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

•Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

• Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются

страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

• Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

• «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

• Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

— информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
— усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
— аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

— творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких ***видов чтения***:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает досконального освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;

2. Выделите главное, составьте план;

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя

студент должен:

– освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО/ГОС СПО) по данной дисциплине.

– планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.

– самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ГОС ВПО/ГОС СПО по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

– в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

– предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

– использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет

внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

6. Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы зияний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;

- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;

- привычная последовательность и систематичность деятельности;

- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов),* причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра*.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить

определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой

внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самопроверка.

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к экзаменам и зачетам.

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению

знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неутомительные занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

• Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

• Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

• Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

• Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

• Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Правила написания научных текстов (рефератов, курсовых и дипломных работ):

• Важно разобраться сначала, какова истинная цель Вашего научного текста - это поможет Вам разумно распределить свои силы, время и.

• Важно разобраться, кто будет «читателем» Вашей работы.

• Писать серьезные работы следует тогда, когда есть о чем писать и когда есть настроение поделиться своими рассуждениями.

• Как создать у себя подходящее творческое настроение для работы над научным текстом (как найти «вдохновение»)? Во-первых, должна быть идея, а для этого нужно научиться либо относиться к разным явлениям и фактам несколько критически (своя идея – как иная точка зрения), либо научиться увлекаться какими-то известными идеями, которые нуждаются в доработке (идея – как оптимистическая позиция и направленность на дальнейшее совершенствование уже известного). Во-вторых, важно уметь отвлекаться от окружающей суеты (многие талантливые люди просто «пропадают» в этой суете), для чего важно уметь выделять важнейшие приоритеты в своей учебно-исследовательской деятельности. В-третьих, научиться организовывать свое время, ведь, как известно, свободное (от всяких глупостей) время – важнейшее условие настоящего творчества, для

него наконец-то появляется время. Иногда именно на организацию такого времени уходит немалая часть сил и талантов.

• Писать следует ясно и понятно, стараясь основные положения формулировать четко и недвусмысленно (чтобы и самому понятно было), а также стремясь структурировать свой текст. Каждый раз надо представлять, что ваш текст будет кто-то читать и ему захочется сориентироваться в нем, быстро находить ответы на интересующие вопросы (заодно представьте себя на месте такого человека). Понятно, что работа, написанная «сплошным текстом» (без заголовков, без выделения крупным шрифтом наиболее важным мест и т, п.), у культурного читателя должна вызывать брезгливость и даже жалость к автору (исключения составляют некоторые древние тексты, когда и жанр был иной и к текстам относились иначе, да и самих текстов было гораздо меньше – не то, что в эпоху «информационного взрыва» и соответствующего «информационного мусора»).

• Объем текста и различные оформительские требования во многом зависят от принятых в конкретном учебном заведении порядков.

Содержание основных этапов подготовки курсовой работы

Курсовая работа - это самостоятельное исследование студентом определенной проблемы, комплекса взаимосвязанных вопросов, касающихся конкретной финансовой ситуации.

Курсовая работа не должна составляться из фрагментов статей, монографий, пособий. Кроме простого изложения фактов и цитат, в курсовой работе должно проявляться авторское видение проблемы и ее решения.

Рассмотрим основные этапы подготовки курсовой работы студентом.

Выполнение курсовой работы начинается с выбора темы.

Затем студент приходит на первую консультацию к руководителю, которая предусматривает:

- обсуждение цели и задач работы, основных моментов избранной темы;
- консультирование по вопросам подбора литературы;
- составление предварительного плана;
- составление графика выполнения курсовой работы.

Следующим этапом является работа с литературой. Необходимая литература подбирается студентом самостоятельно.

После подбора литературы целесообразно сделать рабочий вариант плана работы. В нем нужно выделить основные вопросы темы и параграфы, раскрывающие их содержание.

Составленный список литературы и предварительный вариант плана уточняются, согласуются на очередной консультации с руководителем.

Затем начинается следующий этап работы - изучение литературы. Только внимательно читая и конспектируя литературу, можно разобраться в основных вопросах темы и подготовиться к самостоятельному (авторскому) изложению содержания курсовой работы. Конспектируя первоисточники, необходимо отразить основную идею автора и его позицию по исследуемому вопросу, выявить проблемы и наметить задачи для дальнейшего изучения данных проблем.

Систематизация и анализ изученной литературы по проблеме исследования позволяют студенту написать первую (теоретическую) главу.

Выполнение курсовой работы предполагает проведение определенного исследования. На основе разработанного плана студент осуществляет сбор фактического материала, необходимых цифровых данных. Затем полученные результаты подвергаются анализу, статистической, математической обработке и представляются в виде текстового описания, таблиц, графиков, диаграмм. Программа исследования и анализ полученных результатов составляют содержание второй (аналитической) главы.

В третьей (рекомендательной) части должны быть отражены мероприятия, рекомендации по рассматриваемым проблемам.

Рабочий вариант текста курсовой работы предоставляется руководителю на проверку. На основе рабочего варианта текста руководитель вместе со студентом обсуждает возможности доработки текста, его оформление. После доработки курсовая работа сдается на кафедру для ее оценивания руководителем.

Защита курсовой работы студентов проходит в сроки, установленные графиком учебного процесса.

Рекомендации по подготовке к защите курсовой работы

При подготовке к защите курсовой работы студент должен знать основные положения работы, выявленные проблемы и мероприятия по их устранению, перспективы развития рассматриваемой экономической ситуации.

Защита курсовой работы проводится в университете при наличии у студента курсовой работы, рецензии и зачетной книжки. Оценка - дифференцирована. Преподаватель оценивает защиту курсовой работы и заполняет графу "оценка" в ведомости и в зачетной книжке.

Не допускаются к защите варианты курсовых работ, найденные в Интернет, сканированные варианты учебников и учебных пособий, а также копии ранее написанных студенческих работ.

7. Требования к учебно-методическому обеспечению самостоятельной работы студентов

Для нормальной самостоятельной работы студент должен быть обеспечен достаточным количеством учебных пособий разного вида. Чем более разнообразны учебные пособия, тем более успешна будет самостоятельная работа студента, так как каждый может выбрать себе учебное пособие по силам, по склонностям, по материальным возможностям. Должны быть пособия краткие и подробные, с неглубокими и глубокими теоретическими обоснованиями, теоретического и практического содержания. Нужны справочники, конспекты-справочники, учебники. Часть учебных пособий должна находиться в учебной студенческой библиотеке, часть пособий студент должен иметь возможность купить для личного пользования в книжном магазине учебного заведения. Основная часть учебных пособий должна быть в бумажном виде (книги, брошюры, чертежи и т.д.).

Наряду с ними нужно создавать, накапливать в учебных фондах и продавать учебные пособия электронного вида. Этот вид учебных пособий в обозримом будущем не может стать основным и вряд ли когда-нибудь станет. Это – вспомогательные, дополнительные учебные пособия, используемые в основном для заочного, дистанционного образования. Количество учебных пособий в учебном фонде библиотеки должно быть таким, чтобы каждый студент мог получить хотя бы один из рекомендованных учебников.

Многоуровневая система высшего образования должна предоставлять человеку условия для развития его потенциальных возможностей и наиболее полного удовлетворения потребности личности в самореализации. Поэтому на каждом из уровней подготовки самостоятельная работа студентов (СРС) есть обязательное условие, которое должно быть соблюдено для достижения проектируемых результатов обучения. Правильная (психологически и дидактически обоснованная) организация СРС при изучении каждой

дисциплины – это один из основных педагогических путей развития и становления творческих качеств личности учащегося на каждом уровне обучения.

Из дидактики следует, что для непрерывного развития учащегося и становления его как творческой личности все элементы содержания образования (знания, умения и навыки, опыт творческой и оценочной деятельности), выделенные в рамках определенной дисциплины, должны быть им усвоены с установкой на перенос и активное использование. Поэтому на первом уровне обучения каждого студента по каждой учебной дисциплине нужно снабдить комплектом учебно-методических материалов, помогающих ему организовывать самостоятельную работу. В такой комплект обязательно должны входить: программа, адаптированная для студента; учебная литература (учебник, задачник, руководство по выполнению лабораторных работ); система заданий для самостоятельной работы студентов; методические указания по организации самостоятельной работы при выполнении заданий по разным видам занятий, включая и курсовые работы (проекты).

На втором и третьем уровнях обучения их следует снабдить методическими указаниями по выполнению выпускной работы, завершающей подготовку специалиста. Программа должна содержать: обоснование необходимости изучения дисциплины, написанное в убеждающей и понятной для студентов форме; четкую формулировку цели изучения и задач, которые должны быть решены для достижения общей цели; последовательность тем и разделов курса дисциплины, обязательных для данного направления подготовки; перечень видов деятельности, которые должен освоить студент, выполняя задания по дисциплине; перечни методологических и предметных знаний, общеобразовательных и специальных умений (с указанием уровня их усвоения), которыми необходимо овладеть в процессе изучения данной дисциплины; сроки и способы текущего, рубежного и итогового контроля уровня усвоения знаний сформированности умений.

Учебная литература по содержанию и последовательности представления материала должна соответствовать программе. Объем, научный уровень и стиль изложения должны позволять каждому студенту самостоятельно усвоить приведенный в ней материал за время, отведенное на его изучение, и овладеть знаниями, умениями, видами деятельности, перечисленными в программе. Для обеспечения терминологической однозначности в системе знаний, усваиваемых студентом, каждое учебное пособие (или другой вид учебной литературы) должно содержать словарь основных терминов, используемых в нем.

Задания для самостоятельной работы должны быть конкретными. Их содержание, соответствуя программе, должно знакомить студентов с современными методами решения задач данной дисциплины.

Структура заданий должна соответствовать принципу доступности: от известного к неизвестному и от простого к сложному, а трудоемкость – времени, выделенному программой на самостоятельную работу по изучению данной темы. В заданиях следует указывать знания и умения, которыми должен овладеть студент по мере их выполнения. Кроме того, в них нужно включать вопросы для самоконтроля и взаимного контроля, тесты и контрольные вопросы для оценки и самооценки уровня усвоения знаний, сформированности умений.

Методические указания по организации СРС на каждом уровне обучения должны способствовать непрерывному развитию у них рациональных приемов познавательной деятельности в процессе изучения конкретных дисциплин. Основное назначение всех методических указаний – дать возможность каждому студенту перейти от деятельности, выполняемой под руководством преподавателя, к деятельности, организуемой самостоятельно, к полной замене контроля со стороны преподавателя самоконтролем. Поэтому они должны содержать подробное описание рациональных приемов выполнения перечисленных видов деятельности, критериев оценки выполненных работ, а также рекомендации по эффективному использованию консультаций и по работе при подготовке и сдаче экзаменов.

Каждый из названных учебно-методических материалов влияет в большей степени на один из этапов усвоения знаний и видов деятельности, но одновременно способствует осуществлению других этапов и более полной реализации их задач.

Так, программа с четко выделенной целью и перечнем задач, влияющих на ее достижение, определяет мотивационный этап и способствует организации деятельности на всех остальных, указывая последовательность изучаемых разделов, сроки контроля. Учебная литература служит информационной основой, прежде всего для ориентировочного этапа. В то же время работа с литературой усиливает мотивацию, если изложение материала по уровню сложности соответствует зоне ближайшего развития студента; помогает осуществлению исполнительского и контрольного этапов, если в ней указаны особенности выполнения заданий, даны контрольные вопросы.

Задания для самостоятельной работы организуют исполнительский этап, задавая последовательность видов деятельности, необходимых для усвоения знаний и приобретения умений. Так как задания содержат средства контроля, то они определяют и контрольный этап.

Вопросы и задачи в заданиях требуют от студента не только воспроизведения знаний, но и проявления творчества, формируют и развивают его опыт творческой деятельности. Это расширяет основы мотивации, усиливает и укрепляет ее. В целом содержание и структура заданий, отвечающих перечисленным требованиям, позволяет регулярно занимающимся студентам получать удовлетворение от самостоятельно выполненной работы. Такой эмоциональный фон, в свою очередь, формирует положительное отношение к выполненному делу, а через него – и к изучаемой дисциплине.

Методические указания по организации СРС способствуют грамотному и рациональному осуществлению исполнительского этапа, обеспечивают контрольный этап. Для этого виды деятельности, активно используемые при изучении дисциплины, должны быть подробно описаны в указаниях с выделением последовательности действий и даже операций. В этом случае сами виды деятельности становятся предметом изучения, что дает верное направление ориентировочному этапу и, безусловно, усиливает мотивацию обучения. Работа студентов с такими методическими указаниями позволяет им уже при изучении общенаучных дисциплин усвоить полную и обобщенную ориентировочную основу для каждого из таких видов деятельности, как работа с литературой, проведение эксперимента, решение задач.

Таким образом, создание для каждой учебной дисциплины рассмотренного комплекта учебно-методических материалов обеспечивает обязательные этапы усвоения знаний, видов деятельности, опыта творчества, Снабжение таким комплектом каждого студента – необходимое условие полной реализации в процессе обучения всех возможностей СРС как вида познавательной деятельности, метода и средства учения и преподавания.

7. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к

моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этом пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо

постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебе с будущей профессиональной деятельности.

Список используемой литературы

1. ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ направление подготовки бакалавриата 21.03.02 «Землеустройство и кадастры.
2. Методические рекомендации для студентов по организации самостоятельной работы./ ГОУ ВПО «Московский государственный гуманитарный университет
им. М.А. Шолохова». 2010г.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. Проректора по учебно-методическому комплексу _____ В.В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
и задания к практико-ориентированной работе №1

Направление подготовки/ специальность - ***21.03.02 Землеустройство и кадастры***

Направленность (профиль) - ***Кадастр недвижимости***

форма обучения: очная, заочная

Автор: Акулова Е.А., доцент, к.т.н.

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Геодезии и кадастров	Горно-технологического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Акулова Е.А.	Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 9.09.2024	Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Оглавление

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ 3
2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ 8
3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ПЛОЩАДИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ 10
4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ СЕКЦИЙ 16
5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ КОНТУРОВ ЗЕМЕЛЬНЫХ УГОДИЙ И СОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЛИКАЦИИ 20
6. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛА ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ 24
7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ РАБОТ 25
7.1. Вычисление общей площади землепользований 25
7.2. Вычисление площадей контуров земельных угодий и составление экспликации 27
8. КОНТРОЛЬ РАБОТ 30
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 32
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 33
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 34
ПРИЛОЖЕНИЕ 4 35
ПРИЛОЖЕНИЕ 5 37
ПРИЛОЖЕНИЕ 6 41
ПРИЛОЖЕНИЕ 7 41
ПРИЛОЖЕНИЕ 8 46
ПРИЛОЖЕНИЕ 9 47
ПРИЛОЖЕНИЕ 10 51
ПРИЛОЖЕНИЕ 11 50
ПРИЛОЖЕНИЕ 12 51
ПРИЛОЖЕНИЕ 13 54
ПРИЛОЖЕНИЕ 14 55
ПРИЛОЖЕНИЕ 15 56
ПРИЛОЖЕНИЕ 16 60
ПРИЛОЖЕНИЕ 17 61
ПРИЛОЖЕНИЕ 18 70
Список использованной литературы 76

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Согласно статьи 7 ФЗ №221 «О государственном кадастре недвижимости» [1] площадь является одной из уникальных характеристик объекта недвижимости. Площадь определяется для таких объектов недвижимости как земельный участок, здание и помещение [1]. В рыночной экономике земля приобретает свойства товара и может служить объектом имущественных сделок. Поэтому при ведении рыночных отношений предъявляются повышенные требования к системе государственного учета и регистрации земельных участков и их рационального использования.

В данной работе процедура вычисления площадей как количественной характеристики объекта недвижимости будет применена к земельным участкам категории земель сельскохозяйственного назначения. В целях рационального использования таких земель выполняется внутрихозяйственное землеустройство. В частности при проведении внутрихозяйственного землеустройства выполняется организация рационального использования гражданами и юридическими лицами земельных участков для осуществления сельскохозяйственного производства, а также разработка мероприятий по улучшению сельскохозяйственных угодий, освоению новых земель, восстановлению и консервации земель, рекультивации нарушенных земель, защите земель от эрозии, селей, подтопления, заболачивания, вторичного засоления, иссушения, уплотнения, загрязнения отходами производства и потребления, радиоактивными и химическими веществами, заражения и других негативных воздействий [2].

Для выполнения мероприятий внутрихозяйственного землеустройства необходимо получить информацию о количественном и качественном состоянии земель. Для этого выполняются следующие виды работ:

почвенные, геоботанические и другие обследования и изыскания; оценка качества земель; инвентаризация земель [2]. Вычисление площадей участков производится в процессе инвентаризации земель, которая проводится для выявления неиспользуемых, нерационально используемых или используемых не по целевому назначению и не в соответствии с разрешенным использованием земельных участков, других характеристик земель.

Согласно статьи 13 [2] под инвентаризацией земель понимается учет и оценка земель. В частности инвентаризация земель проводится для уточнения или установления местоположения: объектов землеустройства; их границ (без закрепления на местности) и определения площадей. Кроме того, инвентаризация земель проводится для выявления неиспользованных земель, нерационально используемых земель или используемых не по целевому назначению, а также не в соответствии с разрешенным использованием земельных участков. Инвентаризация земель проводится в том случае, если существует угроза возникновения процессов, оказывающих негативное воздействие на состояние земель, в отношении групп земельных участков или на отдельных земельных участках. Инвентаризация земель может проводиться: на территории РФ; на территориях субъектов РФ; на территориях муниципальных образований; на территориях других административно - территориальных образований; на землях отдельных категорий; в территориальных зонах, в отношении групп земельных участков или на отдельных земельных участках.

Инвентаризация земель сельскохозяйственного назначения проводится в целях уточнения наличия и состояния земель сельскохозяйственного назначения, выявления неиспользуемых и неэффективно используемых земель, определение качественных характеристик (закочкаренность, закустаренность, залесенность) угодий. Инвентаризации подлежат пашни, культурные и улучшенные кормовые угодья.

Как отмечалось выше в число задач инвентаризации входит процедура определения местоположения сельскохозяйственных угодий и вычисление их площадей. По результатам инвентаризации подготавливается землеустроительное дело, в состав которого входит экспликация земель сельскохозяйственного предприятия по видам собственности и угодьям.

Под определением площади понимают совокупность измерительных и вычислительных операций в результате которых получают ее значение. С точки зрения математики площадь — численная характеристика двумерной (плоской или искривлённой) геометрической фигуры [3], показывающая размер этой фигуры. Площадь – одна из количественных характеристик плоских геометрических фигур и поверхностей и составляет часть плоскости, ограниченной ломаной или кривой замкнутой линией. Согласно Федеральному закону «О государственном кадастре недвижимости» площадью земельного участка является площадь геометрической фигуры, образованной проекцией границ земельного участка на горизонтальную плоскость [1].

В зависимости от хозяйственной значимости земельных участков, наличия планово-картографического материала, топографических условий местности и требуемой точности применяют различные способы определения площадей: аналитический, графический и механический. Площади можно также определять на ЭВМ по цифровой модели местности по специальным программам.

Для вычисления площадей контуров земельных угодий используются новые или откорректированные планово-картографические материалы.

В качестве планово-картографического материала для выполнения курсового проекта студентам предлагается учебная карта масштаба 1:25 000 с нанесенными границами земельного участка сельскохозяйственного предприятия (пример см. приложение 1). Для выполнения индивидуального

задания карта выдается преподавателем.

Работы по вычислению площадей контуров земельных угодий выполняются в следующей последовательности:

-подготовительные работы;

-вычисление общей площади землепользования;

-вычисление площадей секций;

-вычисление площадей контуров земельных угодий и составление экспликаций;

-оформление дела по вычислению площадей;

- составление сметы расходов на вычисление площадей;

-контроль работ.

Для выполнения работы выберите вариант. Если Ваша фамилия начинается с гласной буквы – Ваш вариант первый, если фамилия начинается с согласной буквы – Ваш вариант второй. В курсовой работе необходимо знать цену деления планиметра. Для первого варианта принимается значение 0,5000Х га/ед. планиметра, где вместо «Х» подставьте количество букв в Вашей фамилии. Для второго варианта примите значение 0,4999Х га/ед. планиметра.

Пример

Иванов И.И. выбирает первый вариант с ценой деления планиметра р=0,50006 га/ед. планиметра.

Сидоров С.С. выбирает второй вариант с ценой деления планиметра р=0.49997

2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

В состав подготовительных работ входят:

а) ознакомление с информацией о землепользовании, о самостоятельных участках, входящих в состав землепользования, о землях постороннего пользования, о направлении и ширине дорог, наличии и характеристиках инженерных коммуникаций, находящихся в пределах границ землепользования. Информация указана в задании по курсовому проектированию и на исходном топографическом материале - карте масштаба 1:25 000 (пример см. приложения 1, данные – приложение 2);

б) уточнение на планово-картографическом материале (копии с оригинала на мягкой основе) границ землепользования, границ населенных пунктов, посторонних землепользователей, составление списка угодий (Приложение 3), входящих в землепользование с выпиской площадей;

в) перенесение на планово-картографический материал, на котором будет производиться вычисление площадей, уточненных границ. Границы землепользования сельскохозяйственного предприятия оттеняются сплошной линией красной тушью толщиной 1,0 мм; посторонних пользователей – коричневой (пример см. приложение 1);

г) подготовка кальки контуров.

Исходные данные для расчета курсовой работы для 1 и 2 варианта см. Приложение 16, 17.

Для кальки контуров используется восковка. Она должна быть копией планово-картографического материала, используемого для вычисления площадей, при этом условные знаки земельных угодий вычерчиваются разреженно. Вместо восковки можно использовать копию карты. При выполнении индивидуального задания калька контуров составляется на ксерокопии карты.

Оформление кальки контуров состоит из вычерчивания:

-картуша, в котором указывается наименование хозяйства, района и области;

-масштаба плана в нижней части кальки контуров на свободном месте;

-надписей: «Вычертил», «Площади вычислил», «Проверил», «Работу принял», «Дата» – в правом нижнем углу.

При использовании копии карты необходимо оформить условные обозначения на свободном месте.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ПЛОЩАДИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ

Площади землепользования, его частей и участков могут быть определены аналитическим, графическим и механическим способами.

Данным курсовым проектом предусматривается вычисление общей площади землепользования аналитическим способом.

Аналитическим способом общая площадь определяется в том случае, когда границы землепользования имеют геодезические данные, к которым относят координаты характерных точек границы земельного участка или углы и длины. Вычисления производятся по величинам, измеренным в натуре (горизонтальным проложениям линий и углам), или по их функциям (координатам характерных точек).

По измеренным в натуре величинам площадь землепользования определяется, если число поворотных точек его границ не превышает шести.

В рамках данной работы для вычисления общей площади землепользования необходимо определить координаты углов поворота границ земельного участка (пример см. приложение 1). При выполнении индивидуального задания координаты определяются по карте, выданной преподавателем.

Порядок определения координат точек границы землепользования представлен в приложении 4.

Координаты поворотных точек записывают в таблицу 1.

Общая площадь землепользования по координатам поворотных точек его границ определяется с помощью вычислительных машин без каких-либо промежуточных записей. Для вычислений можно воспользоваться калькулятором, персональным компьютером (программами EXCEL, MathCAD и др.). Формулы для определения площади аналитическим способом представлены в приложении 5. Пример вычисления площади землепользования по координатам, выполненный в программном модуле CREDO приведен в приложении 6. В техническом отчете по курсовому проекту необходимо подробно описать способ и технологию вычислений в том или ином программном продукте, привести необходимые таблицы и схемы.

Таблица 1

Координаты точек углов поворота землепользования ОПХ «Пригородное», определенные картометрическим методом

№ углов поворота границ	Координаты	
	X, м	**Y, м**
1	6014460	2401780
2	6013140	2402130
3	6012120	2401765
4	6010760	2401980
5	6010260	2401755
6	6009400	2400960
7	6008080	2401045
8	6007290	2400150
9	6007370	2399050

№ углов поворота границ	Координаты	
	X, м	**Y, м**
10	6007440	2397420
11	6008060	2397140
12	6009780	2396870
13	6011610	2396580
14	6011850	2397085
15	6011945	2397125
16	6012860	2398370
17	6013670	2399830
18	6014230	2400500

В случае, когда землепользование занимает более 1/5 площади трапеции, необходимо произвести уравнивание площадей внутри трапеции (листа топографической карты), для этого выделяются секции внутри данной трапеции и определяются их площади (рис.1).

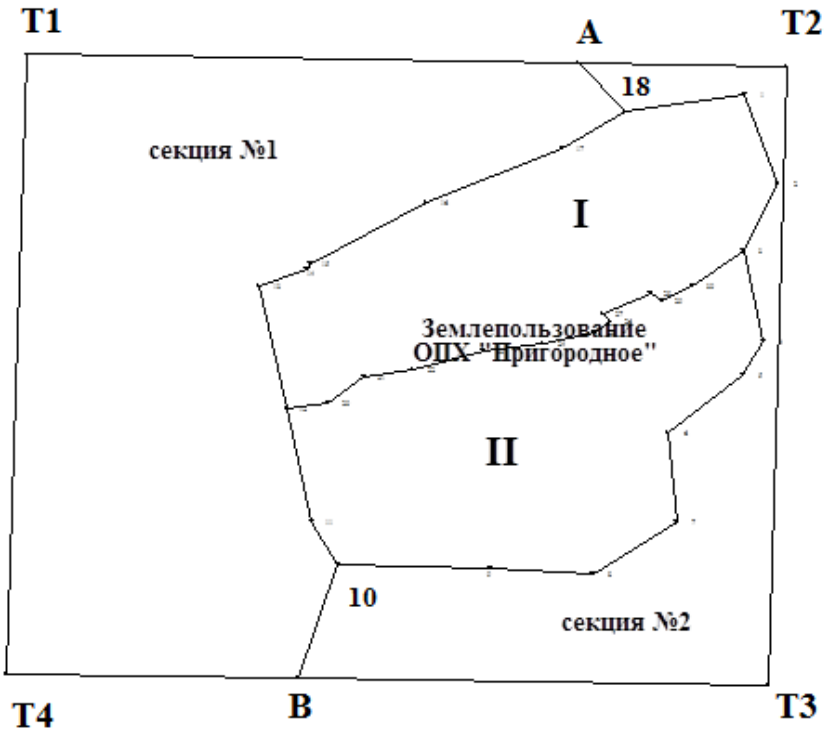


Рис. 1. Выделение секций в пределах топографической трапеции

Площади частей трапеций определяют аналитическим способом. При этом площади частей трапеций (рис.1) вычисляют по координатам точек А, 18, 1-10, В, Т3, Т2 (секция № 2) и А, 18, 17-10, В, Т4, Т1 (секция № 1). Координаты точек землепользования 1-18 выбирают из ведомости координат (таблица 1), координаты точек вершин трапеции Т1, Т2, Т3, Т4 – из специальных таблиц (Таблицы координат Гаусса-Крюгера) [4].

Координаты вершин Т1, Т2, Т3, Т4 выбирают из таблиц соответственно значениям геодезических координат вершин углов топографической трапеции (пример см. приложение 1, 7). В нашем примере дана трапеция масштаба 1:25000 N-32-63-Б-г. Эта трапеция находится в пределах второй шестиградусной зоны. Долгота осевого меридиана шестиградусной зоны вычисляется по формуле

$$L_0 = 6° \cdot N_{зоны} - 3°, \qquad (1)$$

где L_0 – долгота осевого меридиана шестиградусной зоны;

$N_{зоны}$ – номер шестиградусной зоны (определяется по координатам Y, или номенклатуре трапеции).

Пример

В нашем случае на карте определим номер зоны по координате точки с номером один Y_1=**2**401780 м, что соответствует второй координатной зоне. По формуле 1 вычисляем долготу осевого меридиана шестиградусной зоны

$$L_0 = 6° \cdot 2 - 3° = 9°,$$

Лист карты (трапеция) ограничена параллелями, широты которых $\boldsymbol{\varphi_{южн.} = 54^0 10'}$ и $\boldsymbol{\varphi_{сев.} = 54^0 15'}$, и меридианами с долготами $\boldsymbol{\lambda_{ЗАП.} = 7^0 22' 30''}$ и $\boldsymbol{\lambda_{ВОСТ.} = 7^0 30' 00''}$ (см. приложение 1).

Долготы западной и восточной рамок трапеции относительно осевого меридиана зоны могут быть вычислены по формулам:

$$l_{зап} = \lambda_{ЗАП} - L_0, \qquad (2)$$
$$l_{вост} = \lambda_{ВОСТ} - L_0.$$

где $l_{зап}$, $l_{вост}$ – долготы западной и восточной рамок трапеции относительно осевого меридиана шестиградусной зоны

Пример

$$l_{зап.} = 7^0 22' 30'' - 9^0 = -1^0 37' 30'',$$
$$l_{вост.} = 7^0 30' - 9^0 = -1^0 30'.$$

Соответственно геодезическим координатам $\varphi_{сев.}, \varphi_{южн.}, l_{зап.}, l_{вост.}$, из таблиц (приложение 7) выбирают значения координат *X, Y* углов трапеции.

$X_{T1} = 6015067{,}5м$ $X_{T2} = 6014887{,}1м$ $X_{T3} = 6005612{,}2м$ $X_{T4} = 6005792{,}7м$

$Y'_{T1} = -105918{,}4м$ $Y'_{T2} = -97771{,}4м$ $Y'_{T3} = -97968{,}4м$ $Y'_{T4} = -106131{,}8м$

Значения координат *Y*, выписанные из таблиц отрицательные, т.к. вершины трапеции расположены к западу от осевого меридиана шестиградусной зоны. Для перехода к «условным» координатам *Y*, представленным на топографической карте, необходимо к выписанным значениям прибавить 500 километров и слева дописать номер зоны. В результате координаты углов рамки трапеции запишутся в виде :

$X_{T1} = 6015067{,}5м$ $X_{T2} = 6014887{,}1м$ $X_{T3} = 6005612{,}2м$ $X_{T4} = 6005792{,}7м$

$Y_{T1} = 2394081{,}6м$ $Y_{T2} = 2402228{,}6м$ $Y_{T3} = 2402031{,}6м$ $Y_{T4} = 2393868{,}2м$

Координаты точек ***A*** и ***B***, находящихся на пересечении границ секций с рамками трапеции, вычисляют по кратчайшим расстояниям **Т4-*B*** и **Т2-*A***, взятым от вершин трапеции графически по плану. В нашем случае, отрезок **Т4-*B*** измеренный на карте составляет 125 мм, что соответствует 3125 м на

местности; отрезок **Т2-*А*** измеренный на карте составляет 89 мм, что соответствует 2225 м на местности. Вычисление координат точек ***А*** и ***В*** производят путем линейного интерполирования по формулам:

$$X_A = X_{T2} - \frac{T_2 A}{T_1 T_2}(X_{T2} - X_{T1}) \ ,$$

$$Y_A = Y_{T2} - \frac{T_2 A}{T_1 T_2}(Y_{T2} - Y_{T1}) \ , \qquad (3)$$

$$X_B = X_{T4} + \frac{T_4 B}{T_3 T_4}(X_{T3} - X_{T4}) \ ,$$

$$Y_B = Y_{T4} + \frac{T_4 B}{T_3 T_4}(Y_{T3} - Y_{T4}) \ .$$

В этих формулах T_1T_2, T_3T_4 есть размеры рамок трапеции, выбираемые из специальных таблиц или вычисляемые по координатам вершин трапеции по формулам:

$$T_1T_2 = \sqrt{(X_{T2} - X_{T1})^2 + (Y_{T2} - Y_{T1})^2} = 8148.997 м \ , \qquad (4)$$

$$T_3T_4 = \sqrt{(X_{T4} - X_{T3})^2 + (Y_{T4} - Y_{T3})^2} = 8165{,}395 м \ ,$$

$$X_{T2} - X_{T1} = -180.4 м \ , \qquad Y_{T2} - Y_{T1} = 8147.0 м \ ,$$

$$X_{T3} - X_{T4} = -180.5 м \ , \qquad Y_{T3} - Y_{T4} = 8163.4 м \ .$$

Подставив вычисленные значения в формулы (3), получим значения координат:

Пример

$$X_A = 6014887{,}1 - \frac{2225}{8148{,}997}(-180{,}4) = 6014936{,}360 м \ ,$$

$$Y_A = 24022286 - \frac{2225}{8148{,}997}(8147{,}0) = 2400004{,}145 м \ ,$$

$$X_B = 60057927 + \frac{3125}{8165{,}395}(-180{,}5) = 6005723{,}620 м \ ,$$

$$Y_B = 23938682 + \frac{3125}{8165{,}395}(8163{,}4) = 2396992{,}437 м \ .$$

Если точки, координаты которых вычисляют, находятся на западной или восточной рамках, то линейное интерполирование дает близкие к точным результаты. Если точки находятся на северной или южной рамках (как в нашем случае), представляющих дуги, которые нельзя принять в качестве прямых, то в вычисленные по формулам (3) абсциссы следует внести со знаком «минус» поправки, приведенные в таблице 2 .

Таблица 2

Значения поправок в абсциссу после линейного интерполирования

Ближайшее расстояние от вершины трапеции, м	Поправки в абсциссу, м	Поправки в дирекционный угол, мин	Ближайшее расстояние от вершины трапеции, м	Поправки в абсциссу, м	Поправки в дирекционный угол, мин
1000	0,1	0,3	4000	1,8	1,5
2000	0,4	0,7	5000	2,8	1,9
3000	1,0	1,1	6000	4,0	2,3

После внесения поправок получим окончательные значения координат точек ***A*** и ***B.***

Пример

$$X_A = 6014936{,}360 - 0{,}4 = 6014935{,}960 м\,,$$

$$Y_A = 2400004{,}145 м\,,$$

$$X_B = 6005723{,}620 - 1{,}0 = 6005722{,}620 м\ ,$$

$$Y_B = 2396992{,}437 м\,.$$

Далее вычисляют площади западной и восточной секций внутри трапеции и общую площадь землепользования (приложение 9) .

Вычисленная сумма площадей частей землепользования в пределах трапеции сравнивается с площадью трапеции, взятой из таблиц (приложение 7).

В нашем случае площадь трапеции по таблицам «Гаусса….» [4] равна 7566 га (приложение 7).

Сумма площадей землепользования и секций составляет:

$$S_{ВЫЧ.} = S_{ОБЩ.} + S_{ВОСТ.} + S_{ЗАП.} = 2746{,}74 + 1357{,}94 + 3462{,}89 = 7567{,}57 га .$$

Ошибка вычисления площади составляет:

$$\Delta S = S_{ВЫЧ.} - S_{ТАБЛ.} = 7567.57 - 7566.00 = +1.57 га .$$

Допустимое расхождение (невязка) определяется по формуле :

$$f_{ДОП} = \pm \frac{S}{500} + \frac{Y^2}{4000} S \ , \qquad (5)$$

где S – площадь трапеции в гектарах;

Y – ордината центра трапеции (расстояние от осевого меридиана) ***<u>в сотнях километров.</u>***

Y может быть вычислена по координатам углов рамок трапеции, найденным ранее.

Пример

$$Y = \frac{Y_{T1} + Y_{T2} + Y_{T3} + Y_{T4}}{4} =$$

$$= \frac{(-105918{,}4) + (-97771{,}1) + (-97968{,}4) + (-106131{,}8)}{4} = -101947{,}5 м$$

$$f_{ДОП.} = \pm \frac{7566}{500} + \frac{(-1{,}019)^2}{4000} \cdot 7566 = \pm 17{,}10 га .$$

Полученная ошибка вычисления площади ΔS не превосходит допустимого значения.

Невязка распределяется с обратным знаком пропорционально площадям частей землепользования, секций:

Пример

$$\delta s_{ЗАП.} = \frac{-1{,}57}{7567{,}57} \cdot 3462{,}89 = -0{,}72 га \ , \quad S_{ЗАП.} = 3462{,}89 - 0{,}72 = 3462{,}17 га ,$$

$$\delta s_{ВОСТ.} = \frac{-1{,}57}{7567{,}57} \cdot 1357{,}94 = -0{,}28 га \ , \quad S_{ВОСТ.} = 1357{,}94 - 0{,}28 = 1357{,}66 га ,$$

$$\delta s_{ОБЩ.} = \frac{-1{,}57}{7567{,}57} \cdot 2746{,}74 = -0{,}57 га \ , \quad S_{ОБЩ.} = 2746{,}74 - 0{,}57 = 2746{,}17 га .$$

Контроль:

$$S_{УРАВ..} = S_{ОБЩ.} + S_{ВОСТ.} + S_{ЗАП.} = 2746{,}17 + 1357{,}66 + 3462{,}17 = 7566га.$$

На схеме трапеции размером 10 х 10 см показываются границы землепользования и выделенных секций. Землепользование и части нумеруются.

Ниже трапеции выписываются:

-номера и увязанные в пределах трапеции площади частей каждого землепользования и их сумма, площадь трапеции, взятая из таблиц.

Схема подписывается ее составителем и лицом, проверившим выполнение этих работ, указывается дата (приложение 8). Порядок вычислений указывается в пояснительной записке.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ СЕКЦИЙ

Во избежание ошибок, накапливаемых при обводе планиметром большого количества контуров, площадь землепользования (участка, планшета) разбивается на части-секции (рис.1, секции I и II).

Границы секций совмещаются с границами землепользования, населенных пунктов, орошаемых и осушенных земель, а также с реками, ручьями, дорогами и границами контуров земельных угодий.

Орошаемые и осушенные земли выделяются в отдельные секции.

В отдельные секции выделяются также крупные населенные пункты. Включение одного и того же населенного пункта частями в две или несколько секций не допускается.

Площадь каждой секции не должна превышать двух-трех квадратных дециметров на плане и включать в себя не более 200 контуров земельных угодий.

Определение площадей секций производилось механическим способом. Студентам предлагается выполнить обработку результатов измерений,

полученных при измерении площадей секций полярным планиметром.

В исходных данных по курсовому проектированию (пример в приложении 5) в колонке (3) записаны отчеты планиметра (И), в верхней текстовой части ведомости записывают цену деления планиметра согласно варианту, в примере *p*=0.50033. В графе 4 необходимо найти разность отчетов согласно формулам, записанным в шапке таблицы.

Пример

В приложении 5 в графе 4 по секции I находим разности отсчетов планиметра, которые, по сути, являются значениями площади земельного участка выраженные в единицах планиметра:

S_1=(И2 – И1)=3653-0821=2835 ед.,

S_2 =(И4 – И3)=9325-6488=2837 ед..

В графе 5 вычисляют среднее значение площади в единицах планиметра:

$$S_{\text{СР}} = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{2835+2837}{2} = 2836 \text{ ед.}$$

В колонке 6 записывается площадь секции с учетом цены деления планиметра в гектарах.

$$S = S_{CP}(ед.) \cdot p\left(\frac{га}{ед}\right) = 2836 \cdot 0{,}50033 = 1418{,}94\ га$$

Результат округляется до второго десятичного знака.

Аналогично вычисляют площадь по секции II.

В строке «итого» колонки 6 вычисляется сумма площадей секции I и секции:

$\sum S$ =1418,94+1327,88=2746,82 га.

$S_{\text{ОБЩ}}$ – уравненное значение землепользования равное 2746,17 га, вычисленное на предыдущем этапе.

Для проверки вычислений и поиска грубых ошибок необходимо вычислить невязку:

$$\Delta S = \sum S - S_{ОБЩ} = 2746{,}82 - 2746{,}17 = 0{,}65 \text{ га}$$

Допустимое расхождение (невязка) между суммой площадей секций и общей площадью землепользования определяется по формуле

$$f_{ДОП} = \pm \frac{1}{500} S, \qquad (6)$$

где S – площадь землепользования в гектарах.

Невязка распределяется с обратным знаком по секциям пропорционально их площадям. Пример вычислений и оформления представлен в приложении 10.

На кальке контуров границы секций оттеняются красной тушью, дробью указывается: в числителе – номер секции (римскими цифрами), в знаменателе – площадь секции (арабскими цифрами) (см. приложение 11).

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ КОНТУРОВ ЗЕМЕЛЬНЫХ УГОДИЙ И СОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЛИКАЦИИ

Перед началом вычисления площадей контуров земельных угодий производится их нумерация. Контуры угодий нумеруются черной тушью. При значительной контурности (50 и более контуров на 1 кв. дм. плана) нумерация по каждой секции начинается с единицы.

Вкрапленные контуры нумеруются порядковыми номерами или буквами русского алфавита вслед за номером контура, в который они вкраплены. Линейные контуры: дороги, канавы, речки, ручьи, лесополосы и др., ширина которых в масштабе плана не выражается, могут не нумероваться. В данной курсовой работе все контуры пронумерованы.

Площади угодий, определенных планиметром вычисляют аналогично вычислению площадей секций с учетом цены деления планиметра.

Вычисленные значения записывают в колонку 6 (см. табл. 3 и приложение 12).

Площади мелких (до 2 см^2 на плане) контуров земельных угодий определяются палеткой дважды путем изменения положения палетки относительно контура. Из двух результатов берется среднее значение площади контура. Тип применяемой палетки выбирается студентом самостоятельно. Рекомендуется применять квадратную палетку с основанием 2 мм. Палетку создают на прозрачном материале и накладывают на участок, площадь которого необходимо определить. Определяемая площадь рассчитывается по формуле:

$$S = N \cdot S_0, \qquad (7)$$

где S – определяемая площадь земельного участка, N – количество квадратов палетки в пределах границы участка, S_0– площадь квадрата палетки (определяется в зависимости от масштаба карты).

На рисунке 2 показан пример применения квадратной палетки для контура с номером 9а.

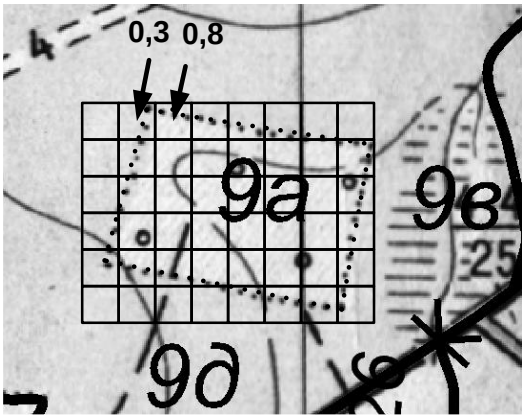


Рис. 2 Определение площади квадратной палеткой

Пример

Основание палетки 2 мм составляет 50 метров в масштабе 1:25000 (в 1 мм карты – 25 метров местности).

Площадь квадрата палетки размером 2 х 2 мм составляет 2500 м^2.

$$S_0 = 50\text{м} \cdot 50\text{м} = 2500\ \text{м}^2.$$

Подсчет количества квадратов палетки в пределах контура участка начинают с вычисления целого количества квадратов, в нашем случае оно равно девятнадцати. Далее подсчитывают количество неполных квадратов (в долях полного квадрата).

$$N = 19 + 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}9 + 0{,}5 = 19 + 9{,}6 = 28{,}6$$

$$S = N \cdot S_0 = 28{,}6 \cdot 2500\ \text{м}^2 = 71500\ \text{м}^2 = 7{,}15\ \text{га}$$

Для контроля палетку накладывают повторно и аналогично определяют площадь при другом положении палетки. Расхождение площадей, определенных дважды не должно превышать 4%. Если разность площадей в пределах допустимого значения, то за окончательный результат принимают среднее значение.

Площади линейных контуров (дорог, канав, речек, ручьев и т.д.) вычисляются аналитическим способом, при этом длина их дана в задании, а ширина берется с плана или из приложения 2 (см. табл.3 и приложение 12).

Пример

В таблице 3 вкрапленное угодие - дорога полевая

$S = 2500\ \text{м} \cdot 4\text{м} = 10000\ \text{м}^2 = 1{,}0\ \text{га}$.

Площади вкрапленных контуров записывают в колонку 10 (см. табл.3).

Таблица 3

Вычисление площадей контуров ситуации планиметром
Землепользование ОПХ «Пригородное»

Планшет N-32-63-Б-г планиметр № 1224
R = 67.4; p = 0.50033 M = 1:25000

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий
							В гектарах			
1	***2***	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
	Секция I									
1	*Лес*	*1672*	*124*	*124,5*	*62,29*	*4*	*+0,53*	*62,82*		*62,82*
		1796								
		2045	*125*							
		2170								
	Пашня	*0417*								
2		*1340*	*923*							
		2263	*925*	*924*	*462,30*	*10*	*+1,32*	*463,62*		*435,03*
		3188								
	в том числе:									
а.	*сенокос чистый*		*(палеткой)*		5/6				*5,5*	*5,5*
б.	*сенокос чистый*		*(палеткой)*		7/8				*7,5*	*7,5*
в.	*кустарник*		*(палеткой)*		6/6				*6*	*6*
г.	*кустарник*		*(палеткой)*		4/6				*5*	*5*
	ЛЭП (13 столбов)		*13 х 30 м²*						*0,04*	*0,04*
	автодорога		*(графически)*		*2875 х 9*				*2,6*	*2,6*
	ручей		*(графически)*		*2250 х 4*				*0,9*	*0,9*
	дорога полевая		***(графически)***		***2500 х 4***				***1,0***	***1,0***
	сарай								*0,05*	*0,05*
								всего:	***28,59***	463,62

……

				ИТОГО:	***1323,35***	***32***	***+4,22***			
				Должно быть:	***1327,57***					
				Невязка:	***-4,22***					

$$f_{доп} = \pm 0.7 \cdot p\sqrt{П} + 0.05\frac{M}{10000}\sqrt{P} = \pm 0{,}7 \cdot 0{,}50033 \cdot \sqrt{5} + 0{,}05\frac{25000}{10000}\sqrt{1327{,}57} = \pm 7{,}24 га$$

Линейные контуры, разделяющие земельные угодья и не отображающиеся в масштабе плана, при вычислении площадей включаются в площадь одного их смежных контуров.

Площади населенных пунктов, не являющихся самостоятельными секциями, вычисляются как отдельные контуры.

Площади вкрапленных мелких контуров, не отображающихся в масштабе плана (лесные колки, ямы, постройки и т.п.), определяются из расчета по 0.01 гектара для масштаба 1:10 000 и 0.05 гектара для масштаба 1:25 000 на каждый контур (см. табл. 3, угодие «сарай»).

Все площади земельных угодий, вкрапленных и линейных контуров, вычисляются и записываются с точностью до второго десятичного знака (см. табл. 3).

По каждой секции подсчитывается сумма вычисленных контуров угодий, которая сравнивается с увязанной общей площадью секции, и затем определяется невязка (см. табл. 3 и приложение 12).

Пример

Сумма вычисленных контуров угодий секции I составляет

ИТОГО: 1323,35 га, уравненное значение – **Должно быть:** 1327,57 га, **Невязка:** 1323,35-1327,57= -4,22 га.

Допустимое расхождение (невязка) определяется по формуле:

$$f_{ДОП} = \pm 0.7p\sqrt{П} + 0.05\frac{M}{10000}\sqrt{S}\,, \qquad (8)$$

где p – цена деления планиметра;

$П$ – число контуров в секции, площади которых вычислены планиметром;

M – знаменатель численного масштаба плана;

S- площадь секции.

Пример вычисления невязки представлен в таблице 3 и приложении 12.

Невязка распределяется на контуры, площади которых определены планиметром, пропорционально коэффициентам поправок, которые выбирают из специальных таблиц (Приложение 13) и записывают в колонку 7 (см. приложение 12). Выписанные коэффициенты по сути являются весами при вычислениях поправок, вносимых в каждое измеренное планиметром угодие. Пример расчета представлен в приложении 12.

Площади вкрапленных контуров угодий вычисляются вместе с площадями контуров, в которые они вкраплены. В этом случае сначала вычисляется общая площадь контура (колонка 9 табл. 3 и приложение 12), а затем отдельно площади вкрапленных контуров (колонка 10 табл. 3 и приложение 12).

Площадь основного угодья определяется как разность между общей площадью контура и суммой площадей вкрапленных контуров.

Пример

В таблице 9 общая площадь контура 2 («пашня») составляет 463,62 га, сумма площадей вкрапленных контуров – 28,59 га, площадь основного угодья

$$S = 463,62 - 28,59 = 435,03 \text{ га.}$$

Вычисленное значение площади основного угодия записывают в колонку 11 (см. табл. 3 и приложение 12), в эту же колонку переписывают площади вкрапленных угодий. Для контроля вычисляют сумму площадей основного угодия и вкрапленных угодий. Значение суммы в 11 колонке должно быть равным значению угодия, записанному в 9 колонке.

Все записи при вычислении площадей земельных угодий ведутся на бланках установленной формы (Приложения 10, 12). В ведомости вычисления площадей контуров земельных угодий записи в 1,2 и 11 графах производятся чернилами, во всех остальных графах – карандашом.

Во второй графе ведомости дается название видов и подвидов угодий в соответствии с «Указаниями по государственной регистрации землепользований и государственному учету земель» (Приложение 14), утвержденными МСХ СССР 19 июля 1972 года, и действующими условными знаками.

Порядок записей в ведомости при вычислении и увязке площадей контуров ситуации показан в приложении 12.

Увязанные площади контуров земельных угодий (графа 11 ведомости вычислений площадей, см. приложение 12) при контурности плановой основы до 50 контуров на один квадратный дециметр выписываются дробью с точностью до второго десятичного знака на кальку контуров черной тушью, числителем которой является номер контура (см. приложение 11). При большей контурности площади контуров не выписываются.

По каждой секции из ведомости вычисления площадей производится выборка площадей контуров по угодьям и составляется экспликация (приложение 15).

6. ОФОРМЛЕНИЕ ДЕЛА ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЛОЩАДЕЙ

Все материалы по вычислению площадей земельных угодий на каждое землепользование формируются в дело по вычислению площадей в одном экземпляре.

В дело по вычислению площадей включаются следующие документы:

а) пояснительная записка, в которой дается характеристика планово-картографического материала, способы вычислений общей площади землепользования, площадей секций, контуров угодий и оценка точности;

б) копия планово-картографического материала с нанесенными границами землепользования и секций внутри землепользования;

в) ведомости вычислений общей площади землепользования, трапеции, секций и контуров земельных угодий;

г) экспликация земель;

д) калька контуров;

е) материалы контроля работ по вычислению площадей (лист замечаний).

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОИМОСТИ РАБОТ

7.1. Вычисление общей площади землепользований

Содержание работы. Подбор планово-картографического материала. Определение способа вычисления, выполнение необходимых измерений и вычислительных работ по определению общей площади землепользования. Освидетельствование, исправление замечаний, формирование материалов.

Конечная продукция: материалы вычислений, сформированные в дело (архивный экземпляр).

Единица измерения: «а» - землепользование; «в» - 1 тыс.га общей площади.

Таблица 4

Стоимость работ по вычислению площади землепользования

	а	в
Цена, руб.	56	34
Общественно-необходимые затраты труда (ОНЗТ), чел.дн.	1,0	0,6

Примечания:

1. Показатель «в» измеряется общей площадью землепользования, вычисляемой механическим, графическим, по координатам или иными способами.

2. Цены рассчитаны на вычисление общей площади в объеме более 1,0 тыс.га. При меньшей площади в показатель «а» вводится понижающий коэффициент:

$$К=1,0-0,9 \cdot (1-n), \qquad (9)$$

где n - площадь землепользования, тыс.га.

3. Показатель «в» рассчитан на вычисление общей площади в объеме 1,0 тыс.га. При иной площади в показатель «в» вводится коэффициент, рассчитываемый в соответствии с нижеследующим.

Таблица 5

Расчет коэффициента при вычислении коэффициента «в»

Общая площадь землепользования, тыс. га	Формулы для расчета повышающего (понижающего) коэффициента
менее 1,0	К= 1,0 – 0,70 (1 – n)
1-10	К= 1,0 + 0,40 (n - 1)
10-50	К= 4,60 + 0,20 (n – 10)
50-100	К= 12,60 + 0,10 (n – 50)
Свыше 100	К= 16,60 + 0,03(n - 100)

где «n» (во всех вышеприведенных формулах) – общая площадь землепользования, тыс.га.

4. Цены рассчитаны для условий, при которых землепользование представлено одним массивом. При иных условиях в показатель «а» вводится коэффициент: К=1,0+0,20(n-1), где «n» - количество обособленных массивов (участков), по которым общие площади определяются в отдельности.

Ценами не предусмотрено нанесение на плановую основу границ землепользований или уточнение их местоположения. При необходимости

выполнения такой работы затраты определяются дополнительно.

7.2. Вычисление площадей контуров земельных угодий и составление экспликации

Содержание работы. Подбор планово-картографических и других материалов. Разбивка площадей секций и увязка их с общей площадью. Вычисление площадей контуров угодий и увязка их с площадью секции. Оформление кальки контуров: нанесение границ секций, выписывание их номеров и площадей, выписывание номеров контуров и их площадей, вычерчивание рамки, зарамочных надписей, штампа и других элементов оформления.

Составление экспликации земель, написание пояснительной записки, систематизация материалов, формирование их в дело, освидетельствование, внесение исправлений, размножение экспликации и пояснительной записки.

Конечная продукция: материалы вычисления площадей (архивный экз.) и экспликация земель с пояснительной запиской, сформированные в дело 2 экз., из которых 1 экз. архивный.

Единица измерения: «а» – объект; «в» - 1 кв.дм. плана.

Таблица 6

Стоимость работ по вычислению площадей контуров земельных угодий

	а	в
Цена, руб.	139	117
ОНЗТ, чел. дн.	2,5	2,1

Примечания:

1. В показатель «в» вводится коэффициент

$$K=1,25+0,01\cdot (n-80), \qquad (10)$$

где n - количество контуров на кв.дм плана.

При этом считаются все виды контуров, включая линейные (дороги, каналы,

и т.д.) и вкрапленные в другие угодья, вычисляемые графическим, механическим или иными способами.

2. Цены рассчитаны на вычисление площадей в объеме более 10,0 кв.дм плана. При меньшем объеме в показатель «а» вводится понижающий коэффициент

$$К=1,0-0,09 \cdot (10-n), \qquad (11)$$

где n – объем вычисления, кв.дм плана.

3. Цены рассчитаны на условия, при которых объект вычисления размещен на 1 планшете (листе). При иных условиях в показатели «а» и «в» вводится коэффициент

$$К=1,0+0,02 \cdot (n-1), \qquad (12)$$

где n – количество планшетов по объекту.

4. Цены рассчитаны на условия, при которых объект вычисления расположен в одном массиве. При иных условиях в показатели «а» и «в» вводится коэффициент

$$К=1,0+0,1 \cdot (n-1), \qquad (13)$$

где n – количество обособленных (чересполосных) массивов, по которым экспликация земель составляется в отдельности.

5. Цены рассчитаны на условия, при которых на объекте вычисления расположено одно землепользование. При ином их количестве в показатели «а» и «в» вводится коэффициент

$$К=1,0+0,10 \cdot (n-1), \qquad (14)$$

где n – количество землепользований, по которым экспликация земель составляется в отдельности.

6. При вычислении площадей отдельных контуров и внесении соответствующих дополнений в материалы вычисления площадей (корректировка вычисления площадей) в показатель «в» вводится коэффициент: 0,10 – при перевычислении площадей контуров в объеме до 5%

их количества; 0,20 – при 10%; 0,40 – при 20%; 0,60 – при 30%; 0,80 – при 40%; 1,0 – при 50% и более (коэффициент в конкретных условиях определяется интерполированием вышеуказанных величин).

7. При вычислении площадей на синтетических пленках, неотбеленных фотопланах и откорректированных планшетах к показателю «в» применяется коэффициент 1,20.

8. При вычислении площадей почвенных (геоботанических) контуров с составлением соответствующей кальки контуров и экспликации по всем видам угодий в разрезе почвенных (геоботанических) контуров к показателю «в» применяется коэффициент 0,70.

9. Цены на составление поконтурной ведомости с размножением и формированием в дело – 2 экз. определяются дополнительно по настоящей таблице и примечаниям 1, 2, 3, 4, 5. При этом в показатели «а» и «в» вводится коэффициент 0,20.

10. Цены на проведение подготовительных работ (с выездом на объект), на изготовление плановой основы, используемой для кальки контуров, на уточнение или нанесение на плановую основу границ землепользований определяются дополнительно.

11. При составлении отдельных экспликаций по населенным пунктам, орошаемым или осушенным землям цены определяются на каждый вид экспликации дополнительно и рассчитываются по настоящей таблице с применением к показателям «а» и «в» коэффициента 0,10.

Пример составления сметы расходов на вычисление площади землепользования представлен в приложении 17.

8. КОНТРОЛЬ РАБОТ

Контроль производится преподавателем. Результаты проверки фиксируются в «Листе замечаний», в котором указываются выявленные недостатки и сроки их устранения (в случае, если курсовой проект был сдан в установленные сроки).

В процессе проверки устанавливается:

- наличие в деле необходимых документов, а также правильность и полнота их заполнения;

- соответствие подлиннику и качество оформления кальки контуров (наличие и ясность границ землепользований, их назначений и условных номеров; границ, номеров и площадей секций и контуров угодий, штампа, подписи исполнителя);

- правильность и соответствие нумерации и классификации контуров земельных угодий на кальке контуров и в ведомости вычисления площадей;

- качество и полнота оформления ведомости площадей;

- соблюдение технических требований вычисления и увязки общей площади землепользования, площадей секций и контуров земельных угодий;

- правильность вычисления общей площади землепользования, площадей секций и контуров земельных угодий проверяется выборочно, не менее 20 %. Результаты проверки качества вычисления площадей отражаются в ведомости контрольных вычислений. Допустимость расхождений контрольного вычисления площади контура, участка с ранее вычисленной площадью определяется по формуле

$$\Delta S = \pm 2S + 0{,}04\frac{M}{10000}\sqrt{P}\,, \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{p}$ – цена деления планиметра;

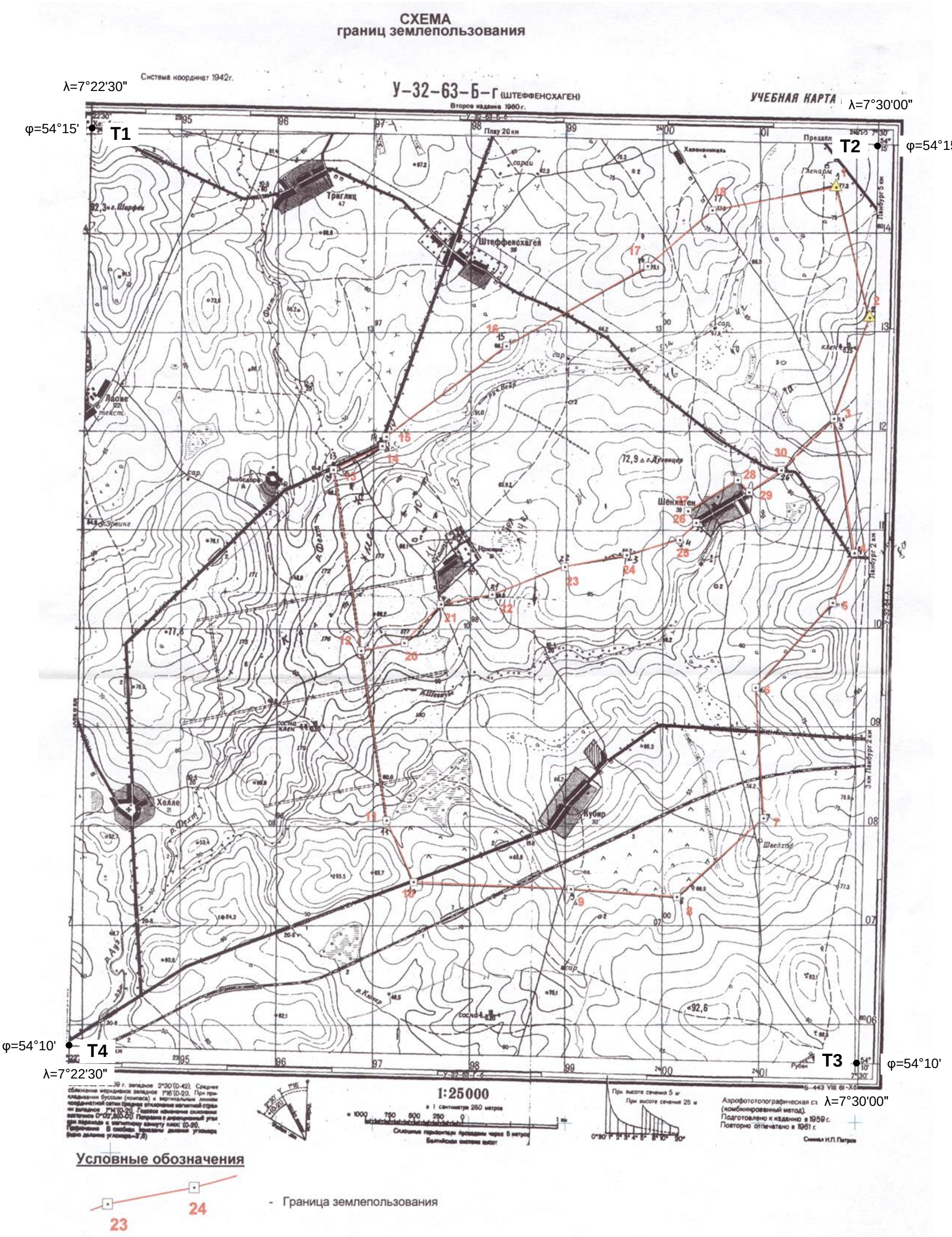
$\boldsymbol{S}$ – площадь контура в гектарах;

M – знаменатель численного масштаба плана;

- правильность составления экспликаций земель секций.

После устранения недочетов (в случае если курсовой проект был сдан в установленные сроки) дается оценка качества выполненной работы.

СХЕМА
границ землепользования



ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сведения
о ширине линейных контуров и площадей земельных угодий, изображенных на плановом материале внемасштабным условным знаком

Проселочная дорога	10 м
Полевая дорога	4 м
Полоса леса	10 м
Полоса кустарника	4 м
Вал раскорчевки	10 м
Река	8 м
Ручей	4 м
Обрыв	1 м
Яма	0.02 га
Межа	4 м
Колки	0.02 га
10 деревьев	0.01 га
Опора ЛЭП	30 $м^2$

Согласовано:

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Справка

о землях постороннего пользования,

расположенных в границах землепользования

ОПХ «Пригородное»

_____

_____района, _____области, края

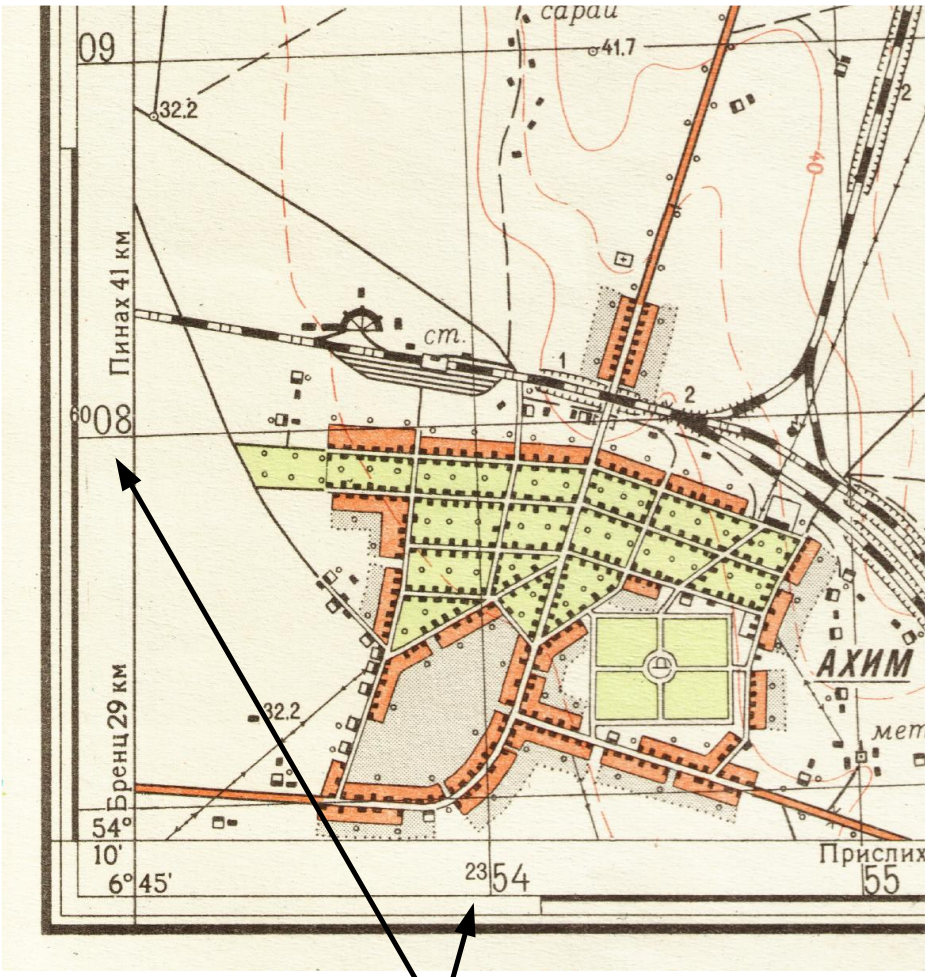
по состоянию на 10 апреля 2015 года

№№ п/п	Наименование землепользователей	Местоположение участка	Площадь участка (га)
1.	Управление железной дороги (Ламбургская дистанция пути) *Полоса отвода железной дороги Ламбург-Ахим*		5,5 га
2.	Управление автомобильных дорог *Автодорога Ламбург-Прислих*		5,5 га
3.	Управление автомобильных дорог *Автодорога Ламбург-Хек*		5,0 га
4.	Ламбургский лесхоз (лес «Кальте»)	в западной части участка	128 га
5.	Фермерское хозяйство, владелец – Иванов И.И.	на северо-восток от н.п. Кубир	20 га
6.	Ламбургские электросети *Линия ЛЭП 110 Кв*	вдоль автодороги Ламбург-Хек	0,4 га
		Итого:	164,4 га

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Определение координат пунктов

Прямоугольные координаты точек определяют по карте с помощью координатной (километровой) сетки, оцифрованной на ее выходах за внутренними сторонами рамки карты (рис. 3).



Цифровое обозначение линий километровой сетки

Рис. 3. Оцифровка линий координатной сетки

По западной и восточной сторонам рамки карты указаны значения координаты *X* в километрах, отсчитанные от экватора. Например, 6008 км, 6009 км и т.д. Первые две цифры в значениях *X* подписываются только у крайней верхней и нижней линий координатной сетки.

По северной и южной сторонам рамки карты указаны значения

ординат *Y* в километрах. Любая точка на топографической карте находится в одном из квадратов координатной сетки.

Для определения координат точки Т1 (рис. 4) необходимо восстановить перпендикуляры на соответствующие стороны координатной сетки, измерить отрезки Δx, Δy и вычислить координаты по формулам:

$$X_{T1} = X_0 + \Delta x, \tag{16}$$

$$Y_{T1} = Y_0 + \Delta y,$$

где X_0, Y_0 – координаты юго-западного угла квадрата километровой сетки; $\Delta x, \Delta y,$ – измеренные приращения координат относительно юго-западного угла квадрата.

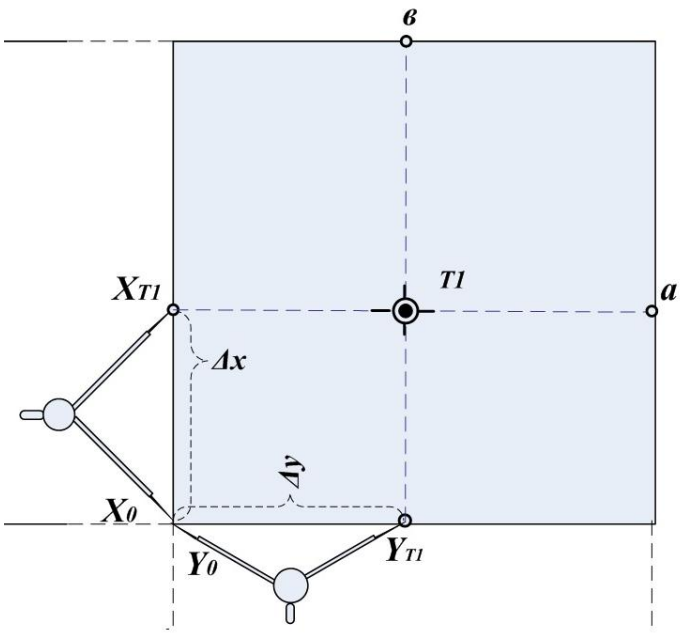


Рис. 4. Определение координат точки с использованием координатной сетки

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Определение площади аналитическим способом

$\boldsymbol{P}(\text{м}^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X_i} \cdot (\boldsymbol{Y_{i+1}} - \boldsymbol{Y_{i-1}})$ $\quad \boldsymbol{P}(\text{м}^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y_i} \cdot (\boldsymbol{X_{i-1}} - \boldsymbol{X_{i+1}})$ $\quad \boldsymbol{P}(\text{га}) = \frac{\boldsymbol{P}(\text{м}^2)}{10000}$

$\boldsymbol{X_i}$, $\boldsymbol{Y_i}$ – координаты вершин земельного участка в метрах

№ вершины полигона	X	Y_{i+1}-Y_{i-1}	$X_i \cdot (Y_{i+1}$-$Y_{i-1})$	Y	X_{i-1}-X_{i+1}	$Y_i \cdot (X_{i-1}$-$X_{i+1})$
1	2	3	4	5	6	7
1	6072850	690	1966500	4307250	-875	-6343750
2	6073020	1150	3473000	4307925	330	2615250
3	6072520	0	0	4308400	1010	8484000
4	6072010	-1165	-2341650	4307925	375	2971875
5	6072145	-675	-1447875	4307235	-840	-6077400
		Σ_1=	1649975		Σ_2=	1649975

$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \Sigma_1$= 824987,5 (м^2)= 82,5 (га) $\quad$ $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \Sigma_2$= 824987,5 (м^2)= 82,5 (га)

Примечание. В примере площадь определена для земельного участка, граница которого имеет пять характерных точек (пятиугольник).

Во вторую и пятую колонки записывают координаты X и Y соответствующих точек. В третьей колонке считают разность значений координат Y последующей и предыдущей точек. Например, для вершины с номером 1 в колонке три нужно вычислить разность координат Y вершин с номером 2 и номером 5 (Y_2- Y_5,) для вершины с номером 2 соответственно разность координат Y для третьей и пятой вершин (Y_3- Y_1)и т.д. В четвертой колонке вычисляют произведение значений представленных во второй и третьей колонках. В шестой колонке считают разность координат X предыдущей и последующей вершин. Например, для вершины с номером 1 в шестой колонке нужно вычислить разность координат X пятой и второй вершин (X_5- X_2,) для вершины с номером 2 соответственно (X_1- X_3) и т.д. В седьмой колонке аналогично находят произведение значений представленных

в пятой и шестой колонках. Затем вычисляют сумму всех значений, записанных в четвертой колонке (Σ_1) и седьмой колонке (Σ_2). Следующим этапом вычислений является расчет площади по формулам площади P_1 и P_2. Контроль: сумма Σ_1 должна быть равна сумме Σ_2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Каталог координат углов поворота границ земельного участка

(общая площадь землепользования)

Объект: ОПХ "Пригородное"

Система координат Государственная 1942 года

№ по каталогу	№ углов поворота границ	Координаты, м		Дирекцион. угол	Длина линии, м
		X	Y		
1	1	6014460.000	2401780.000	165° 09.0’	1365.613
2	2	6013140.000	2402130.000	199° 41.4’	1083.340
3	3	6012120.000	2401765.000	171° 01.0’	1376.890
4	4	6010760.000	2401980.000	204° 13.7’	548.293
5	5	6010260.000	2401755.000	222° 45.1’	1171.164
6	6	6009400.000	2400960.000	176° 18.9’	1322.734
7	7	6008080.000	2401045.000	228° 33.9’	1193.786
8	8	6007290.000	2400150.000	274° 09.6’	1102.905
9	9	6007370.000	2399050.000	272° 27.5’	1631.502
10	10	6007440.000	2397420.000	335° 41.7’	680.294
11	11	6008060.000	2397140.000	351° 04.7’	1741.063
12	12	6009780.000	2396870.000	350° 59.7’	1852.836
13	13	6011610.000	2396580.000	64° 34.8’	559.129

№ по каталогу	№ углов поворота границ	Координаты, м		Дирекцион. угол	Длина линии, м
		X	Y		
14	14	6011850.000	2397085.000	22° 50.0’	103.078
15	15	6011945.000	2397125.000	53° 41.2’	1545.073
16	16	6012860.000	2398370.000	60° 58.7’	1669.641
17	17	6013670.000	2399830.000	50° 06.6’	873.212
18	18	6014230.000	2400500.000	79° 48.8’	1300.500
19	1	6014460.000	2401780.000		

Площадь участка 27467438 кв.м. **(2746.7438 га)**

Периметр полигона 21121.052 м

Составил _____ Назаров И.В.

Проверил _____ Акулова Е.А.

п о я с N

А Б С Ц И С С Ы *X*

Долгота ±l / Широта B	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′30″	2°0′0″	Долгота ±l / Широта B
52° 0′	5 764 507,5	5 764 692,0	5 764 891,3	5 765 105,3	5 765 334,2	52° 0′
5	773 779,2	773 963,6	774 162,7	774 376,6	774 605,3	5
10	783 051,1	783 235,3	783 434,3	783 648,0	783 876,5	10
15	792 323,0	792 507,2	792 706,0	792 919,6	793 147,9	15
20	801 595,1	801 779,1	801 977,8	802 191,2	802 419,4	20
25	810 867,4	811 051,2	811 249,7	811 463,0	811 691,0	25
30	5 820 139,7	5 820 323,4	5 820 521,8	5 820 734,9	5 820 962,7	30
35	829 412,2	829 595,7	829 794,0	830 006,9	830 234,5	35
40	838 684,8	838 868,2	839 066,3	839 279,0	839 506,4	40
45	847 957,5	848 140,7	848 338,7	848 551,2	848 778,5	45
50	857 230,3	857 413,4	857 611,2	857 823,6	858 050,7	50
55	866 503,3	866 686,2	866 883,8	867 096,1	867 323,0	55
53° 0′	5 875 776,4	5 875 959,2	5 876 156,6	5 876 368,7	5 876 595,4	53° 0′
5	885 049,6	885 232,2	885 429,5	885 641,4	885 867,9	5
10	894 322,9	894 505,4	894 702,5	894 914,2	895 140,5	10
15	903 596,3	903 778,7	903 975,6	904 187,1	904 413,3	15
20	912 869,9	913 052,1	913 248,8	913 460,2	913 686,1	20
25	922 143,6	922 325,6	922 522,2	922 733,4	922 959,1	25
30	5 931 417,4	5 931 599,3	5 931 795,7	5 932 006,6	5 932 232,2	30
35	940 691,3	940 873,0	941 069,3	941 280,1	941 505,4	35
40	949 965,4	950 146,9	950 343,0	950 553,6	950 778,7	40
45	959 239,5	959 420,9	959 616,8	959 827,2	960 052,1	45
50	968 513,8	968 695,0	968 890,8	969 101,0	969 325,7	50
55	977 788,2	977 969,3	978 164,8	978 374,8	978 599,3	55
54° 0′	5 987 062,8	5 987 243,6	5 987 439,0	5 987 648,8	5 987 873,1	54° 0′
5	996 337,4	996 518,1	996 713,3	996 922,9	997 147,0	5
10	6 005 612,2	6 005 792,7	6 005 987,7	6 006 197,1	6 006 421,0	10
15	014 887,1	015 067,5	015 262,2	015 471,5	015 695,1	15
20	024 162,1	024 342,3	024 536,9	024 745,9	024 969,3	20
25	033 437,2	033 617,3	033 811,7	034 020,5	034 243,7	25
30	6 042 712,5	6 042 892,3	6 043 086,5	6 043 295,1	6 043 518,1	30
35	051 987,9	052 167,5	052 361,5	052 569,9	052 792,7	35
40	061 263,4	061 442,8	061 636,7	061 844,8	062 067,4	40
45	070 539,0	070 718,3	070 911,9	071 119,9	071 342,2	45
50	079 814,7	079 993,8	080 187,2	080 395,0	080 617,1	50
55	089 090,6	089 269,5	089 462,7	089 670,3	089 892,1	55
55° 0′	6 098 366,5	6 098 545,3	6 098 738,3	6 098 945,6	6 099 167,2	55° 0′
5	107 642,6	107 821,2	108 014,0	108 221,1	108 442,5	5
10	116 918,9	117 097,2	117 289,8	117 496,7	117 717,8	10
15	126 195,2	126 373,3	126 565,7	126 772,4	126 993,3	15
20	135 471,6	135 649,6	135 841,8	136 048,2	136 268,9	20
25	144 748,2	144 926,0	145 117,9	145 324,1	145 544,6	25
30	6 154 024,9	6 154 202,4	6 154 394,2	6 154 600,2	6 154 820,4	30
35	163 301,7	163 479,0	163 670,6	163 876,4	164 096,3	35
40	172 578,6	172 755,8	172 947,1	173 152,6	173 372,3	40
45	181 855,6	182 032,6	182 223,7	182 429,0	182 648,5	45
50	191 132,8	191 309,6	191 500,5	191 705,5	191 924,7	50
55	200 410,1	200 586,6	200 777,3	200 982,1	201 201,1	55
56° 0′	6 209 687,5	6 209 863,8	6 210 054,3	6 210 258,9	6 210 477,5	56° 0′
Широта B / ±l Долгота	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′0″	2°0′0″	Широта B / ±l Долгота

пояс N

ОРДИНАТЫ ± Y

Долгота ± l / Широта B	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′30″	2°0′0″	Долгота ± l / Широта B
52° 0′	103 015,9	111 600,0	120 184,0	128 767,9	137 351,6	52° 0′
5	102 824,5	111 392,6	119 960,7	128 528,6	137 096,3	5
10	102 632,8	111 185,0	119 737,1	128 289,0	136 840,8	10
15	102 441,0	110 977,2	119 513,2	128 049,1	136 584,9	15
20	102 248,9	110 769,1	119 289,1	127 809,0	136 328,8	20
25	102 056,6	110 560,7	119 064,7	127 568,6	136 072,3	25
30	101 864,0	110 352,1	118 840,1	127 327,9	135 815,6	30
35	101 671,3	110 143,3	118 615,2	127 087,0	135 558,6	35
40	101 478,3	109 934,3	118 390,1	126 845,8	135 301,3	40
45	101 285,2	109 725,0	118 164,7	126 604,3	135 043,7	45
50	101 091,8	109 515,5	117 939,1	126 362,5	134 785,8	50
55	100 898,2	109 305,8	117 713,2	126 120,5	134 527,6	55
53° 0′	100 704,4	109 095,8	117 487,1	125 878,2	134 269,2	53° 0′
5	100 510,3	108 885,6	117 260,7	125 635,7	134 010,4	5
10	100 316,1	108 675,1	117 034,0	125 392,8	133 751,4	10
15	100 121,6	108 464,5	116 807,2	125 149,7	133 492,1	15
20	99 926,9	108 253,5	116 580,0	124 906,3	133 232,5	20
25	99 732,0	108 042,4	116 352,6	124 662,7	132 972,6	25
30	99 536,9	107 831,0	116 125,0	124 418,8	132 712,5	30
35	99 341,6	107 619,4	115 897,1	124 174,6	132 452,0	35
40	99 146,1	107 407,6	115 669,0	123 930,2	132 191,3	40
45	98 950,3	107 195,5	115 440,6	123 685,5	131 930,2	45
50	98 754,4	106 983,3	115 212,0	123 440,6	131 669,0	50
55	98 558,2	106 770,7	114 983,1	123 195,3	131 407,4	55
54° 0′	98 361,8	106 558,0	114 754,0	122 949,9	131 145,5	54° 0
5	98 165,2	106 345,0	114 524,6	122 704,1	130 883,4	5
10	97 968,4	106 131,8	114 295,0	122 458,1	130 621,0	10
15	97 771,4	105 918,4	114 065,2	122 211,8	130 358,3	15
20	97 574,2	105 704,7	113 835,1	121 965,3	130 095,3	20
25	97 376,8	105 490,9	113 604,8	121 718,5	129 832,0	25
30	97 179,2	105 276,8	113 374,2	121 471,4	129 568,5	30
35	96 981,3	105 062,4	113 143,4	121 224,1	129 304,7	35
40	96 783,3	104 847,9	112 912,3	120 976,5	129 040,6	40
45	96 585,0	104 633,1	112 681,0	120 728,7	128 776,2	45
50	96 386,6	104 418,1	112 449,5	120 480,6	128 511,6	50
55	96 187,9	104 202,9	112 217,7	120 232,3	128 246,7	55
55° 0′	95 989,0	103 987,4	111 985,6	119 983,7	127 981,5	55° 0′
5	95 790,0	103 771,8	111 753,4	119 734,8	127 716,1	5
10	95 590,7	103 555,9	111 520,9	119 485,7	127 450,3	10
15	95 391,2	103 339,8	111 288,1	119 236,3	127 184,3	15
20	95 191,5	103 123,4	111 055,2	118 986,7	126 918,0	20
25	94 991,6	102 906,9	110 821,9	118 736,8	126 651,5	25
30	94 791,5	102 690,1	110 588,5	118 486,7	126 384,7	30
35	94 591,2	102 473,1	110 354,8	118 236,3	126 117,6	35
40	94 390,7	102 255,9	110 120,9	117 985,7	125 850,2	40
45	94 190,0	102 038,5	109 886,7	117 734,8	125 582,6	45
50	93 989,1	101 820,8	109 652,3	117 483,6	125 314,7	50
55	93 788,0	101 602.9	109 417,7	117 232,2	125 046,6	55
56° 0′	93 586,7	101 384,9	109 182,8	116 980,6	124 778,1	56° 0′
Широта B / ± l Долгота	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′30″	2°0′0″	Широта B / ± l Долгота

1 : 25 000

B	a	c	d	P
52° 0′	34,34	37,09	50,53	79,53
5	34,28	37,09	50,48	79,38
10	34,21	37,09	50,44	79,24
15	34,15	37,09	50,39	79,09
20	34,08	37,09	50,35	78,94
25	34,02	37,09	50,31	78,79
30	33,96	37,09	50,26	78,64
35	33,89	37,09	50,22	78,50
40	33,83	37,09	50,18	78,35
45	33,76	37,09	50,13	78,20
50	33,70	37,10	50,10	78,05
55	33,63	37,10	50,05	77,90
53° 0′	33,57	37,10	50,01	77,76
5	33,50	37,10	49,97	77,61
10	33,44	37,10	49,92	77,46
15	33,37	37,10	49,88	77,31
20	33,31	37,10	49,84	77,16
25	33,25	37,10	49,80	77,01
30	33,18	37,10	49,75	76,86
35	33,12	37,10	49,71	76,71
40	33,05	37,10	49,66	76,56
45	32,98	37,10	49,62	76,41
50	32,92	37,10	49,58	76,26
55	32,85	37,10	49,53	76,11
54° 0′	32,79			

B	a	c	d	P
54° 0′	32,79	37,10	49,49	75,96
5	32,72	37,10	49,45	75,81
10	32,66	37,10	49,40	75,66
15	32,59	37,10	49,36	75,50
20	32,53	37,10	49,32	75,35
25	32,46	37,11	49,28	75,20
30	32,39	37,11	49,24	75,05
35	32,33	37,11	49,19	74,90
40	32,26	37,11	49,15	74,75
45	32,20	37,11	49,11	74,59
50	32,13	37,11	49,06	74,44
55	32,06	37,11	49,02	74,29
55° 0′	32,00	37,11	48,98	74,14
5	31,93	37,11	48,93	73,98
10	31,86	37,11	48,89	73,83
15	31,80	37,11	48,85	73,68
20	31,73	37,11	48,81	73,52
25	31,67	37,11	48,76	73,37
30	31,60	37,11	48,72	73,22
35	31,53	37,11	48,67	73,06
40	31,46	37,11	48,63	72,91
45	31,40	37,11	48,59	72,75
50	31,33	37,11	48,54	72,60
55	31,26	37,11	48,50	72,44
56° 0′	31,20			

Поправки размеров рамок за искажение проекции Гаусса-Крюгера

l	Δ a	Δ c	Δ d
0° 0′	0,00	0,00	0,00
0 30	0,00	0,00	0,00
1 0	0,00	0,00	0,00
1 30	0,00	0,00	0,01
2 0	0,01	0,01	0,01
2 30	0,01	0,01	0,02
3 0	0,02	0,02	0,02
3 30	0,02	0,02	0,03

31

п о я с N

А Б С Ц И С С Ы X

Долгота $\pm l$ / Широта B	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′30″	2°0′0″	Долгота $\pm l$ / Широта B
52° 0′	5 764 507,5	5 764 692,0	5 764 891,3	5 765 105,3	5 765 334,2	52° 0′
5	773 779,2	773 963,6	774 162,7	774 376,6	774 605,3	5
10	783 051,1	783 235,3	783 434,3	783 648,0	783 876,5	10
15	792 323,0	792 507,2	792 706,0	792 919,6	793 147,9	15
20	801 595,1	801 779,1	801 977,8	802 191,2	802 419,4	20
25	810 867,4	811 051,2	811 249,7	811 463,0	811 691,0	25
30	5 820 139,7	5 820 323,4	5 820 521,8	5 820 734,9	5 820 962,7	30
35	829 412,2	829 595,7	829 794,0	830 006,9	830 234,5	35
40	838 684,8	838 868,2	839 066,3	839 279,0	839 506,4	40
45	847 957,5	848 140,7	848 338,7	848 551,2	848 778,5	45
50	857 230,3	857 413,4	857 611,2	857 823,6	858 050,7	50
55	866 503,3	866 686,2	866 883,8	867 096,1	867 323,0	55
53° 0′	5 875 776,4	5 875 959,2	5 876 156,6	5 876 368,7	5 876 595,4	53° 0′
5	885 049,6	885 232,2	885 429,5	885 641,4	885 867,9	5
10	894 322,9	894 505,4	894 702,5	894 914,2	895 140,5	10
15	903 596,3	903 778,7	903 975,6	904 187,1	904 413,3	15
20	912 869,9	913 052,1	913 248,8	913 460,2	913 686,1	20
25	922 143,6	922 325,6	922 522,2	922 733,4	922 959,1	25
30	5 931 417,4	5 931 599,3	5 931 795,7	5 932 006,6	5 932 232,2	30
35	940 691,3	940 873,0	941 069,3	941 280,1	941 505,4	35
40	949 965,4	950 146,9	950 343,0	950 553,6	950 778,7	40
45	959 239,5	959 420,9	959 616,8	959 827,2	960 052,1	45
50	968 513,8	968 695,0	968 890,8	969 101,0	969 325,7	50
55	977 788,2	977 969,3	978 164,8	978 374,8	978 599,3	55
54° 0′	5 987 062,8	5 987 243,6	5 987 439,0	5 987 648,8	5 987 873,1	54° 0′
5	996 337,4	996 518,1	996 713,3	996 922,9	997 147,0	5
10	6 005 612,2	6 005 792,7	6 005 987,7	6 006 197,1	6 006 421,0	10
15	014 887,1	015 067,5	015 262,2	015 471,5	015 695,1	15
20	024 162,1	024 342,3	024 536,9	024 745,9	024 969,3	20
25	033 437,2	033 617,3	033 811,7	034 020,5	034 243,7	25
30	6 042 712,5	6 042 892,3	6 043 086,5	6 043 295,1	6 043 518,1	30
35	051 987,9	052 167,5	052 361,5	052 569,9	052 792,7	35
40	061 263,4	061 442,8	061 636,7	061 844,8	062 067,4	40
45	070 539,0	070 718,3	070 911,9	071 119,9	071 342,2	45
50	079 814,7	079 993,8	080 187,2	080 395,0	080 617,1	50
55	089 090,6	089 269,5	089 462,7	089 670,3	089 892,1	55
55° 0′	6 098 366,5	6 098 545,3	6 098 738,3	6 098 945,6	6 099 167,2	55° 0′
5	107 642,6	107 821,2	108 014,0	108 221,1	108 442,5	5
10	116 918,9	117 097,2	117 289,8	117 496,7	117 717,8	10
15	126 195,2	126 373,3	126 565,7	126 772,4	126 993,3	15
20	135 471,6	135 649,6	135 841,8	136 048,2	136 268,9	20
25	144 748,2	144 926,0	145 117,9	145 324,1	145 544,6	25
30	6 154 024,9	6 154 202,4	6 154 394,2	6 154 600,2	6 154 820,4	30
35	163 301,7	163 479,0	163 670,6	163 876,4	164 096,3	35
40	172 578,6	172 755,8	172 947,1	173 152,6	173 372,3	40
45	181 855,6	182 032,6	182 223,7	182 429,0	182 648,5	45
50	191 132,8	191 309,6	191 500,5	191 705,5	191 924,7	50
55	200 410,1	200 586,6	200 777,3	200 982,1	201 201,1	55
56° 0′	6 209 687,5	6 209 863,8	6 210 054,3	6 210 258,9	6 210 477,5	56° 0′
Широта B / $\pm l$ Долгота	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′0″ 30	2°0′0″	Широта B / $\pm l$ Долгота

142

ПОЯС N

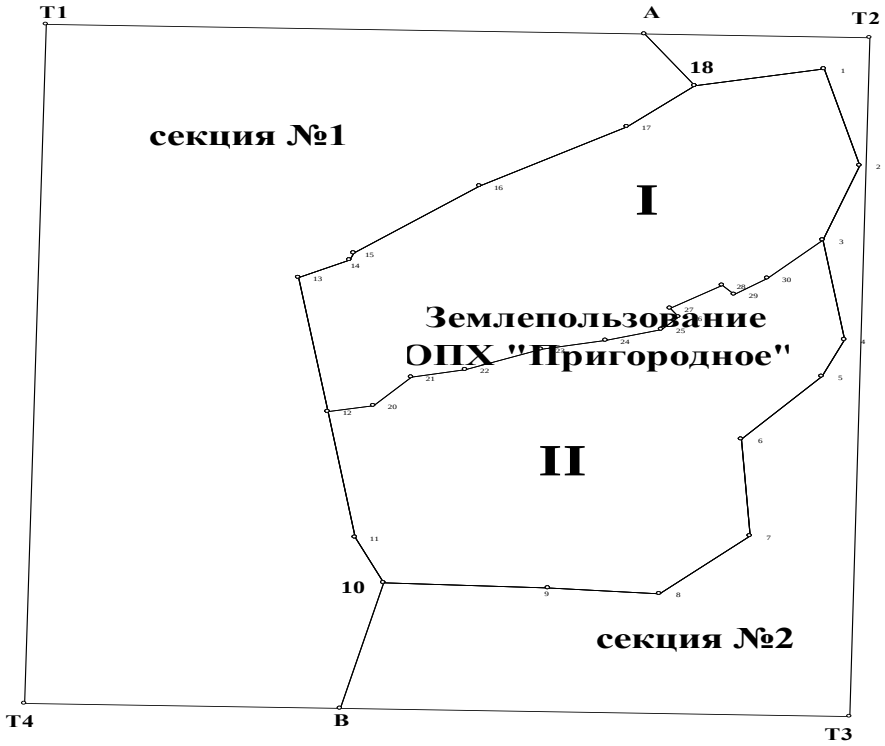
ОРДИНАТЫ $\pm Y$

Долгота $\pm l$ / Широта B	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′30″	2°0′0″	Долгота $\pm l$ / Широта B
52° 0′	103 015,9	111 600,0	120 184,0	128 767,9	137 351,6	52° 0′
5	102 824,5	111 392,6	119 960,7	128 528,6	137 096,3	5
10	102 632,8	111 185,0	119 737,1	128 289,0	136 840,8	10
15	102 441,0	110 977,2	119 513,2	128 049,1	136 584,9	15
20	102 248,9	110 769,1	119 289,1	127 809,0	136 328,8	20
25	102 056,6	110 560,7	119 064,7	127 568,6	136 072,3	25
30	101 864,0	110 352,1	118 840,1	127 327,9	135 815,6	30
35	101 671,3	110 143,3	118 615,2	127 087,0	135 558,6	35
40	101 478,3	109 934,3	118 390,1	126 845,8	135 301,3	40
45	101 285,2	109 725,0	118 164,7	126 604,3	135 043,7	45
50	101 091,8	109 515,5	117 939,1	126 362,5	134 785,8	50
55	100 898,2	109 305,8	117 713,2	126 120,5	134 527,6	55
53° 0′	100 704,4	109 095,8	117 487,1	125 878,2	134 269,2	53° 0′
5	100 510,3	108 885,6	117 260,7	125 635,7	134 010,4	5
10	100 316,1	108 675,1	117 034,0	125 392,8	133 751,4	10
15	100 121,6	108 464,5	116 807,2	125 149,7	133 492,1	15
20	99 926,9	108 253,5	116 580,0	124 906,3	133 232,5	20
25	99 732,0	108 042,4	116 352,6	124 662,7	132 972,6	25
30	99 536,9	107 831,0	116 125,0	124 418,8	132 712,5	30
35	99 341,6	107 619,4	115 897,1	124 174,6	132 452,0	35
40	99 146,1	107 407,6	115 669,0	123 930,2	132 191,3	40
45	98 950,3	107 195,5	115 440,6	123 685,5	131 930,2	45
50	98 754,4	106 983,3	115 212,0	123 440,6	131 669,0	50
55	98 558,2	106 770,7	114 983,1	123 195,3	131 407,4	55
54° 0′	98 361,8	106 558,0	114 754,0	122 949,9	131 145,5	54° 0
5	98 165,2	106 345,0	114 524,6	122 704,1	130 883,4	5
10	97 968,4	106 131,8	114 295,0	122 458,1	130 621,0	10
15	97 771,4	105 918,4	114 065,2	122 211,8	130 358,3	15
20	97 574,2	105 704,7	113 835,1	121 965,3	130 095,3	20
25	97 376,8	105 490,9	113 604,8	121 718,5	129 832,0	25
30	97 179,2	105 276,8	113 374,2	121 471,4	129 568,5	30
35	96 981,3	105 062,4	113 143,4	121 224,1	129 304,7	35
40	96 783,3	104 847,9	112 912,3	120 976,5	129 040,6	40
45	96 585,0	104 633,1	112 681,0	120 728,7	128 776,2	45
50	96 386,6	104 418,1	112 449,5	120 480,6	128 511,6	50
55	96 187,9	104 202,9	112 217,7	120 232,3	128 246,7	55
55° 0′	95 989,0	103 987,4	111 985,6	119 983,7	127 981,5	55° 0′
5	95 790,0	103 771,8	111 753,4	119 734,8	127 716,1	5
10	95 590,7	103 555,9	111 520,9	119 485,7	127 450,3	10
15	95 391,2	103 339,8	111 288,1	119 236,3	127 184,3	15
20	95 191,5	103 123,4	111 055,2	118 986,7	126 918,0	20
25	94 991,6	102 906,9	110 821,9	118 736,8	126 651,5	25
30	94 791,5	102 690,1	110 588,5	118 486,7	126 384,7	30
35	94 591,2	102 473,1	110 354,8	118 236,3	126 117,6	35
40	94 390,7	102 255,9	110 120,9	117 985,7	125 850,2	40
45	94 190,0	102 038,5	109 886,7	117 734,8	125 582,6	45
50	93 989,1	101 820,8	109 652,3	117 483,6	125 314,7	50
55	93 788,0	101 602.9	109 417,7	117 232,2	125 046,6	55
56° 0′	93 586,7	101 384,9	109 182,8	116 980,6	124 778,1	56° 0′
Широта B / $\pm l$ Долгота	1°30′0″	1°37′30″	1°45′0″	1°52′30″	2°0′0″	Широта B / $\pm l$ Долгота

143

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Уравнивание площадей землепользований в пределах трапеции N-32-63-Б-г



Масштаб 1: 25000

$S_{СЕКЦИЯ№1} = 3462{,}17га$

$S_{СЕКЦИЯ№2.} = 1357{,}66га$

$S_{ОПХ"ПРИГОРОДНОЕ"} = 2746{,}17га$

$S_{УРАВ..} = S_{ОПХ"ПРИГОРОДНОЕ"} + S_{СЕКЦИЯ№2.} + S_{СЕКЦИЯ№1.} =$
$2746{,}17 + 1357{,}66 + 3462{,}17 = 7566га$

$S_{ТАБЛИЧНОЕ} = 7566га$

Схему составил _____ Назаров И.В.

Проверил _____ Акулова Е.А.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Каталог координат углов поворота границ земельного участка

(западная секция №1)

Объект: ОПХ "Пригородное"

Система координат Государственная 1942 года

№ по каталогу	№ углов поворота границ	Координаты, м		Дирекцион. угол	Длина линии, м
		X	Y		
1	10	6007440.000	2397420.000	335° 41.7’	680.294
2	11	6008060.000	2397140.000	351° 04.7’	1741.063
3	12	6009780.000	2396870.000	350° 59.7’	1852.836
4	13	6011610.000	2396580.000	64° 34.8’	559.129
5	14	6011850.000	2397085.000	22° 50.0’	103.078
6	15	6011945.000	2397125.000	53° 41.2’	1545.073
7	16	6012860.000	2398370.000	60° 58.7’	1669.641
8	17	6013670.000	2399830.000	50° 06.6’	873.212
9	18	6014230.000	2400500.000	324° 55.0’	862.700
10	A	6014935.960	2400004.145	271° 16.3’	5924.006
11	T1	6015067.500	2394081.600	181° 19.1’	9277.255
12	T4	6005792.700	2393868.200	91° 17.1’	3125.026
13	B	6005722.620	2396992.440	13° 58.8’	1769.803
14	10	6007440.000	2397420.000		

Площадь участка 34628919кв.м. (**3462.8919 га**)

Периметр полигона 29983.114m

Составил _____ Назаров И.В.

Проверил _____ Акулова Е.А.

Каталог координат углов поворота границ земельного участка (восточная секция №2)

Объект: ОПХ "Пригородное" Система координат Государственная 1942 года

№ по каталогу	№ углов поворота границ	Координаты, м		Дирекцион. угол	Длина линии, м
		X	Y		
1	18	6014230.000	2400500.000	79° 48.8’	1300.500
2	1	6014460.000	2401780.000	165° 09.0’	1365.613
3	2	6013140.000	2402130.000	199° 41.4’	1083.340
4	3	6012120.000	2401765.000	171° 01.0’	1376.890
5	4	6010760.000	2401980.000	204° 13.7’	548.293
6	5	6010260.000	2401755.000	222° 45.1’	1171.164
7	6	6009400.000	2400960.000	176° 18.9’	1322.734
8	7	6008080.000	2401045.000	228° 33.9’	1193.786
9	8	6007290.000	2400150.000	274° 09.6’	1102.905
10	9	6007370.000	2399050.000	272° 27.5’	1631.502
11	10	6007440.000	2397420.000	193° 59.3’	1768.832
12	В	6005723.620	2396992.440	91° 16.0’	5040.392
13	Т3	6005612.200	2402031.600	1° 13.0’	9276.992
14	Т2	6014887.100	2402228.600	271° 16.1’	2225.000
15	А	6014936.360	2400004.145	144° 55.9’	863.028
16	18	6014230.000	2400500.000		

Площадь участка 13579437кв.м. (**1357.9437 га**)
Периметр полигона 31270.971м

Составил _____ Назаров И.В.
Проверил _____ Акулова Е.А.

ПРИЛОЖЕНИЕ 10

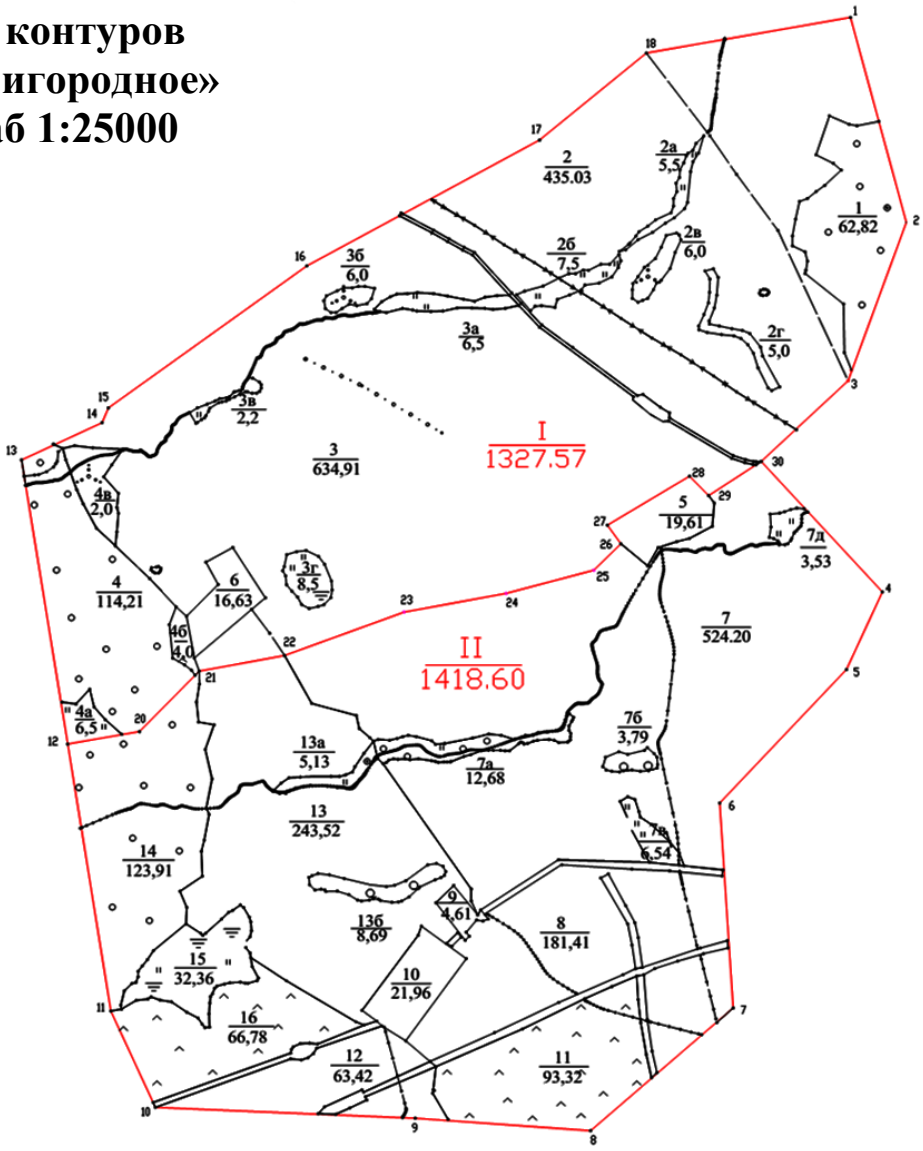
Вычисление площадей контуров секций в пределах землепользования планиметром

Землепользование ОПХ «Пригородное»
Планшет N-32-63-Б-г планиметр № 1224

R = 67.4; p = ***0.50033*** M = 1:25000

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра (И)	$И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий
							В гектарах			
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
		0821								
1	***Секция I***	***3653***	***2835***							
		6488	***2837***	***2836***	***1418.94***		***-0.34***	***1418.60***		
		9325								
	Секция II	***4657***								
2		***7312***	***2655***							
		4565	***2653***	***2654***	***1327.88***		***-0.31***	***1327.57***		
		7218								
	ИТОГО:				***2746,82***			***2746,17***		
				$S_{общ.} =$	***2746,17***					
				$\Delta S = 2746.82 - 2746.17 = +0.65га$						
				$\Delta S_{доп.} = \frac{2746}{500} = \pm 5,49га$						
				$\delta S_I = \frac{-0.65}{2746.82} \cdot 1418.94 = -0.34га$						
				$\delta S_{II} = \frac{-0.65}{2746.82} \cdot 1327.88 = -0.31га$						

Калька контуров
ОПХ «Пригородное»
масштаб 1:25000



Условные обозначения

	граница секций
	граница угодья
I	числитель – номер секции
1327.57	знаменатель – площадь секции, в га
11	числитель – номер угодья
93,32	знаменатель – площадь угодья, в га
13б	числитель – номер вкрапленного угодья
8,69	знаменатель – площадь вкрапленного угодья, в га

ПРИЛОЖЕНИЕ 12

Вычисление площадей контуров ситуации планиметром

Землепользование ОПХ «Пригородное»
Планшет N-32-63-Б-г планиметр № 1224

R = 67.4; p = 0.50033 M = 1:25000

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий
							В гектарах			
	Секция I									
1	*Лес*	*1672*	*124*	*124,5*	*62,29*	*4*	*+0,53*	*62,82*		*62,82*
		1796								
		2045	*125*							
		2170								
	Пашня	*0417*								
2		*1340*	*923*	*924*	*462,30*	*10*	*+1,32*	*463,62*		*435,03*
		2263	*925*							
		3188								
	<u>в том числе</u>:									
а.	*сенокос чистый*		*(палеткой)*		5/6				*5,5*	*5,5*
б.	*сенокос чистый*		*(палеткой)*		7/8				*7,5*	*7,5*
в.	*кустарник*		*(палеткой)*		6/6				*6*	*6*
г.	*кустарник*		*(палеткой)*		4/6				*5*	*5*
	ЛЭП (13 столбов)		*13 х 30 м²*						*0,04*	*0,04*
	автодорога		*(графически)*		*2875 х 9*				*2,6*	*2,6*
	ручей		*(графически)*		*2250 х 4*				*0,9*	*0,9*
	дорога полевая		*(графически)*		*2500 х 4*				*1,0*	*1,0*
	сарай								*0,05*	*0,05*
								всего:	***28,59***	
		6108	*1309*							
3	*Пашня*	*7417*		*1309,5*	*655,18*	*12*	*+1,58*	*657,76*		*634,91*
		8726	*1310*							
		10036								

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ / $И_4 - И_3$	Средн. из $И_2 - И_1$ / $И_4 - И_3$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл. конт.	Площадь угодий
							В гектарах			
	в том числе:									
а.	*сенокос чистый*		*(палеткой)*		*7/6*				*6,5*	*6.5*
б.	*кустарник*		*(палеткой)*		*2/4*				*6*	*6*
в	*сенокос чистый*		*(палеткой)*		*2/2*				*2*	*2*
г	*сенокос заболоченный*		*(палеткой)*		*8/9*				*8,5*	*8,5*
	ручей		*(графически)*		*3000 х 4*				*1,2*	*1,2*
	полоса кустарника		*(графически)*		*1000 х 4*				*0,4*	*0,4*
	дорога полевая		*(графически)*		*375 х 4*				*0,15*	*0,15*
	карьер								*0,05*	*0,05*
	сарай								*0,05*	*0,05*
								всего:	***21,85***	
6.	*Населенный пункт Крюмме*	*0764*	*33*	*33*	*16,5*	*1*	*+0,13*	*16,63*		*16,63*
		0797								
		0830	*33*							
		0863								
4.	*Лес*	*0263*								
		0517	*254*							
		0771	*254*	*254*	*127,08*	*5*	*+0,66*	*127,74*		*114,21*
		1025								
	в том числе:									
а.	*сенокос чистый*		*(палеткой)*		6/7				*6,5*	*6,5*
б.	*пастбище*		*(палеткой)*		4/4				*4,0*	*4,0*
в.	*Кустарник*		*(палеткой)*		2/2				*2,0*	*2,0*
	ЛЭП (13 столбов)		*13 х 30 м²*						*0,04*	*0,04*
	просека		*(графически)*		*450 х 4*				*0,3*	*0,3*
	ручей		*(графически)*		*625 х 4*				*0,25*	*0,25*
	дорога полевая		*(графически)*		*1205 х 4*				*0,48*	*0,48*
								всего:	***13,53***	
				ИТОГО:	***1323,35***	***32***	***+4,22***			
			Должно быть:		***1327,57***					
			Невязка:		***-4,22***					

$$f_{доп} = \pm 0.7 \cdot p\sqrt{П} + 0.05\frac{M}{10000}\sqrt{P} = \pm 0{,}7 \cdot 0{,}50033 \cdot \sqrt{5} + 0{,}05\frac{25000}{10000}\sqrt{1327{,}57} = \pm 7{,}24 га$$

Примечание: Для вычисления поправок в измеренные планиметром площади необходимо вычислить сумму коэффициентов поправок, в нашем случае она равна 32, и вычислить поправки в площади пропорционально этим коэффициентам.

Пример

поправка в угодье №1 (лес) вычисляется следующим образом:

$$\delta_1 = \frac{-(-4.22)}{32} \cdot 4 = +0.53 га.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 13

Коэффициентов поправок

Коэффициенты поправок	***Площадь в гектарах***	
	масштаб 1: 10 000	***масштаб 1:25 000***
0.1	до 0.15	до 1
0.2	от 0.16 до 0.35	от 1 до 3
0.5	« 0.36 » 0.75	« 3 » 5
1	« 0.76 » 3	« 5 » 25
2	« 3 » 5	« 25 » 40
3	« 5 » 8	« 40 » 60
4	« 8 » 15	« 60 » 110
5	« 15 » 20	« 110 » 160
6	« 20 » 26	« 160 » 220
7	« 26 » 35	« 220 » 280
8	« 35 » 45	« 280 » 350
9	« 45 » 55	« 350 » 420
10	« 55 » 65	« 420 » 500
11	« 65 » 76	« 500 » 580
12	« 76 » 87	« 580 » 660
13	« 87 » 98	« 660 » 750
14	« 98 » 110	« 750 » 850
15	« 110 » 123	« 850 » 950
16	« 123 » 136	« 950 » 1050
17	« 136 » 150	-
18	« 150 » 170	-

Примечание. Коэффициенты поправок для масштаба 1:5000 получаются путем уменьшения в 4 раза значения площадей, приведенных для масштаба 1:10 000, а для масштаба 1:50 000 – путем увеличения в 4 раза значения площадей, приведенных для масштаба 1:25000.

ПРИЛОЖЕНИЕ 14

Категории земель

1. **Сельскохозяйственного назначения**
2. **Населенных пунктов**
3. **Промышленности, транспорта, связи, энергетики, обороны**

   - промышленности:

     обрабатывающей

     добывающей

   - транспорта:

     железнодорожного

     автомобильного

     воздушного

     водного

     трубопроводного

   - связи:

     ЛЭП (воздушная и подземная)

     Связь

   - для нужд обороны
4. **Особоохраняемые: природоохранного, природно-заповедного, оздоровительного, рекреационного, историко-культурного.**
5. **Лесного фонда**
6. **Водного фонда**

   - водоемы, ледники, болота;

   - гидротехнические и др. водохозяйственные сооружения (пруды, каналы, водохранилища)
7. **Запаса**

   - не переданные в собственность или пользование

ПРИЛОЖЕНИЕ 15

Угодья

1. Сельскохозяйственные угодья:

   - пашня (систематически обрабатываемые и используемые под посевы);

   - многолетние насаждения, занятые искусственно-созданными древесными, кустарниковыми или травянистыми многолетними насаждениями (сады, ягодники, виноградники, плодопитомники, хмельники, под эфиромасленничные культуры);

   - распаханные, но более года не засеянные;

   - сенокос

   суходольный (по сухим лугам, балкам);

   заливной (в речных долинах и поймах рек);

   заболоченный (на болотных низинах);

   чистый (нет древесно-кустарниковой растительности);

   закочкаренный;

   закустаренный;

   - пастбища:

   суходольные;

   заболоченные;

   чистые;

   закочкаренные;

   закустаренные или залесенные.

2. Несельскохозяйственные угодья:

   - лесные:

   покрытые лесом участки;

   несомкнувшиеся лесные культуры (искусственно-созданные, молодняк);

редины, древостой без молодняка;

вырубки; гари;

необлесившиеся лесосеки;

прогалины (лесные площади, лишенные деревьев, но сохранившие элементы лесной растительности);

пустыри;

лесные питомники;

- древесно-кустарниковая растительность:

полезащитные лесные полосы;

группы деревьев на сельскохозяйственных землях;

кустарники;

- болота:

верховые болота, расположенные на повышенных участках;

низовые болота, расположенные на пониженных участках;

переходные болота;

- земли под водой (участки, занятые естественными и искусственными водоемами);

- нарушенные земли, почвенный покров которых поврежден или полностью нарушен (уничтожен) при разработке или переработке; месторождений полезных ископаемых, проведения геолого-разведочных, строительных или иных работ);

- прочие земли:

пески;

овраги;

ледники;

оползни и др.

другие неиспользуемые земли (свалки и т.п.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 16

Экспликация по секции I

1 Пашня	1069.94 га
2. Сенокос чистый	28.00 га
3. Сенокос заболоченный	8,5 га
4.Пастбище суход. чист.	4,00 га
5. Лес	177,03 га
6.Кустарник	16,4 га
7.Постройки (сараи)	0,1 га
8.Карьер	0,05 га
9. Дороги	4,23
10. Под водой (ручей)	2,35
11. Населенный пункт	16,63 га
12. Линия ЛЭП	0,04 га
13. Просека	0,3 га
Итого :	**1327,57 га**

ПРИЛОЖЕНИЕ 17

ДАННЫЕ ДЛЯ 1 ВАРИАНТА

Вычисление площадей контуров секций в пределах землепользования планиметром

Землепользование ОПХ «Пригородное»
Планшет N-32-63-А-в планиметр № 1224
R = 67.4; р = М = 1:25000

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	В гектарах: поправки	В гектарах: Увязанные площади	В гектарах: Площади вкрапл.	В гектарах: Площадь угодий	Примечание
		2604									
1	***Секция I***	***8532***									
		6488									
		12418									
	Секция II	***2317***									
2		***7965***									
		4565									
		10210									
	ИТОГО:										
				$S_{общ.} =$							

Вычисление площадей контуров ситуации планиметром

Землепользование ОПХ «Пригородное»

Планшет N-32-63-А-в планиметр № 1224

R = 67.4; p = M = 1:25000

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
							В гектарах				
	Секция I										
1		*0420*									
	Пашня	*0787*									
		1156									
	<u>В том числе:</u>										
а)дорога проселочная		*(графически)*			*1309*	*x*					
б)дорога проселочная		*(графически)*			*746*	*x*					
в)дорога проселочная		*(графически)*			*481*	*x*					
г)дорога полевая		*(графически)*			*296*	*x*					
д)дорога полевая		*(графически)*			*250*	*x*					
е)дорога полевая		*(графически)*			*261*	*x*					
ж)дорога полевая		*(графически)*			*139*	*x*					
2	*Населенный пункт Штрезендорф*	*1964*									
		1989									
		2015									

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
							В гектарах				
3.	*Лес*	*2023*									
		2556									
		3089									
	В том числе:										
а.	*пашня*		*(палеткой)*								
б.	*пашня*		*(палеткой)*								
в.	*дорога полевая*		*(графически)*		882	х					
г.	*прогалина*		*(палеткой)*								
д.	*дорога проселочная*		*(графически)*		1140	х					
е.	*просека*		*(графически)*		*1324 х*						
ж.	*прогалина*		*(палеткой)*								
	дорога автомобильная		*(графически)*		*1544 х*						
з.	*пашня*		*(палеткой)*								
	Населенный пункт Мюленберг	*4995*									
4		*5007*									
		5018									
5.	*пашня*	*5269*									
		6192									
		7112									
	<u>В том числе:</u>										
а.	*Дорога полевая*		*(графически)*		*561*	*х*					
б.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		*470*	*х*					
в	*Дорога полевая*		*(графически)*		*831*	*х*					
г	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		*1332*	*х*					

д	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		*2940 х*						
№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
							В гектарах				
6.	*Сенокос заболоченный*	*0373*									
		0443									
		0512									
	В том числе:										
а		*Дорога автомобильная*			*460*	*х*					
7.	*Сенокос закуста-ренный*	*0674*									
		0793									
		0914									
	в том числе:										
а.	*Ручей (под водой)*		*(графически)*		1755	х					
б.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		178	х					
8.	*пашня*	*9039*									
		9372									
	в том числе:	*9702*									
а.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		1645	х					
б.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		1428	х					
9.	*лес*	*2040*									
		2276									
		2512									

	в том числе:										
а.	*прогалина*		*(палеткой)*								
б.	*просека*		*(графически)*		1481	х					
в.	*болото*		*(палеткой)*								
№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	В гектарах: поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
г.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		840	х					
д.	*Дорога полевая*		*(графически)*		300	х					
е.	*прогалина*		*(палеткой)*								
10.	*пашня*	*0612*									
		1072									
	в том числе:	*1530*									
а.	*Дорога полевая*		*(графически)*		766	х					
б.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		1073	х					
в.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		348	х					
11.	*лес*	*0065*									
		0184									
		0304									
	в том числе:										
а.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		900	х					
б.	*редина*		*(палеткой)*								
в.	*Дорога полевая*		*(графически)*		170	х					
12.		*0943*									

	Населенный пункт Гарвель	*0997*									
		1051									

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	В гектарах: поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
13.	*Под водой*	*0752*									
		0831									
		0908									
	в том числе:										
а.	*пашня*		*(палеткой)*								
14.	*пашня*	*0824*									
		1077									
		1328									
	в том числе:										
а.	*Дорога полевая*		*(графически)*		432	x					
б.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		1200	x					
15.	*Населенный пункт Бауэрпуль*	*0307*									
		0325									
		0343									
16.	*пашня*	*6033*									
		7097									
		8157									
	в том числе:										
а.	*Дорога полевая*		*(графически)*		660	X					

б.	*Дорога проселочная*	*(графически)*	1396	X					
в.	*Дорога полевая*	*(графически)*	880	x					
г.	*ЛЭП*	*(графически)*							
д.	*Дорога полевая*	*(графически)*	1587	x					
е.	*Дорога полевая*	*(графически)*	457	x					

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ / $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ / $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
							В гектарах				
17.	*сенокос*	*1189*									
		1505									
		1820									
	в том числе:										
а.	*Ручей(под водой)*	*(графически)*			4924	X					
б.	*Дорога проселочная*	*(графически)*			385	X					
в.	*ЛЭП*	*(графически)*				x					
г.	*Дорога автомобильная*	*(графически)*			446						
18.		*2105*									
	Сенокос заболоченный	*2211*									
		2315									
	В том числе:										
а	*Ручей(под водой)*	*(графически)*			*1489*	*x*					
19.	*пашня*	*0784*									
		1643									
		2502									

	В том числе:								
а.	*Дорога автомобильная*	*(графически)*	1162						
б.	*Дорога полевая*	*(графически)*	522						
в.	*Дорога проселочная*	*(графически)*	2570	x					
г.	*Дорога проселочная*	*(графически)*	1322						
д.	*ЛЭП*	*(графически)*		x					
е.	*Дорога проселочная*	*(графически)*	*287*	*x*					
ж.	*Ручей(под водой)*	*(графически)*	*308*	*x*					

Координаты углов поворота границ земельного участка

Объект: ОПХ "Пригородное"

Система координат Государственная 1942 года

2.	*Определяются по карте*	
3.	*Определяются по карте*	
4.	*Определяются по карте*	
5.	*Определяются по карте*	
6.	*Определяются по карте*	
7.	*Определяются по карте*	
8.	*Определяются по карте*	
9.	*Определяются по карте*	
10.	**6007214.37**	**2375917.76**
11.	**6006999.01**	**2375264.37**
12.	**6006571.94**	**2372285.81**
13.	**6007159.62**	**2369752.57**
14.	**6009097.88**	**2369949.68**
15.	**6012076.44**	**2370329.30**
16.	**6013080.25**	**2369880.33**
17.	**6013667.93**	**2369741.62**
1.	**6014885.03**	**2371017.17**

ПРИЛОЖЕНИЕ 18

ДАННЫЕ ДЛЯ 2 ВАРИАНТА

Вычисление площадей контуров секций в пределах землепользования планиметром

Землепользование ОПХ «Пригородное»
Планшет N-32-63-А-в планиметр № 1224

R = 67.4; p = M = 1:25000

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_4 - И_3$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	В гектарах: поправки	В гектарах: Увязанные площади	В гектарах: Площади вкрапл.	В гектарах: Площадь угодий	Примечание
		2604									
1	***Секция I***	***8532***									
		6488									
		12418									
	Секция II	***2317***									
2		***7965***									
		4565									
		10210									
	ИТОГО:										
				$S_{общ.} =$							

Вычисление площадей контуров ситуации планиметром

Землепользование ОПХ «Пригородное»

Планшет N-32-63-А-в планиметр № 1224

R = 67.4; p = M = 1:25000

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки (В гектарах)	Увязанные площади (В гектарах)	Площади вкрапл. (В гектарах)	Площадь угодий (В гектарах)	Примечание
	Секция II										
20	*Пашня*	*7561*									
		8311									
		9063									
	В том числе:										
а)дорога полевая		*(графически)*			*588*	*x*					
б)дорога проселочная		*(графически)*			*2092*	*x*					
в)дорога полевая		*(графически)*			*884*	*x*					
г)дорога автомобильная		*(графически)*			*836*	*x*					
д)дорога автомобильная		*(графически)*			*498*	*x*					
е) карьер		*(палеткой)*									
21	*Населенный пункт Вульф*	*1113*									
		1155									
		1197									

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
							В гектарах				
22.	*пашня*	*5519*									
		6004									
		6487									
	В том числе:										
а.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		254	x					
б.	*Дорога полевая*		*(графически)*		387	x					
в.	*дорога автомобильная*		*(графически)*		2549	x					
г.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		525	x					
	болото	*0865*									
23		*1142*									
		1421									
	В том числе:										
а.	*Ручей(под водой)*		*(графически)*		1862	x					
б.	*Ручей(под водой)*		*(графически)*		1100	x					
	пашня	*2666*									
24		*3103*									
		3541									
	В том числе:										
а.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		655	x					
б.	*Дорога полевая*		*(графически)*		945	x					
25	*Населенный*	*0134*									
	пункт Бренц	*0227*									
		0322									

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
							В гектарах				
26.	*пашня*	*5523*									
		6542									
		7562									
	<u>В том числе:</u>										
а.	*Дорога полевая*		*(графически)*		*277*	*х*					
б.	*Дорога полевая*		*(графически)*		*519*	*х*					
в	*Дорога проселочная*		*(графически)*		*2783*	*х*					
г	*ЛЭП*		*(графически)*			*х*					
д	*Дорога проселочная*		*(графически)*		*1223*	*х*					
е	*ЛЭП*		*(графически)*			*х*					
ж	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		*1642 х*						
27.	*Под водой*	*0700*									
		0772									
		0843									
	В том числе:										
а.	*болото*		*(палеткой)*								
б.	*пашня*		*(палеткой)*								
в	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		*113*	*х*					
г	*ЛЭП*		*(графически)*			*х*					
28.	*пашня*	*4244*									
		4381									
		4516									

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
							В гектарах				
29.	*лес*	*0351*									
		0831									
		1312									
	<u>в том числе</u>:										
а.	*болото*		*(палеткой)*								
	В том числе:ручей		*(графически)*		819	х					
б.	*Дорога полевая*		*(графически)*		1158	х					
в.	*редина*		*(палеткой)*								
г.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		693	х					
30	*Населенный пункт Анхен*	*6042*									
		6181									
		6318									
31.	*пашня*	*1415*									
		1780									
	<u>в том числе</u>:	*2145*									
а.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		848	х					
б.	*Дорога проселочная*		*(графически)*		519	х					
в.	*карьер*		*(палеткой)*			х					
г.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		1465	х					
32.	*пашня*	*5146*									
		5566									

	в том числе:	*5987*									
а.	*Дорога полевая*		*(графически)*		890	х					
б.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		1973	х					

№ контура на плане	Название угодий	Отсчеты планиметра	$И_2 - И_1$ / $И_3 - И_2$	Средн. из $И_2 - И_1$ / $И_3 - И_2$	Вычисл площадь в гектарах	Коэффициент поправок.	В гектарах: поправки	Увязанные площади	Площади вкрапл.	Площадь угодий	Примечание
33.	*болото*	*6081*									
		6301									
		6523									
а.	*Ручей(под водой)*		*(графически)*		2241	х					
б.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		607	х					
34.	*Населенный пункт Грос-Балов*	*4358*									
		4418									
		4480									
35.	*пашня*	*5925*									
		6569									
		7214									
	в том числе:										
а.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		1790	х					
б.	*Дорога полевая*		*(графически)*		1169	х					
в.	*Дорога автомобильная*		*(графически)*		1479	х					
г.	*Дорога полевая*		*(графически)*		751	х					

36.	*Населенный пункт*	*0021*									
		0028									
		0035									

Координаты углов поворота границ земельного участка

Объект: ОПХ "Пригородное"

Система координат Государственная 1942 года

2.	*Определяются по карте*	
3.	*Определяются по карте*	
4.	*Определяются по карте*	
5.	*Определяются по карте*	
6.	*Определяются по карте*	
7.	*Определяются по карте*	
8.	*Определяются по карте*	
9.	*Определяются по карте*	
10.	**6007214.37**	**2375917.76**
11.	**6006999.01**	**2375264.37**
12.	**6006571.94**	**2372285.81**
13.	**6007159.62**	**2369752.57**
14.	**6009097.88**	**2369949.68**
15.	**6012076.44**	**2370329.30**
16.	**6013080.25**	**2369880.33**
17.	**6013667.93**	**2369741.62**
1.	**6014885.03**	**2371017.17**

Список использованной литературы

1. *Федеральный закон «О государственном кадастре недвижимости»: Закон от 24 июля 2007 г. № 221* / Справочно-правовая система «Консультант Плюс»: [Электронный ресурс] / Компания «Консультант Плюс» с внесением изменений от 05.04.2013 г.- Режим доступа: http://base.consultant.ru/
2. *Федеральный закон «О землеустройстве»: Закон от 18 июня 2001 г. № 78* / Справочно-правовая система «Консультант Плюс»: [Электронный ресурс] / Компания «Консультант Плюс» с внесением изменений от 13.07.2015 г.- Режим доступа: http://base.consultant.ru/
3. *Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике* : учеб. пособие / М.Я. Выгодский – М.: АСТ, 2010. – 704 с.
4. *Вировец А.М. Таблицы координат Гаусса-Крюгера и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок. Эллипсоид Красовского* / Вировец А.М. Мауер В.Г., Троицкий Б.В., Иванов В.Ф., Петрова Е.Ф., Барвенко Е.И., Шишкин В.Н. – М.: Издательство геодезической и картографической литературы ГУГК про Совете Министров СССР, 1948. -328 с.

Учебное издание

Елена Алексеевна Акулова
Игорь Владимирович Назаров

Вычисление площадей земельных угодий

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы по курсовому проектированию по дисциплине «Прикладная геодезия» для студентов заочной формы обучения направления подготовки бакалавриата 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»

Редактор

Подписано в печать г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60 х 84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ.4,0 л. Уч.-изд. л. 3,61 Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30.
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
И.о. Проректора по учебно-методическому комплексу _____ В.В. Зубов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
и задания к контрольной работе

«Подготовка документов для постановки на государственный кадастровый учет объекта недвижимости»

Б1.О.23 ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗЕМЛЕУСТРОИТЕЛЬНЫХ И КАДАСТРОВЫХ РАБОТ

Направление подготовки/ специальность - ***21.03.02 Землеустройство и кадастры***

Направленность (профиль) - ***Кадастр недвижимости***

форма обучения: очная

Автор: Акулова Е.А., доцент, к.т.н.

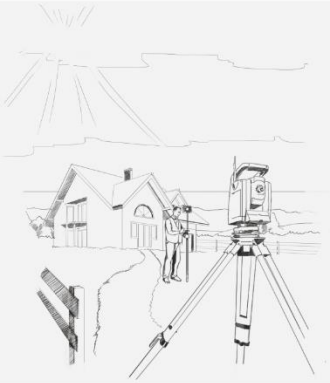
Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией факультета
Геодезии и кадастров	Горно-технологического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Акулова Е.А.	Борисова Ю.С.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 9.09.2024	Протокол № 2 от 16.10.2024
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

www.credo-dialogue.ru
Техническая и технологическая поддержка пользователей - support@credo-dialogue.com
Обучение CREDO - training@credo-dialogue.com

Горячие клавиши программных продуктов CREDO

F1	Справка
F3	Когда курсор над совпадающими элементами, один из которых в состоянии "Под курсором" – переводит предыдущий по списку элемент в состояние "Под курсором"
F4	Когда курсор над совпадающими элементами, один из которых в состоянии "Под курсором" – переводит следующий по списку элемент в состояние "Под курсором
F5	Освежить
Ctrl + F	Найти
Ctrl + N	Создать Набор Проектов
Ctrl + O	Открыть Набор Проектов
Ctrl + S	Сохранить Набор Проектов и все его Проекты
Ctrl + Z	Отменить
Ctrl + Y	Вернуть
Ctrl + 1	Масштабировать / Увеличить рамкой
Ctrl + 4	Панорамировать / Позиционировать
Ctrl + 5	Масштабировать / По горизонтали
Ctrl + 6	Масштабировать / По вертикали
Ctrl + 7	Повернуть
Ctrl + 0 (ноль)	Показать / Все
Ctrl + Backspace	Показать / Предыдущий вид
Ctrl + Scroll мыши	Быстрое масштабирование
Shift + Scroll мыши	Быстрое панорамирование
Esc	Отменить последний шаг интерактивного построения



Система CREDO КАДАСТР.

Тема 1. Общие сведения. Организация работы.

Системы CREDO КАДАСТР предназначена для формирования и выпуска документов, необходимых для постановки на кадастровый учет объектов недвижимости, в соответствии со следующими требованиями и официальными документами Минэкономразвития России.

Система CREDO КАДАСТР позволяет создавать в бумажном и в электронном виде следующие основные документы:

-Межевой план (МП);
-Проект межевания земельных участков (бумажный вид);
-Карта (План) объекта землеустройства;
-Технический план (ТП) (здания, помещения, сооружения, объекта незавершенного строительства).

Система CREDO КАДАСТР может использоваться кадастровыми инженерами для подготовки документов в электронной форме (XML-файлов и вложений), необходимых для кадастрового учета объектов недвижимости.

Исходными данными для работы системы CREDO КАДАСТР являются:

- файлы в формате XML (кадастровые выписки, кадастровые планы территорий, кадастровые паспорта). Импорт XML производится в соответствии с последними версиями схем, опубликованных на сайте Росреестра (КВ-05, КПТ-08, МП-04, все ТП-02, Заявление-17, Карта (План) зоны – 02, Карта (План) границы – 02, Кадастровый паспорт ОКС-01;
- файлы GDS, содержащие координаты, высоты, имена точек, коды топографических объектов и их атрибуты, сформированные при обработке топографических съемок в системе CREDO_DAT;
- текстовые файлы, содержащие координаты точек;
- различные проекты, наборы проектов, созданные в системах CREDO КАДАСТР версии 1.11, загружаемые посредством импорта файлов формата PRX, MPRX и OBX;
- наборы проектов формата COCDS и проекты (в зависимости от типа) форматов версии 1.12: Межевой план - CPLND, Технический план здания - CPBLD, Технический план помещения - CPPLC, Технический план сооружения - CPCNS, Технический план объекта незавершенного строительства - CPENG, Карта (план) – CPMAP, Ситуационный план – CPSIT, Изыскания – CPSUR;
- проекты типа План генеральный, созданные в системах CREDO III и загружаемые посредством открытия файлов в форматах CPPGN;
- данные в формате DXF;
- данные в формате MIF/MID из системы MapInfo;
- данные формата TXF, SXF из системы Панорама;
- растровые подложки с расширением TMD (подготовленные в программе ТРАНСФОРМ), CRF, TIFF, BMP, PNG, JPEG.
- космоснимки, которые физически хранятся на серверах ИТЦ «СКАНЭКС», а работа с ними ведется в режиме удаленного доступа посредством Интернета.

В системе все наборы данных формируются в иерархической структуре проектов, что позволяет пользователю группировать их в зависимости от поставленной задачи. Проекты в свою очередь состоят из иерархически организованных слоев, в которых хранятся данные по кадастровым объектам (КО) – земельным участкам, зданиям, сооружениям и т.п..

Основные функциональные возможности системы CREDO КАДАСТР:

- Импорт файлов, список которых приведен выше в перечне исходных данных.
- Интерактивное создание/редактирование кадастровых объектов (ЗУ, зданий, сооружений и т.п.), а также операции с ними:

формирование геометрии участков (создание новых контуров) в графическом окне плана - как по существующим элементам цифровых моделей местности (точки, линии или контуры), так и по растровым материалам;

редактирование КО путем заполнения свойств, в том числе с изменением их типа;

настройка отображения КО условными знаками и подписями;

вычисление площадей участков, в том числе многоконтурных с учетом внутренних контуров;

деление площадных объектов по заданным условиям (линией, параллельной существующей границе, проходящей через точку участка; произвольной линией), с возможностью уточнения значений площадей образуемых участков.

- Создание графической части, включающей:
  схему геодезических построений;
  схему расположения объектов;
  чертеж земельных участков и их частей;
- Формирование ведомостей:
  создание бумажных версий документов (файл RTF) для МП, ТП, Карта (план), Проекта межевания, Заявления, включающих текстовую часть и чертежи;
  создание и выпуск отчетных документов (Межевого плана, Технических планов, Карта (План)) в электронной форме – в виде XML-файлов и вложений.
- Построение цифровой модели ситуации путем формирования точечных, площадных и линейных топографических объектов на основе классификатора с отображением условными знаками в соответствии с текущим масштабом съемки и возможностью семантического наполнения.

В системе CREDO КАДАСТР предоставляется возможность экспорта данных в системы MapInfo (MIF/MID), AutoCAD (DXF), Панорама.

1.1. Структура и организация данных.

Система хранения данных

В продукте CREDO КАДАСТР организована файловая система хранения данных. Предлагаются два варианта хранения проектов и наборов проектов: работать автономно – они сохраняются в виде файлов документов на локальных или сетевых дисках, а если вести корпоративную работу – документы сохраняются в специально организованном хранилище документов.

Количество сохраняемых проектов ограничивается только параметрами компьютера. Все манипуляции с наборами проектов, проектами, разделяемыми (общими) ресурсами и *хранилищем документов* выполняются без выхода из программы.

При автономной работе можно открыть нужный файл проекта с локального диска, а затем сохранить его на любой диск. Если же предполагается корпоративная работа в системе, то для хранения документов потребуется заранее организовать специальное хранилище документов, оно будет общим для определенной группы пользователей. Документы, помещенные в хранилище – это проекты и наборы проектов, CRF-файлы растровых подложек, DBX-файлы общих ресурсов.

Контроль и регулировку доступа в хранилище данных может вести отдельный специалист, причем это не потребует от него специальных знаний. Администратором хранилища данных сможет быть как руководитель, так и рядовой работник.

Для работы в системе CREDO КАДАСТР создается новый документ (файл), в котором сохраняется вся наработанная информация. Таким документом является проект. В работе над проектом активно используются так называемые **разделяемые ресурсы** (**РР**).

Разделяемые ресурсы (общие ресурсы) – это объекты классификатора, шаблоны, символы, стили, и т.п. Например, кадастровый объект (земельный участок (ЗУ), здание, помещение, линейное сооружение) представляет собой сложный объект, который состоит из нескольких типов элементов (площадного, линейного и точечного тематического объектов). Данные разделяемых ресурсов могут использоваться в нескольких проектах или в других ресурсах. Хранятся разделяемые ресурсы на локальном диске, в отдельной папке.

Основной единицей работы является **Проект**. Для удобства работы проекты объединяются в Наборы проектов. Каждый отдельный проект и набор проектов сохраняется в определённом формате.

Форматы файлов проектов для кадастровых систем:

CPLND – тип *Межевой план*.

CPBLD – тип *ТП здания*.

CPPLC – тип *ТП помещения*.

CPCNS - тип *ТП сооружения*.

CPENG - тип *ТП объекта незавершенного строительства*.

CPMAP - тип *Карта (План)*.

CPSIT – тип *Ситуационный план*.

CPSUR - тип *Изыскания*.

Форматы наборов проектов для кадастровых систем:

COPLN – набор проектов Плана.

COCDS – набор проектов Кадастра.

Символы в расширении проекта и набора проектов означают:

- первые две буквы: **C** - CREDO; **P** или **O** - проект или набор проектов;

- три последних буквы - тип файла проекта или набора проектов: PGN - план генеральный, VOL - объемы, PLN - план, CDS – кадастр и т.п.

Первый вход в систему

1. Перед входом в систему КАДАСТР необходимо настроить работу системы с разделяемыми ресурсами CREDO КАДАСТР. Как правило разделяемые ресурсы уже подгружены в систему. Если система настроена на пустую библиотеку, то система выдаст сообщение о необходимости ее наполнения (рис. 1.1). Для корректного импорта РР обратитесь к преподавателю.

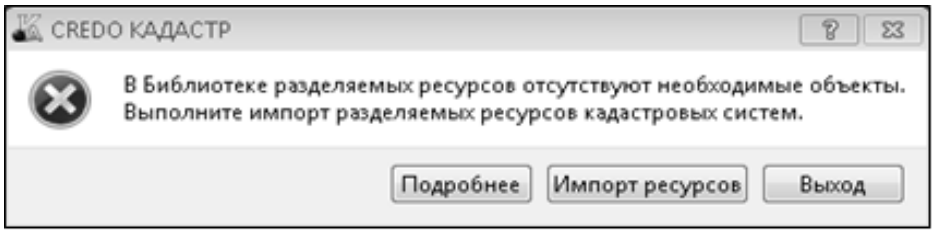


Рис. 1.1

Проекты и наборы проектов

Запустив систему, необходимо сформировать новый набор проектов, выбрав тип проекта, соответствующий виду кадастровых работ (рис. 1.2). Далее выбирается вариант создания нового проекта: **Создать пустой проект** или **Создать проект импортом внешних данных**. В системах CREDO КАДАСТР можно работать в следующих типах проектов:

- Межевой план,
- Карта (План),
- Технический план здания,
- Технический план помещения,
- Технический план сооружения,
- Технический план объекта незавершенного строительства.

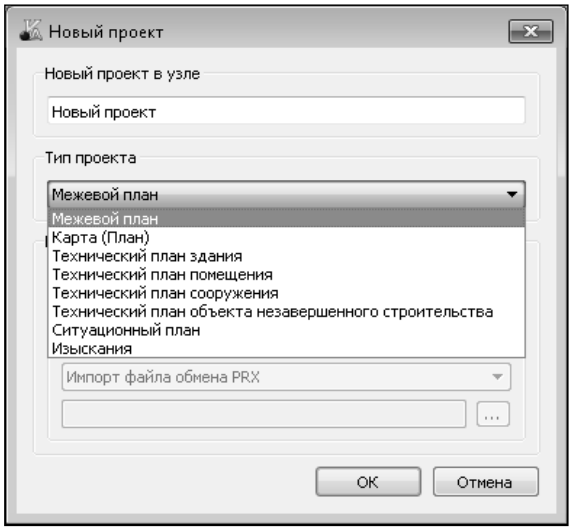


Рис. 1.2. Виды проектов

Помимо этих, есть еще два типа проектов, которые предназначены для подготовки и хранения вспомогательной информации:

- Ситуационный план, в котором в зависимости от текущих задач может храниться, например, цифровая модель ситуации и растровые подложки.
- Изыскания – данный проект позволяет значительно упростить процесс подготовки схемы геодезических построений, причем схема может быть построена автоматически при импорте данных из системы CREDO_DAT.
- Сведения ЕГРН.
- План генеральный. В системе можно открыть или произвести импорт существующего проекта такого типа.

Любой проект можно создать либо пустым, либо импортировать в него данные из других программ.

Проект – это совокупность хранящихся в наборе проектов модельных элементов, с помощью которых осуществляется структуризация данных объекта (рис. 1,3.). Проект имеет набор свойств, для него определяются стили отображения элементов, условия отображения (видимости).

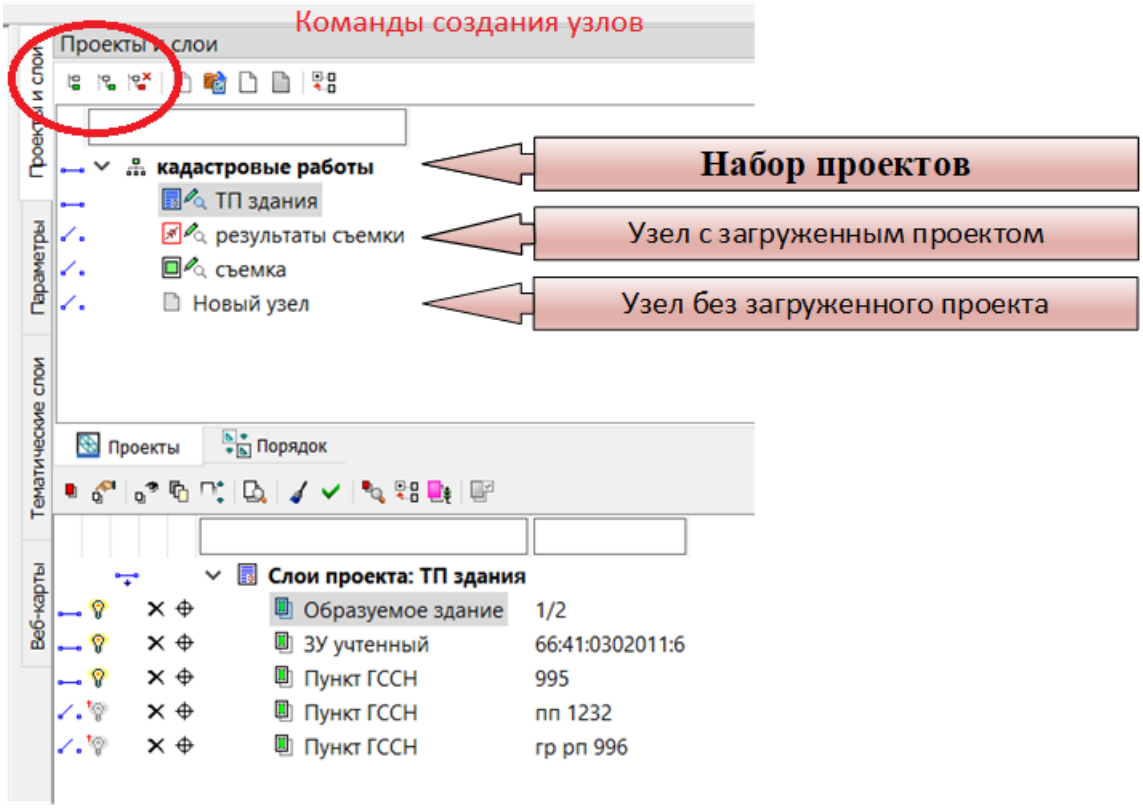


Рис. 1.3. Структурные данные объекта

В новом проекте автоматически создается один слой с именем, которое будет меняться в зависимости от типа проекта – для проекта **Межевой план** это слой **Новый участок**.

Слои – это набор прозрачных плёнок, на каждой из которых размещается определенный вид графической информации. В общем случае, работа со слоями позволяет объединять различные типы данных, определять порядок их отрисовки, захватывать и удалять элементы слоя, а также управлять видимостью как всех данных слоя одновременно, так и отдельных элементов индивидуально (точки, подписи точек, ребра триангуляции и т.д.).

Однако следует отметить, что специфика кадастровых проектов накладывает определенные особенности и на их слои:

- **в одном слое может содержаться только один элемент (кадастровый объект),** который зависит от стиля кадастрового объекта;
- **у кадастровых объектов может отсутствовать геометрия, но всегда есть семантика**.

Семантика кадастровых объектов хранится непосредственно за слоем.

Набор проектов (далее НП) состоит из одного или нескольких проектов одного типа (плана или чертежа), организуемых в иерархическую структуру.

Проекты не хранятся в наборе – набор проектов является только группой *указателей на входящие в него проекты*. Сами проекты из НП продолжают храниться на диске или в ХД как самостоятельные объекты.

Существующий набор проектов можно дополнять новыми проектами и сохранять их вместе с набором.

Узлы дерева проектов отображаются иконками. По изображению иконок можно судить о типе проектов и о наличии проекта в узле. В системе CREDO КАДАСТР иконки для разных типов проектов окна плана имеют следующий вид:

– Межевой план.

– Карта (План).

– Технический план здания.

– Технический план помещения.

– Технический план сооружения.

– Технический план объекта незавершенного строительства.

– Изыскания.

– Ситуационный план.

Создание требуемой структуры проектов в наборе проектов выполняется с помощью команд панели управления окна **Проекты**. Это кнопки **Создать узел на одном уровне** и **Создать узел на следующем уровне**.

В узлы набора проектов можно:

- загрузить существующий проект;
- создать новый пустой проект нужного типа и наполнить его данными самостоятельно;
- импортировать данные различного типа, формируемые программами комплекса CREDO или другими программами, выбрав нужный тип проекта.

Наборы проектов со своими свойствами сохраняются на жёстком диске вашего компьютера. Пользователь, загружая ранее созданный набор, загружает все проекты этого набора.

Упражнение 1. Создание рабочей области

1. Запустите систему CREDO КАДАСТР.
2. Выберите команду **Данные/Создать Набор проектов**.
3. В открывшемся диалоге выберите в группе **Тип проекта** –проект **Межевой план** (рис. 1.4).
4. В группе **Вариант создания нового проекта** установите переключатель в поле **Создать пустой проект**.
5. Нажмите **Ок**. В появившемся окне **Открыть объект «Виды работ»** нажмите **Отмена**.
6. В появившемся окне **Настройка Свойств Набора проектов** на вопрос о копировании свойств нажмите **Отмена.**
7. Рабочая область должна выглядеть как на рис. 1.5.

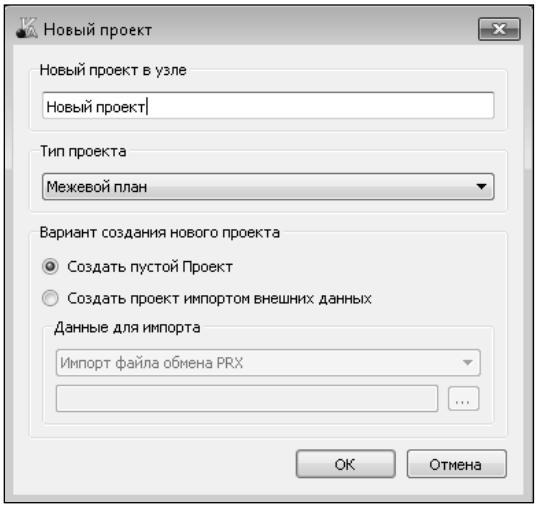


Рис. 1,4

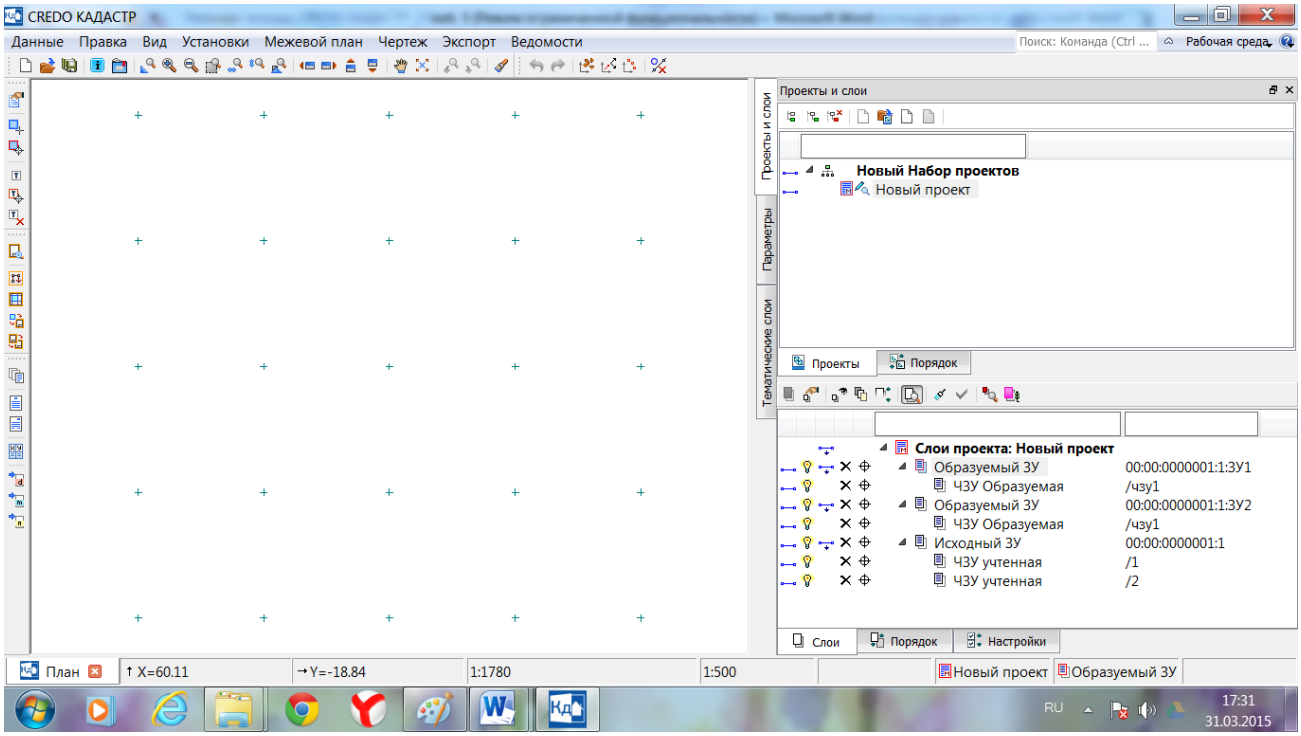


Рис. 1.5. Рабочая область

Используя организатор слоев удалите все слои кроме одного, как показано на рис.1.6.

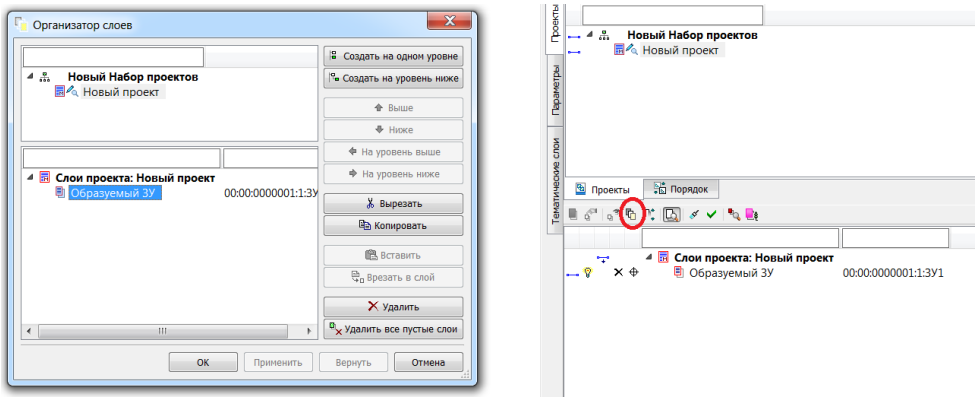


Рис. 1.6.

1.2. Свойства набора проектов

Набору проектов (как плана, так и профиля) можно задать ряд свойств, которые позволят работать с проектами в одной системе координат, применяя одни и те же единицы измерения и точность отображения значений. Свойства, характеризующие набор проектов и сохраняемые вместе с ним, устанавливаются (редактируются) в окне **Свойства набора проектов** (меню **Установки/Свойства Набора проектов**).

Рассмотрим наиболее важные свойства набора проектов при работе с CREDO КАДАСТР.

Карточка набора проектов

В разделе **Масштаб и системы координат** (рис. 1.7.) определяется масштаб съемки, системы координат и высот. Настройки, выполняемые в разделе, общие для плана.

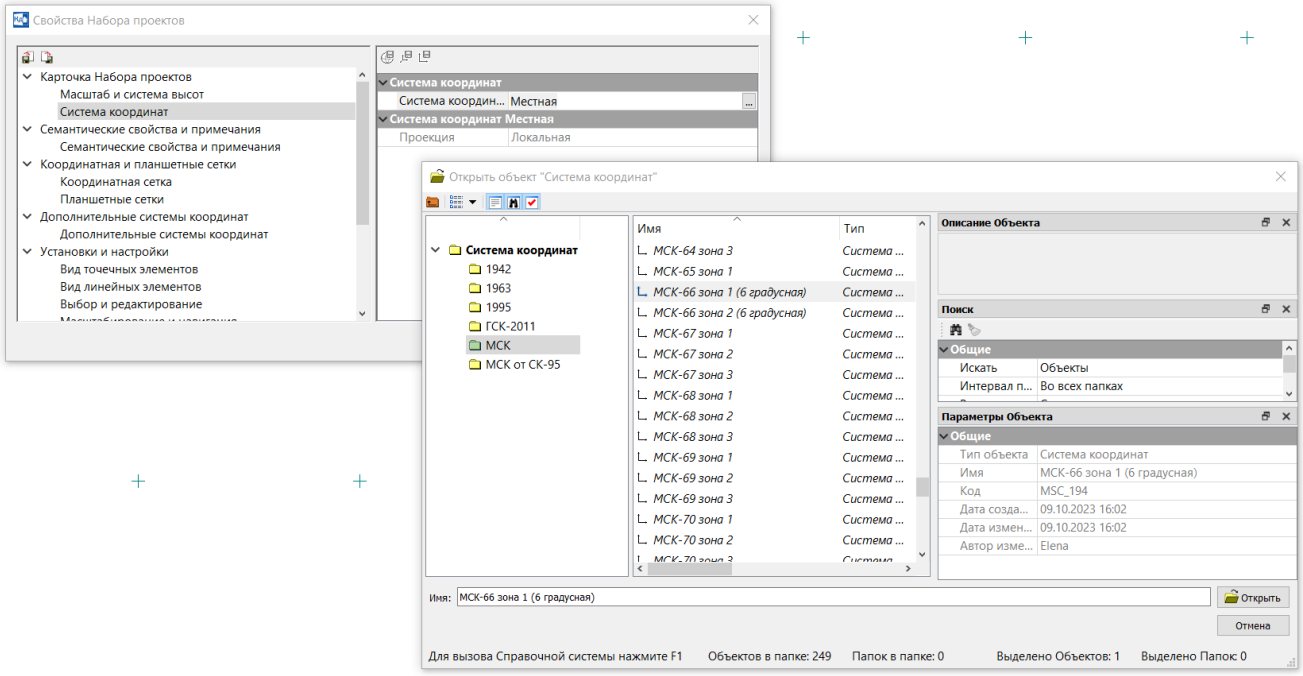


Рис. 1.7.

Изменение текущего масштаба съемки автоматически вызывает изменение модели плана с учетом отображения условных знаков тематических объектов в соответствии с назначенными диапазонами масштабов в Классификаторе.

Вкладка **Системы координат** позволяет установить систему координат, принятую для ведения кадастровых работ.

Координатная и планшетные сетки

«Координатная сетка» позволяет задать ряд настроек: шаг координатной сетки для выбранного масштаба в метрах, предельный (максимальный) масштаб отображения координатной сетки, ее цвет и вид.

При формировании планшетов необходимо включать активность **планшетной сетки** требуемого масштаба. В окне задается масштаб, для которого создается разграфка, устанавливаются размеры планшета (в мм) на плане (пересчитываемые в метры по установленному масштабу). В полях **Начало разграфки** устанавливаются смещения юго-западного угла листа (координаты инициализации планшетной сетки). Обычно это нули.

Настройка строительной или иной дополнительной системы координат выполняется в узле **Дополнительные системы координат**. Параметры, вид, границы и условия отображения определяются параметрами, задаваемыми в соответствующих полях настроек.

В узле **Установки и настройки** можно выполнить настройку вида отображения точечных, линейных и площадных элементов, единиц измерения и точность представления данных.

В нашем случае в настройках координатной сетки отключите ее видимость, настройки планшетной сетки оставьте без изменения.

1.3. Сохранение набора проектов и проектов

Все данные, с которыми работает приложение CREDO-III, включая **проекты**, **наборы проектов** и разделяемые ресурсы, могут сохраняться на диске или в **хранилище документов** в виде файлов различных форматов.

Для сохранения набора проектов предназначены следующие команды: **Сохранить Набор проектов и все Проекты** и **Сохранить Набор проектов как**.

Для сохранения **проекта** предназначены команды контекстного меню вкладки **Проекты**, а именно: **Сохранить Проект**, **Сохранить Проект как**, **Сохранить копию Проекта**.

Сохраните набор проектов под именем «КАДАСТРОВЫЕ РАБОТЫ»

Тема 2. Исходные данные

2.1. Исходные данные. Импорт данных

В качестве исходных данных для систем CREDO III может использоваться информация различного характера, подготовленная как системами комплекса CREDO, так и другими системами.

В системе CREDO КАДАСТР предусмотрены следующие виды импорта данных в новый проект:

- импорт файлов GDS (форматы системы CREDO_DAT);
- импорт текстовых файлов (файлы формата *.txt, *.top).
- импорт файлов DXF;
- импорт растра (файлы форматов *.tmd, *.crf, *.bmp, *.tiff, *.png, *.jpeg);
- импорт файлов MIF/MID;
- импорт из ПАНОРАМЫ (файлы формата *.txf, *.sxf);
- импорт файлов XML;
- импорт файлов PRX (файлы систем на платформе CREDO III);
- импорт проекта «План Генеральный» (файлы формата *.cppng);
- в программу можно загрузить космические снимки с ресурса «Экспресс Космоснимки».

Общий порядок действий при импорте данных

В кадастровые проекты можно импортировать внешние данные как на стадии создания нового проекта, так и в существующий активный проект.

Создание проектов путем импорта внешних данных может выполняться из первоначального меню при вызове команды **Данные/Создать Набор Проектов** либо в созданном наборе проектов на панели **Проекты**. Во втором случае сначала нужно создать новый узел с помощью одной из команд: **Создать Узел на одном уровне** или **Создать Узел на следующем уровне** (рис. 1.8).

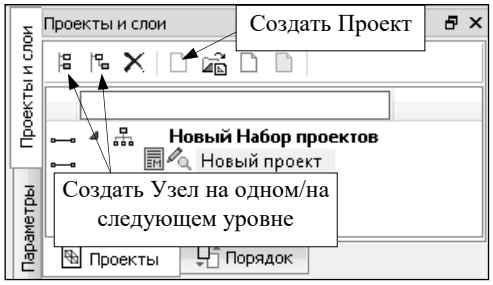


Рис. 1.8

Затем в новом узле создать проект с помощью команды **Создать Проект**.

После создания проекта открывается окно диалога **Новый проект** (рис. 1.9), где необходимо выполнить следующие настройки:

- В группе **Тип проекта** выбирается тип создаваемого проекта.
- В группе **Вариант создания нового проекта** устанавливается флажок в поле **Создать проект импортом внешних данных**.
- В списке **Данные для импорта** выбирается тип импортируемого файла. Для разных типов проектов доступны разные типы импортируемых файлов.
- В следующей строке выбирается импортируемый файл. Осуществляется импорт данных.

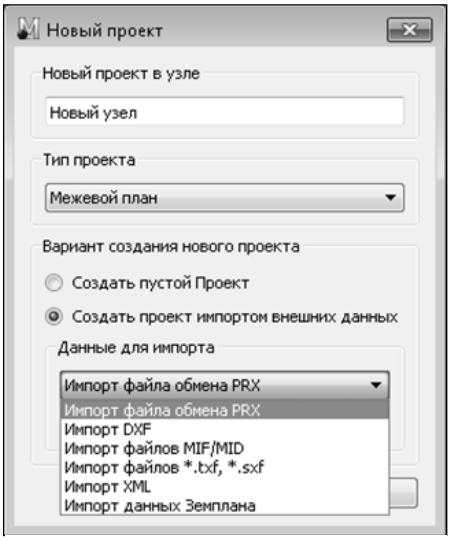


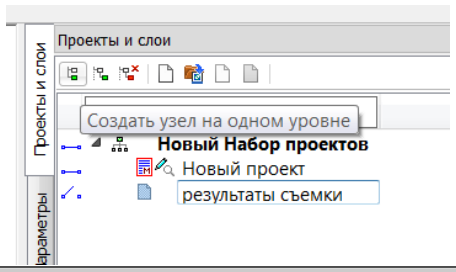
Рис. 1.9

Упражнение 2. Импорт данных

2.2. Импорт файла GDS CREDO в проект типа Изыскания

📖 Импорт файлов GDS доступен для типов проектов Изыскания и Ситуационный план.

1. Откройте набор проектов КАДАСТРОВЫЕ РАБОТЫ командой **Данные/Открыть Набор проектов (если он был закрыт)**.
2. Создайте узел с именем «**результаты съемки**».



3. На панели инструментов выберите команду **Создать Проект** .
4. В открывшемся окне **Новый проект** установите тип проекта **Изыскания**.
5. Выберите в группе Вариант создания нового проекта – **Создать проект импортом внешних данных**.
6. В списке **Данные для импорта** укажите **Чтение файла GDS CREDO**.

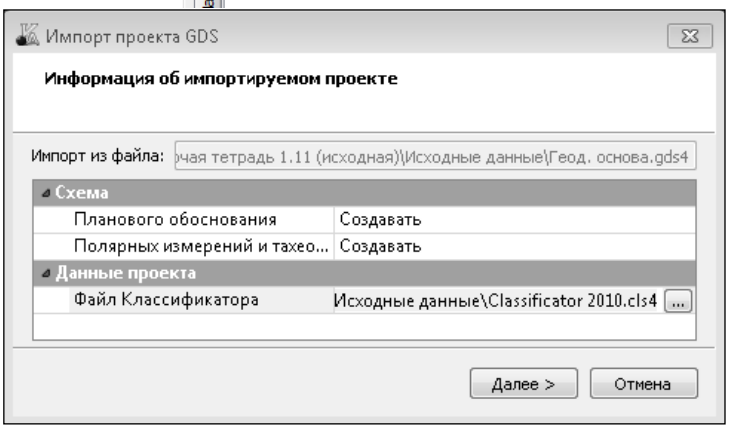


Рис. 1.10

7. В следующей строке нажмите кнопку … и в диалоговом окне **Открыть** укажите путь к файлу **Проект 1.gds4**, Нажмите **Открыть** и **ОК**.
8. Подтвердите, нажав клавишу **ОК**, сообщение о том, что не найден путь к классификатору.
9. В открывшемся окне **Импорт проекта GDS** (см. рис. 1.10), в строке **Файл классификатора** укажите путь к классификатору CREDO_DAT – *Classificator 2010.cls4* (папка **Исходные данные**).
10. В разделе **Схема** установите Схему планового обоснования, Схему полярных измерений и тахеометрии **Создавать**. Нажмите **Далее**.
11. Нажмите **Импорт**.
12. Выполните команду **Показать все**.
13. Сделайте активным проект (тип **Изыскания**), в который выполняли импорт (двойным кликом на его наименовании).
15. Сохраните проект.
16. Отключите видимость слоя «Нераспознанные объекты» проекта.

2.3. Импорт текстового файла в проект типа Ситуационный план

📖 *Импорт текстового файла в системе CREDO КАДАСТР доступен только для проектов типа Ситуационный план.*

1. Создайте узел **дополнительные точки**.
2. Выполните команду **Создать Проект** (на локальной панели инструментов).
3. В открывшемся окне **Новый проект** установите тип проекта **Ситуационный план**.
4. Выберите в группе Вариант создания нового проекта – **Создать проект импортом внешних данных**.
5. В списке **Данные для импорта** укажите **Импорт текстового файла**.
6. В следующей строке нажмите кнопку … и в диалоговом окне **Открытие документа** укажите путь к файлу **точки Учтенный1.txt**, который находится в папке **ДанныеДляРаботы**. Нажмите **Открыть** и **ОК**.
7. В открывшемся окне **Универсальный импорт пунктов** выберите команду **Правка/Выбрать всё (левая панель)**, выберете пункт меню **Шаблон/Свойства**, в свойствах шаблона удалите разделитель « , » затем **Правка/Конвертировать (добавление)**. Все данные переместятся в правую часть окна **Универсальный импорт пунктов**.
8. В правой части окна кликните правой клавишей мыши по заголовку столбца и выберите из контекстного меню для первого столбца – **Имя точки**, второго – **X**, третьего – **Y (рис. 4.15)**.

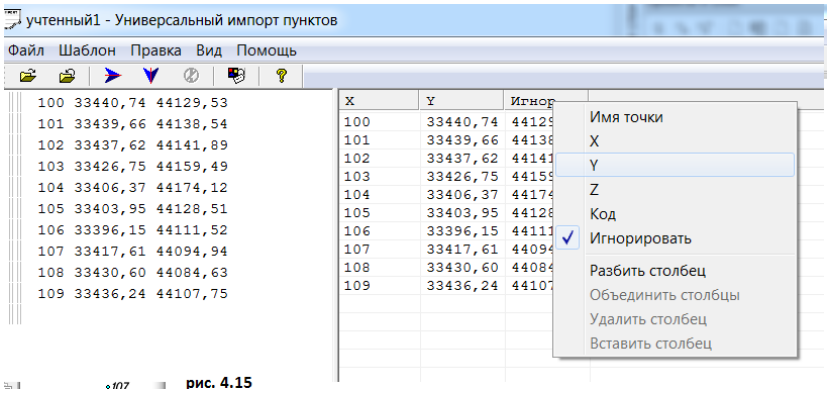


рис. 4.15

9. Выберите команду **Файл/Импорт**.
10. Закройте окно **Универсальный импорт пунктов**, не сохраняя созданный **Шаблон.**
11. Выполните команду **Показать все**. (рис. 1.11)
12. Выполните сохранение данных.

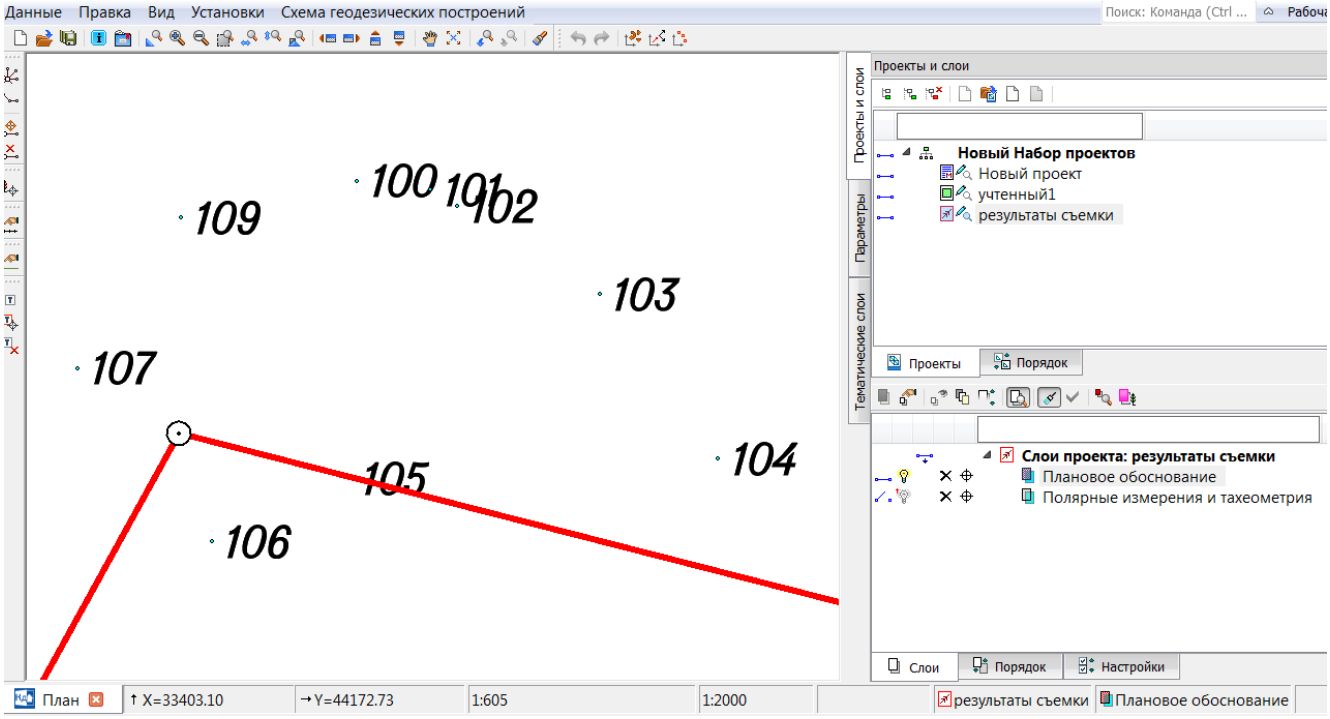


Рис. 1.12.

2.4. Импорт проекта План генеральный

📖 *Только для типа проекта Ситуационный план возможно преобразование проекта План Генеральный – в проект Ситуационный план.*

1. Откройте набор проектов **КАДАСТРОВЫЕ РАБОТЫ**.
2. Выделите проект, который находится внизу списка, в окне **Проекты и Слои**, и, используя команду **Создать узел на одном уровне**, создайте новый узел.
3. Выполните команду **Создать Проект** (на локальной панели инструментов).
4. В открывшемся окне **Новый проект** установите тип проекта **Ситуационный план**.
5. Выберите в группе Вариант создания нового проекта – **Создать проект импортом внешних данных**.
6. В списке **Данные для импорта** укажите **Импорт проекта «План генеральный»**.
7. В следующей строке нажмите кнопку … и в диалоговом окне Открыть укажите путь к файлу **съемка.cppgn**, который находится в папке **Данные Для Работы**. Нажмите Открыть и ОК.
8. Открывается окно **Параметры импорта** (рис. 1.13). В данном окне, выполняются настройки, влияющие на состав импортируемых данных (настройки на удаление и преобразование).

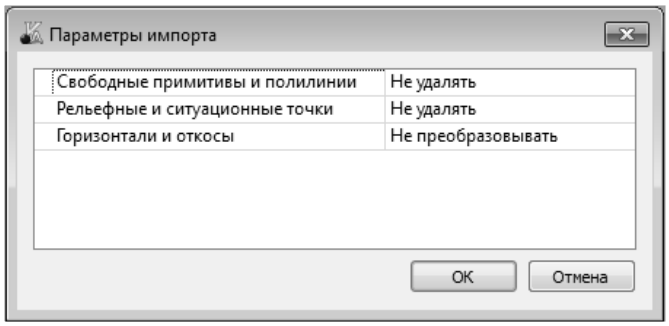


Рис. 1.13

📖 *При заданных значениях в полях: Удалять свободные примитивы и полилинии, Удалять рельефные и ситуационные точки и Не преобразовывать горизонтали и откосы – из проекта плана генерального не будут переданы соответствующие элементы.*

9. Нажмите **ОК.**
10. Выполните команду **Показать все**.
11. Выполните сохранение данных.

Тема 3. Технология работы кадастрового инженера. Подготовка отчётной документации

3.1. Понятие кадастровых объектов. Стили кадастровых объектов. Создание и редактирование кадастрового объекта. Работа в проекте типа Межевой план

Понятие кадастровых объектов

Проект **Межевой план** предназначен для формирования землеустроительных документов, в том числе основных документов для межевого плана в соответствии с официальными документами Минэкономразвития России.

Создание земельных участков и их частей, зданий, помещений и т.д. выполняется в системе на основе **стилей** (стиль выбирается в зависимости от вида кадастровых работ). Стили, в свою очередь, содержат набор характеристик, предназначенных для отображения кадастровых объектов (работа со стилями описана ниже).

Кадастровый объект (земельный участок, здание, помещение, сооружение) представляет собой сложный объект, который состоит из нескольких типов элементов (площадного, линейного и точечного тематического объектов). Тематические объекты являются объектами классификатора, они характеризуются условным знаком и семантическими характеристиками.

Кадастровые объекты также подразделяются на типы:

- **Площадной кадастровый объект (ПКО)**. В большинстве случаев кадастровый объект (земельный участок, здание, помещение) представляет собой площадной объект (контур), метрическое описание которого производится при помощи координат точек поворота границы, а семантическое делится на составные части – относящиеся непосредственно к контуру, а также к участкам его границ и точкам их поворота. Для адекватного графического представления такого контура используется один площадной тематический объект (ПТО) и неограниченное количество линейных и точечных тематических объектов (ЛТО и ТТО).
- **Линейный кадастровый объект (ЛКО)**. В том случае, когда кадастровый объект представляет собой линейное сооружение, например, ось линейного объекта, для его описания используются один ЛТО и неограниченное число ТТО, которые используются в сооружениях и объектах незавершенного строительства (ОНС).
- **Точечный кадастровый объект (ТКО)**. Используются для кадастровых объектов, которые нельзя отобразить в масштабе создаваемого плана.

Стили кадастровых объектов

Как было сказано выше, для отображения кадастровых объектов, в соответствии с предъявляемыми к ним требованиями, разработаны специальные стили. За каждым стилем элемента кадастрового объекта хранятся схемы соответствия, которые используются для структурированного вывода данных в окно параметров. Назначить другой стиль элемента для точек и линий можно только при редактировании кадастрового объекта.

В системе CREDO КАДАСТР способ и характеристики отображения кадастровых объектов (в зависимости от типа земельного участка – исходные, образуемые, уточняемые и т.д.) называются **стилем отображения кадастровых объектов**.

Используемые программой стили отображения сгруппированы в диалоговом окне **Открыть объект «Стиль»** (рис. 1.14), вызываемом с помощью команды **Установки/Стили кадастровых объектов**.

Каждому стилю соответствуют свои параметры, определяющие специфику отображения объекта в соответствии с приказами Минэкономразвития России. Описание некоторых параметров объекта:

- В группе параметров **Общие** можно изменить имя и код стиля.

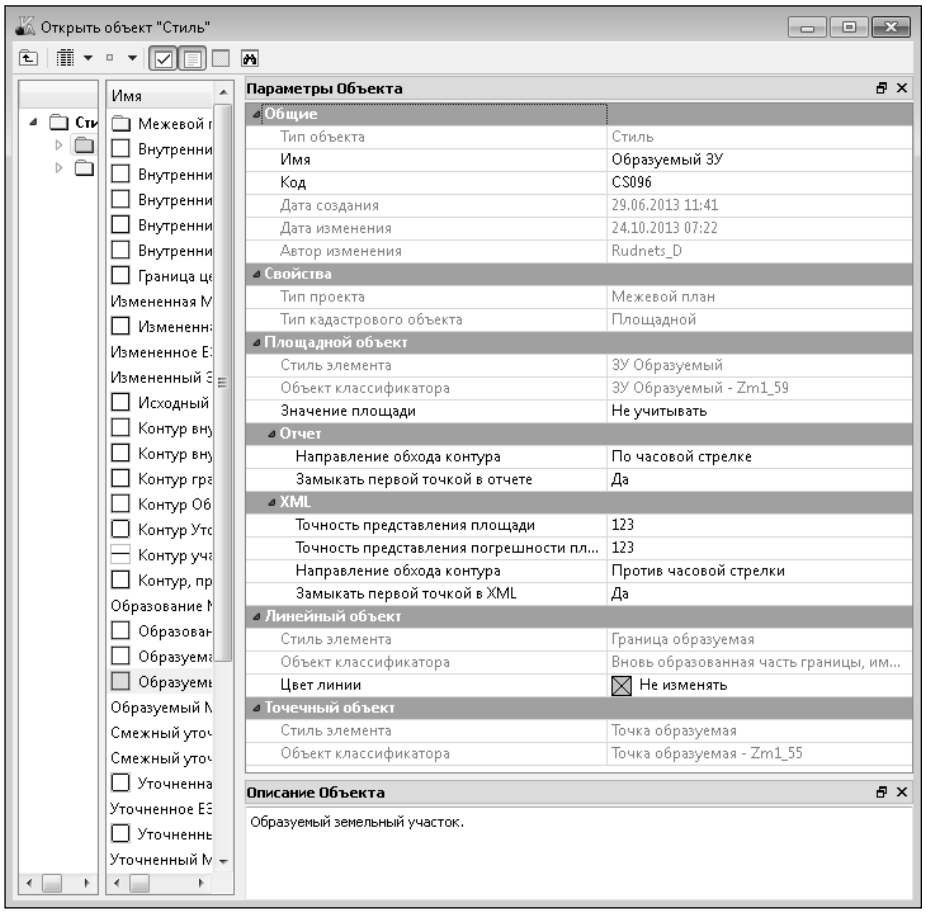


Рис. 1.14

- В поле **Значение площади** задается параметр, который определяет действие над значением площади текущего объекта (суммировать, вычитать, не учитывать). Данный параметр учитывается только при наличии у слоя кадастрового объекта подчиненных слоев, например:
  - если подчиненными слоями будут части участка, то их значения не должны учитываться, так как их площади уже учтены в общей площади;
  - если подчиненными слоями являются обременения, то их необходимо вычесть;
  - если это многоконтурный участок (он не имеет собственной геометрии), то его площадь получается сложением площадей всех контуров, т.е. подчиненных слоев.
- Группа **Отчет** содержит параметры, предназначенные для корректного формирования отчетного документа формата RTF.
  - В поле **Направление обхода контура** выбранное значение (***По часовой стрелке*** либо ***Против часовой стрелки***) позволяет задать направление, в котором будет осуществляться нумерация точек объекта.
  - Выбор значения ***Да/Нет*** в поле **Замыкать первой точкой в отчете** позволяет выводить/не выводить в конце описания геометрии первую точку в отчетном документе.
- Группа **XML** содержит параметры, предназначенные для корректного формирования отчетного документа формата XML.
  - В поле **Точность представления площади** выбирается точность, с которой площадь будет отображаться в отчетном документе. В бумажном отчете отображается значение площади, точность представления которой задана в шаблоне ведомости.
  - Настройки параметров **Направление обхода контура** и **Замыкать первой точкой в XML** аналогичны настройкам для группы Отчет.
- В группах Линейный и Точечный объекты для стиля отображается информация о назначенных стилях элементов и тематических объектах (линейный/ точечный).

Создание кадастрового объекта

Создание нового кадастрового объекта (КО) выполняется с помощью команды **Объекты/Создать объект**.

Кадастровые объекты (КО) могут быть как основными, так и подчиненными, т.е. двухуровневыми (например, на первом уровне иерархии могут располагаться только участки, а на уровень ниже – их части – ЧЗУ). Поэтому при создании КО в системе есть возможность поддерживать необходимую иерархию данных. Иерархия обеспечивается за счет того, что кадастровые объекты всегда создаются в новом слое, а слои можно создавать на разном уровне подчиненности. Кроме этого, за самим слоем хранится и семантическое описание соответствующего объекта.

С помощью диалога **Организатор слоев** (рис. 1.15) можно изменить уровень объектов, порядок их расположения, удалить слои и т.д., используя соответствующие команды (Выше, Ниже, На уровень выше и т.д.). Диалог **Организатор слоев** можно вызвать одноименной кнопкой  на локальной панели окна **Слои**.

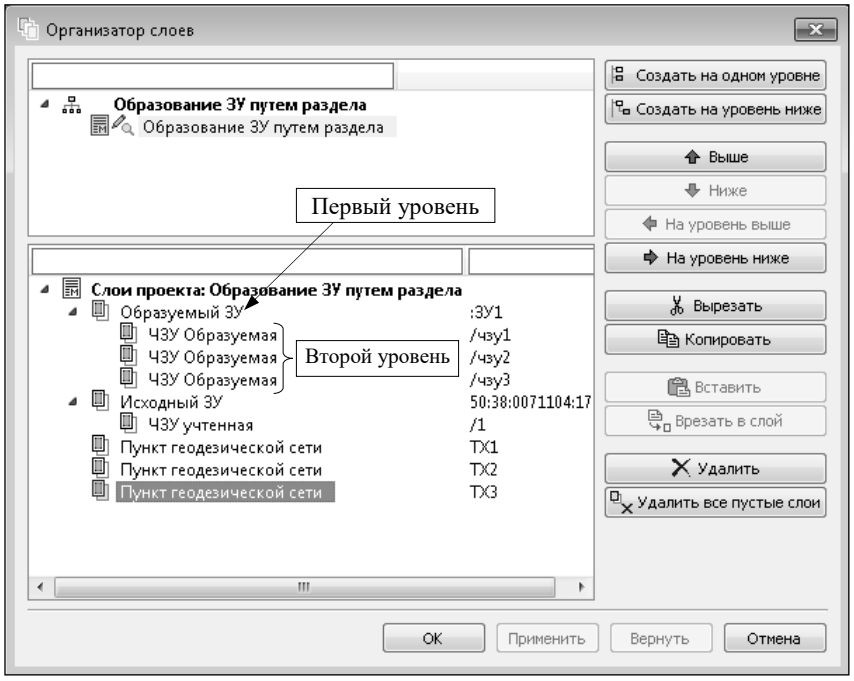


Рис1.15

Процесс создания КО можно условно разделить на два этапа.

На первом этапе определяется геометрия объекта (при создании КО захватываются существующие точки либо создаются новые), **на втором – выполняется присвоение соответствующих ему свойств**.

Участки, размеры которых не могут быть переданы в масштабе плана (чертежа), можно отобразить с помощью внемасштабных УЗ. Для этого предназначены команды меню **Ситуация/ Точечный объект,** которые находятся только в проекте типа Ситуационный план. УЗ также можно создать непосредственно в **Чертежной модели** при редактировании чертежа (схемы), используя команду **Построения/Символ/Создать.**

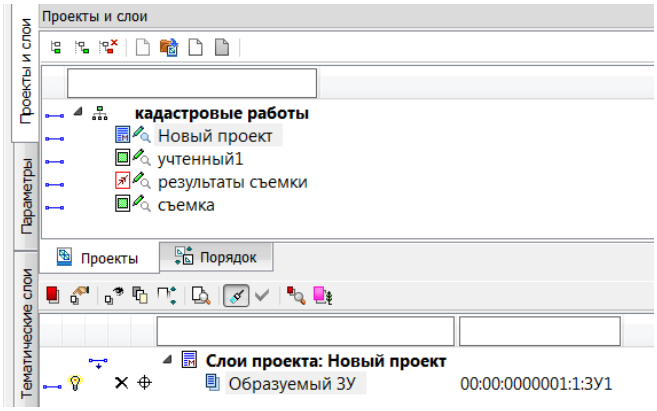
Редактирование кадастрового объекта

При редактировании кадастровых объектов можно выделить два вида действий: изменение свойств и изменение геометрии.

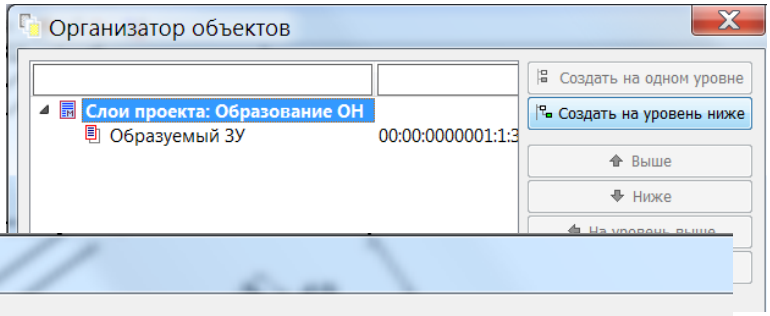
Команда редактирования объектов вызывается из меню **Межевой план/Редактировать объект**.

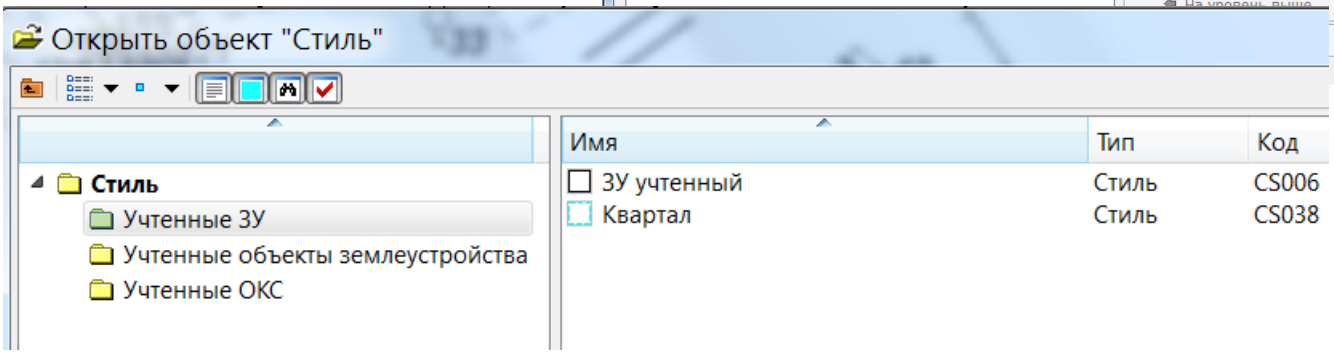
Упражнение 3. Создание кадастрового объекта. Заполнение параметров объекта. Работа в проекте типа Межевой план.

1. Запустите систему CREDO КАДАСТР.
2. Откройте набор проектов **кадастровые работы**, если ин не открыт.
3. Во вкладке **Проекты и слои** переименуйте **«Новый проект»** в **«Образование ОН»**.
4. Выберите команду **Установки/Свойства Набора проектов**.
5. Установите в узле **Карточка Набора Проектов** – Масштаб **1:1000**.
6. Нажмите **Применить**. **ОК**.
7. Выберете команду **Межевой план/Создать объект.**



8. В выпавшем окне «Организатор объектов» создайте объект «на уровень ниже» Нажмите **Применить. ОК**.
9. В открывшемся окне «Объекты стиль» выберете стиль «ЗУ Учтенный», **Открыть.**





10. В режиме курсора «Захват точки» выберете все характерные точки ограждения земельного участка, как показано на рисунке 1.16 Для того чтобы контур был замкнутым, необходимо захватить повторно начальную точку.

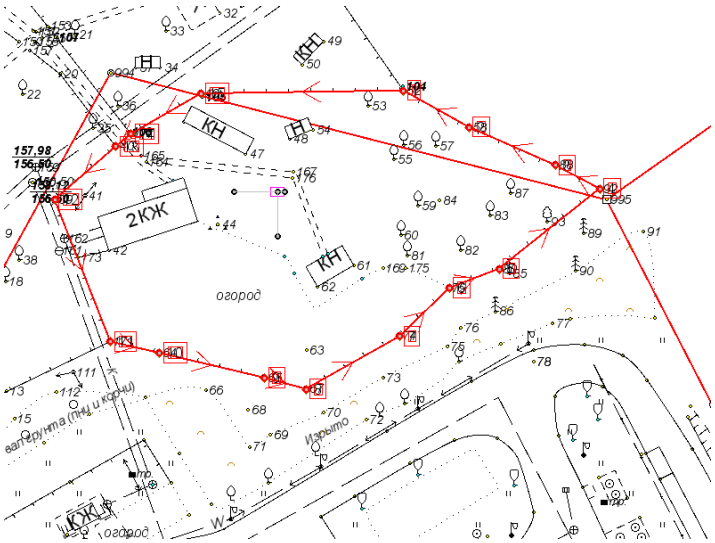


Рис. 1.16

11. После завершения построения в окне параметров отображается список характеристик, часть которых доступна для редактирования и заполнения. Задайте параметры для тех, которые можно отредактировать, как показано на рис. 1.17.

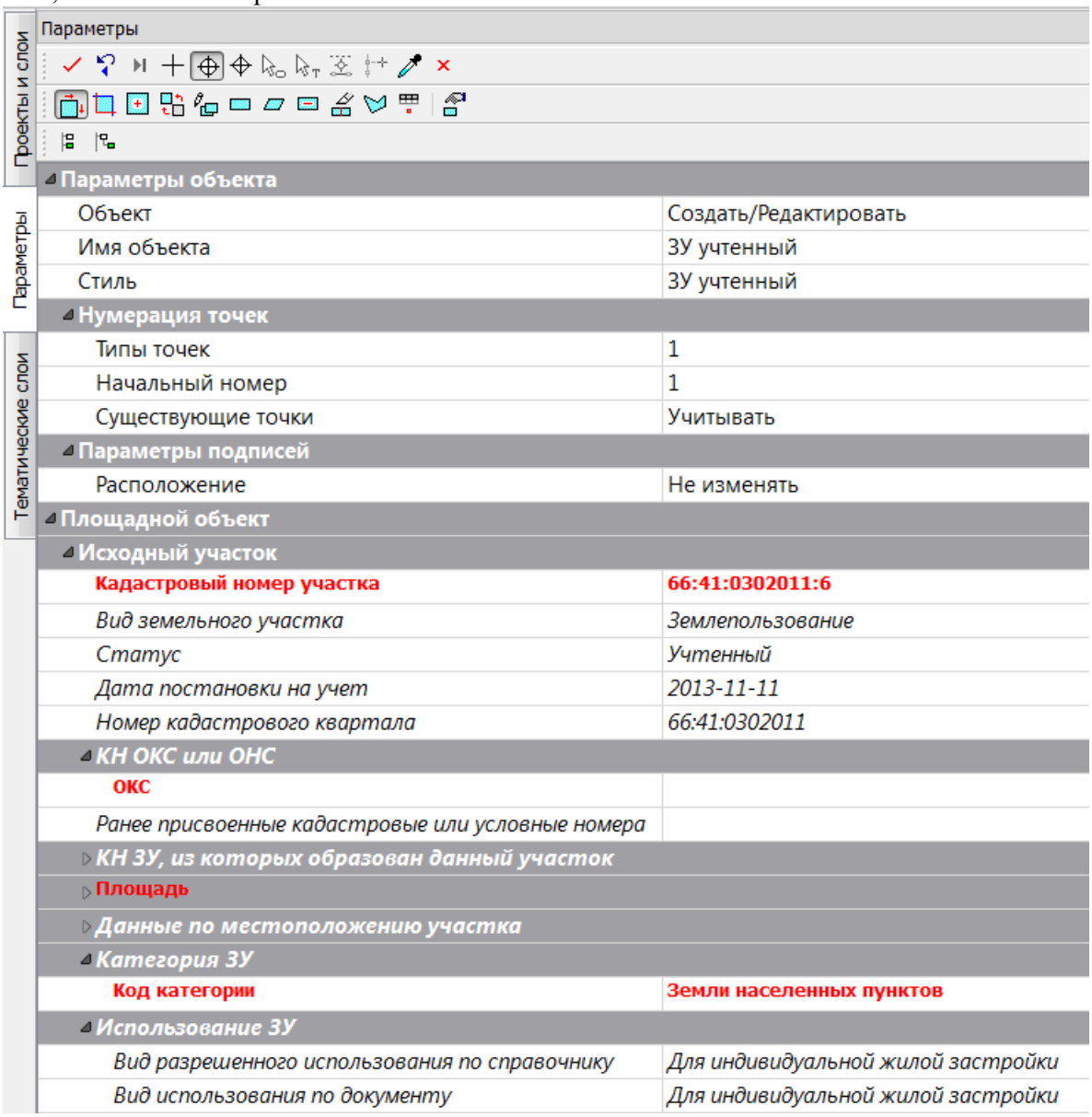


Рис. 1.17

12. В позиции **Сведения о праве** выберите кнопку ...
13. В открывшемся окне выберите на локальной панели команду Добавить  .
Заполните параметры согласно рисунку. (см. рис. 1.18).
14. Дальнейшие параметры заполните как на рис. 1.19

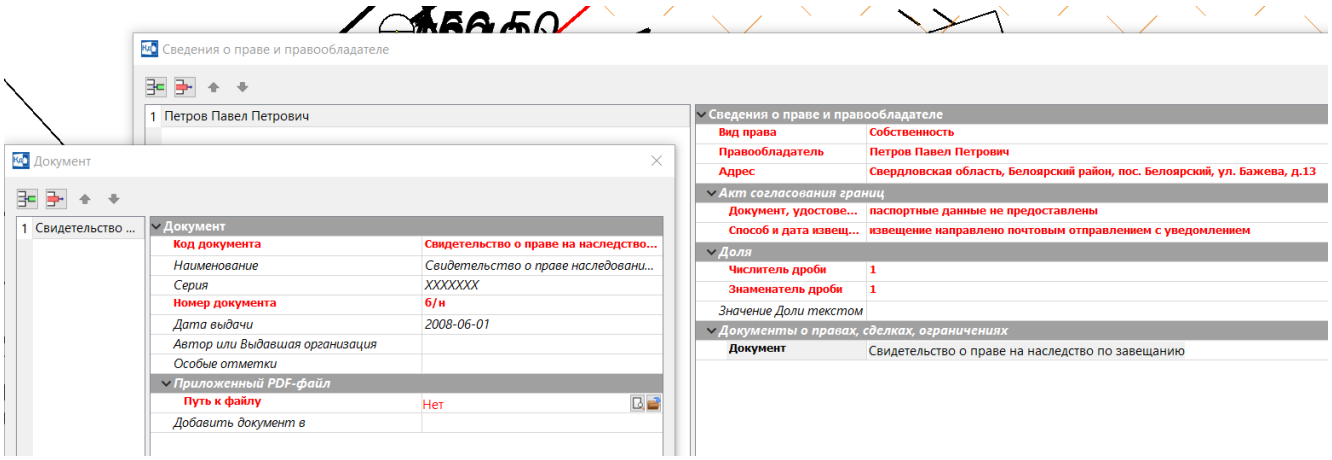


Рис. 1.18

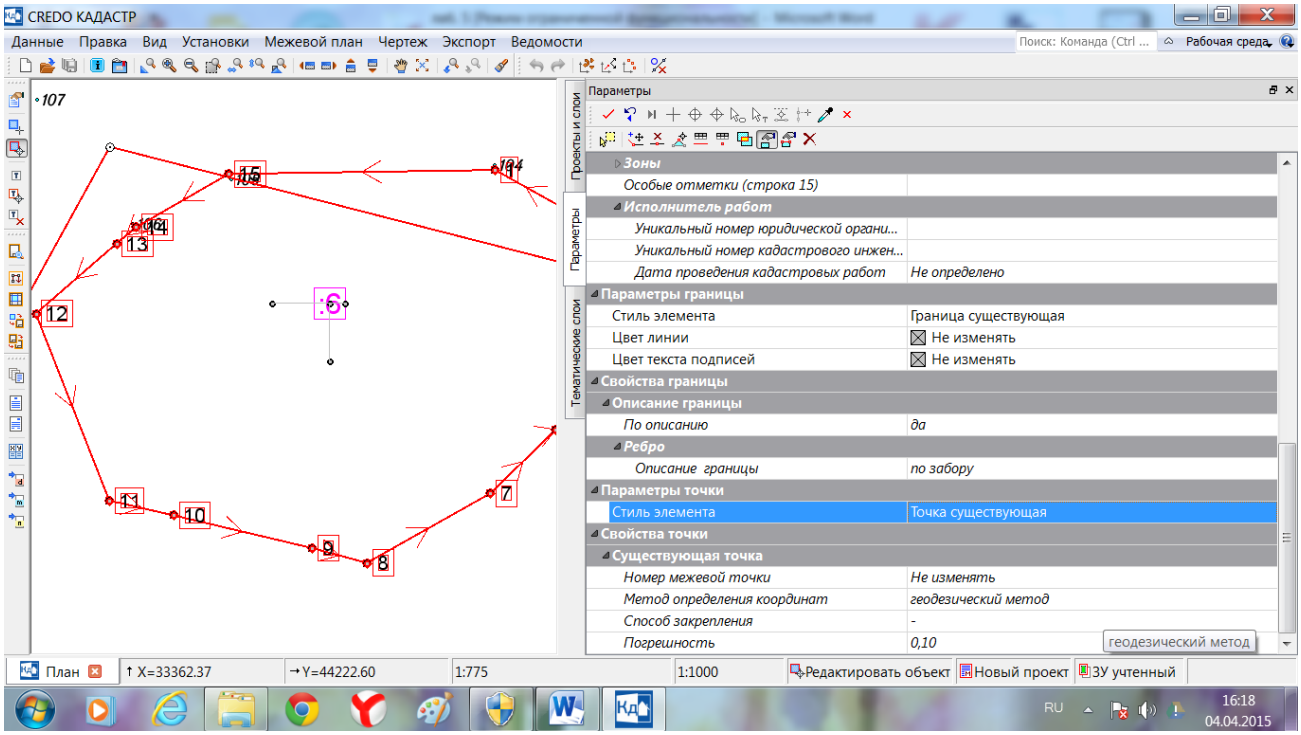


Рис. 1.19

15. **Для создания геометрии следующего Кадастрового объекта.** Сделайте активным проект межевого плана **Образуемый ЗУ** (двойным щелчком мыши по названию проекта).
16. Активизируйте команду **Межевой план/Создать объект**. В открывшемся диалоге **Организатор объектов**, выберите слой – **Образуемый ЗУ** – для создания нового кадастрового объекта нажав **ОК**.
17. В открывшемся окне **Открыть объект «Стиль»**, для создаваемого кадастрового объекта (КО) выберите в папке **Стиль** – стиль отображения **Образуемый ЗУ**. После выбора стиля нажмите кнопку **Открыть**.
18. В открывшемся окне параметров на локальной панели активизируйте команду построения КО – **С созданием элементов**  . Захватывая точки (вид курсора ) по ограждению, создайте кадастровый объект. Для того чтобы контур был замкнутым, необходимо захватить повторно начальную точку.
19. После завершения построения в окне параметров отображается список характеристик, часть которых доступна для редактирования и заполнения. Задайте параметры для тех, которые можно отредактировать.

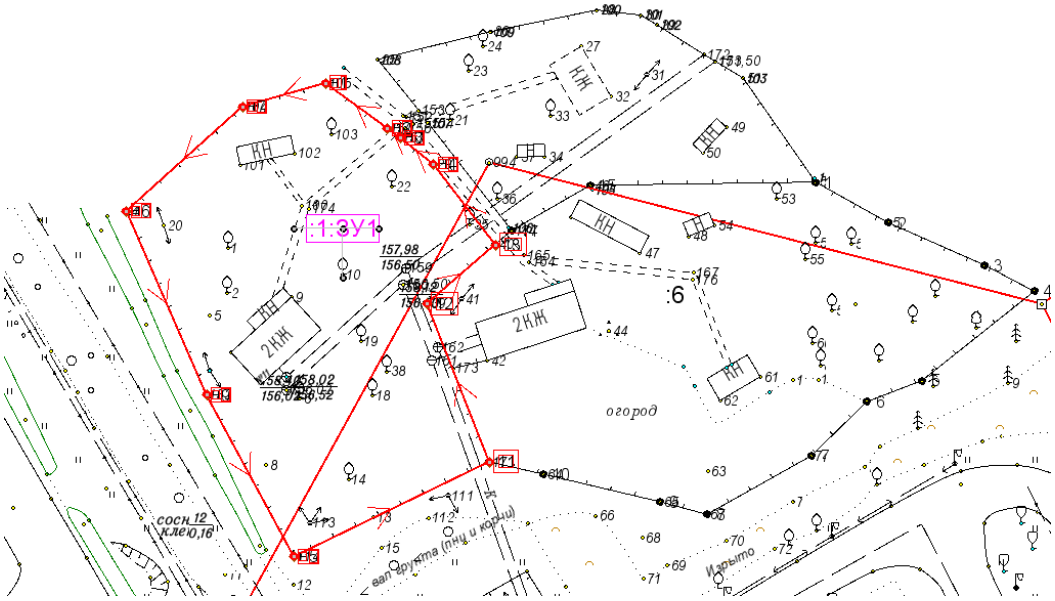


Рис. 1.20. Создание геометрии КО

20. Введите необходимы параметры. Нумерацию точек начинить с «1», существующие точки учитывать, номер кадастрового квартала **66:41:0302011,** обозначение на плане должно быть **00:00:0000001:1:ЗУ1** .

21. В открывшемся окне **ЗУ для прохода/проезда** выберите команду **Добавить**  . Введите в строку **Кадастровый номер** – **66:41:0302011:1**, а затем напротив объекта поставьте флажок..

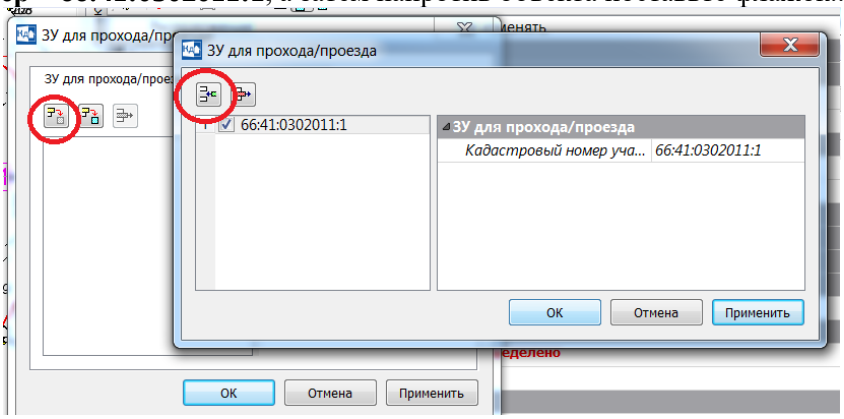


Рис. 1.21

📖 *В параметре **КН для обеспечения прохода и проезда/Иное** вместо кадастрового номера ЗУ можно указать слова «земли (земельные участки) общего пользования».*

22. Нажмите **Применить**. **ОК**.

23. Далее заполните данные по местоположению участка в окне параметров в разделе **Почтовый адрес. Данные по типам выбираются только из выпадающих списков!**

📖 *Также имеется возможность импортировать данные по местоположению объектов в систему, а затем их использовать. Для этого предварительно необходимо скачать полную базу адресов формата XML с сайта **Федеральной Информационной Адресной Системы (ФИАС)**. Затем используя команду **Установки/Импорт адресов** импортируйте адреса из базы в систему. Чтобы вывести адрес объекта следует в окне параметров в поле **Почтовый адрес** нажать кнопку **Выбрать в базе адресов** (кнопка появится после импорта базы адресов), после чего откроется окно **Диалог наполнения адреса** со всеми позициями для ввода данных (см. рис. 1.22).*

Воспользуйтесь базой адресов, импортированных в систему КАДАСТР

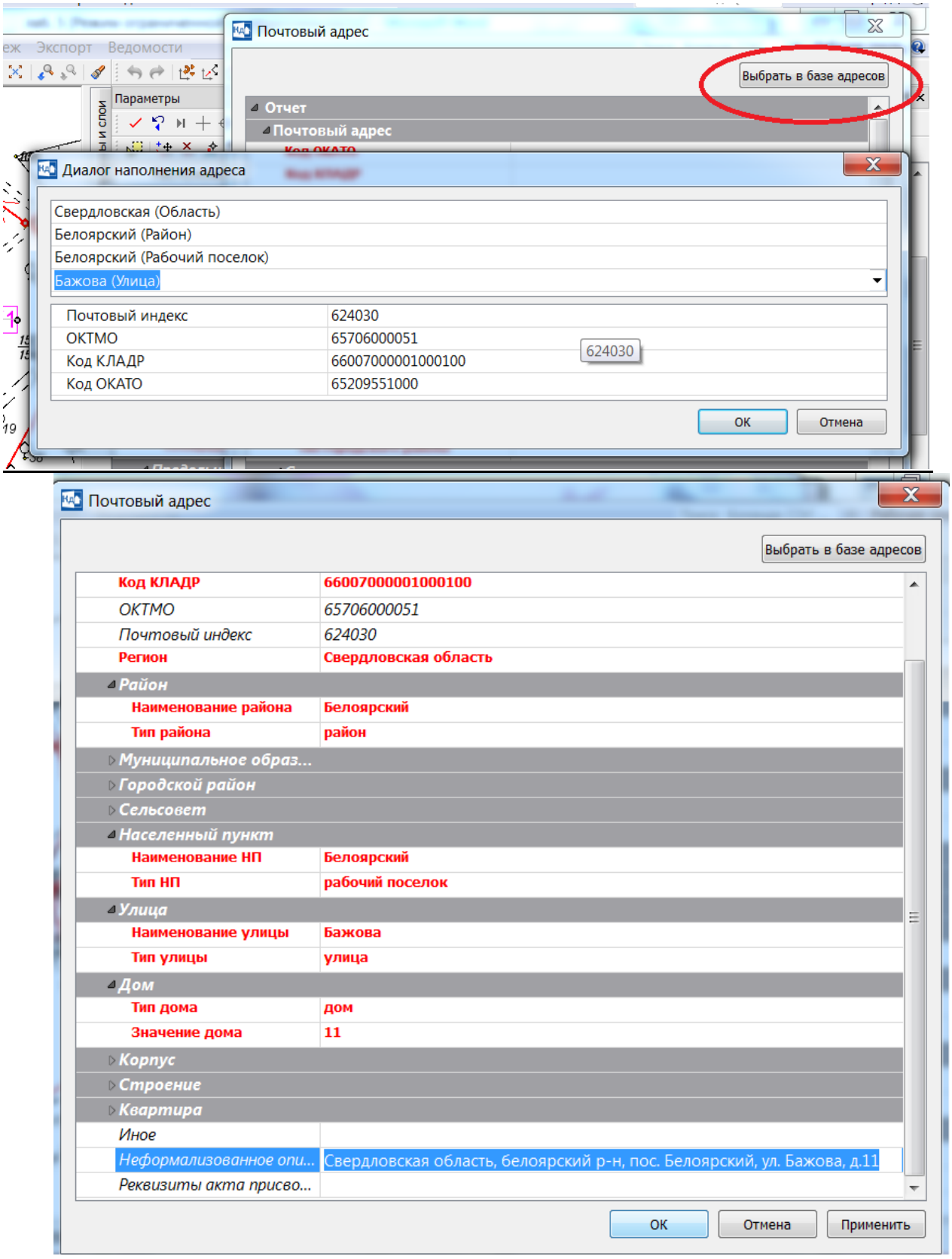


Рис. 1.23

24. В строке **Неформализованное описание местоположения** укажите полный адрес расположения ЗУ.
25. В оставшихся параметрах определите **Код категории- Земли населенных пунктов , В качестве правообладателя введите свои данные (на основании договора купли-продажи).**
26. Заполните позиции параметра **Использование ЗУ.** В строке **Вид разрешённого использования по справочнику** выберите из списка нужное значение – *Для ведения личного подсобного хозяйства*, а в строку **Вид использования по документу** введите данные с клавиатуры- *Для ведения личного подсобного хозяйства*.

27. Для заполнения сведений о смежных участках нажмите кнопку [...]. В значениях начальной и конечной точек описания смежного участка выберете точки по границе со смежным участком и укажите его в модели (рис. 1.24). Нажмите **ОК** во всех выпавших окнах**.**

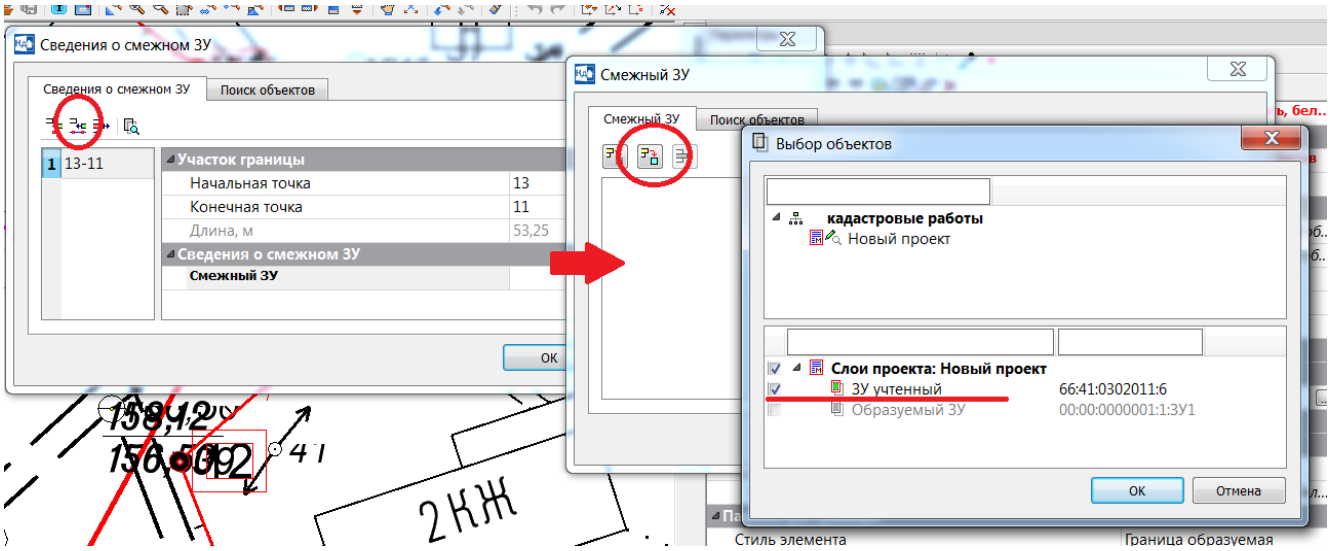


Рис. 1.24

28. Далее описание границы – **Да (забор)**.
29. Свойства точки заполните согласно рисунку.

Свойства точки	
Образуемая точка	
Номер межевой точки	*Не изменять*
Метод определения координат	*геодезический метод*
Способ закрепления	*Закрепление отсутствует*
Погрешность	*0,10*
Формула расчета СКП	
Префикс номера точки	*н*

30. **Заполнив все параметры, примените построение** [✓].
31. Отключите видимость проекта **Учтенный, результаты съемки и съемка** в окне проекте **Образование ОН** отключите видимость слоя **ЗУ Учтенный**.
32. Выполните сохранение данных.

Упражнение 4. Создание пунктов геодезической сети. Работа в проекте типа Межевой план

1. Откройте набор проектов **кадастровые работы**. командой **Данные/Открыть набор проектов**.
2. Сделайте активным проект типа Межевой план с названием **Образование ОН**.
3. Выберите команду **Межевой план/Создать объект**.
4. В открывшемся диалоге **Организатор объектов**, выберите существующий слой – **Образуемый ЗУ** – и нажмите кнопку [Создать на одном уровне]
5. Появится слой с именем **Новый слой1** (см. рис. 1.25). Нажмите **Применить**. **ОК**.

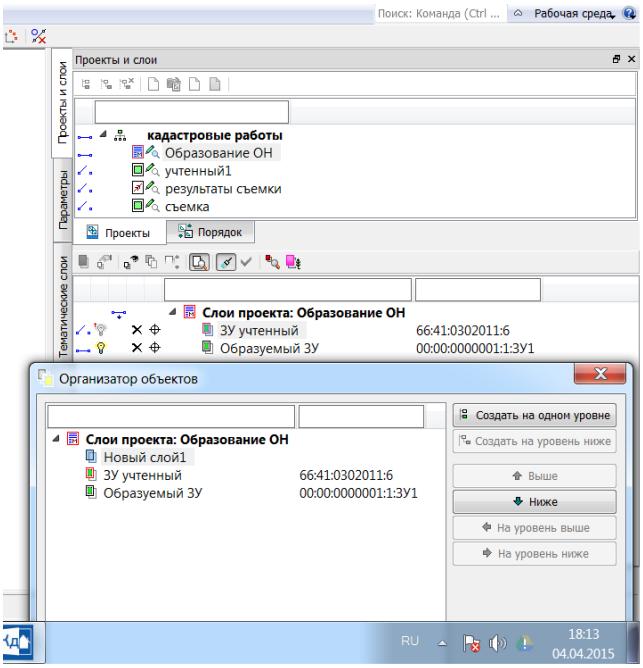


Рис. 1.25

6. В открывшемся окне **Открыть объект «Стиль»**, для создаваемого пункта геодезической сети выберите стиль отображения **Пункт ГГС**. После выбора стиля нажмите кнопку **Открыть**.
7. Перейдите в графическое окно и укажите курсором (в режиме захвата точки ) пункт пп1014.
8. Внесите информацию в разделе **Пункт геодезической сети**: по Названию, Типу и Классу пункта (см. рис 1.26).

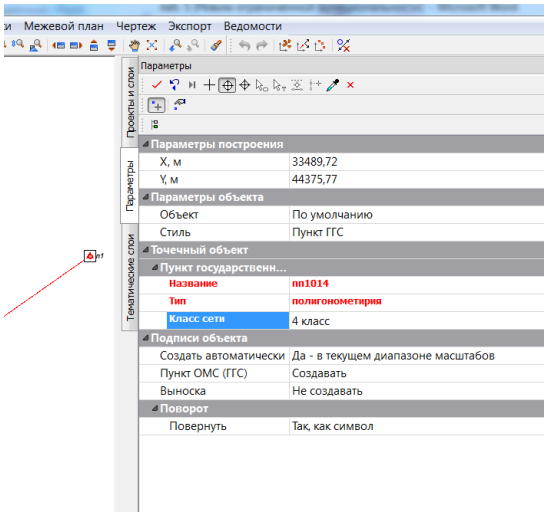


Рис. 1.26

9. Заполнив все параметры. Примените построение  .
10. Выберите команду **Показать всё**.
11. По технологии, описанной выше, самостоятельно создайте все исходные пункты геодезической сети (995, пп1373, пп1357). Параметры пунктов аналогичны пп1014.
12. Выполните сохранение данных.

3.2. Свойства кадастрового проекта. Заполнение Свойств кадастрового проекта. Работа в проекте типа Межевой план

Диалог **Свойства проекта** (команда **Межевой план/Свойства Проекта**) предназначен для ввода информации (рис. 4.31), которая используется для формирования разделов текстовой части МП (в формате RTF) и Заявления.

Диалог служит также для создания электронных документов, предоставляемых в орган кадастрового учета в виде файлов XML («XML – Межевого плана» земельного участка, «XML – заявления»), а также для экспорта всего пакета документов, необходимых для постановки ЗУ на кадастровый учет, в электронном виде (формат XML).

Обязательные поля, без которых формирование файла XML произойдет некорректно (не пройдет форматно-логический контроль), отображаются в диалоге **Свойства проекта** прямым начертанием текста и **красным цветом**, необязательные – курсивом.

Необходимо отметить, что информация, введенная по каждому из реквизитов, может быть сохранена как вариант заполнения (команда **Сохранить** на панели инструментов диалога) в специальной библиотеке для последующего использования при подготовке других документов (команда **Открыть**). Количество вариантов заполнения в такой библиотеке не ограничено, а один из них (или несколько - например, при выборе документов) может быть выбран по умолчанию – хранящиеся в нем значения будут автоматически подставляться в реквизит при создании проекта. Использование по умолчанию задается в окне параметров диалога **Варианты заполнения**, которое вызывается при активизации кнопки **Сохранить** или **Открыть**.

Заданная информация хранится непосредственно за проектом.

Упражнение 3. Заполнение Свойств кадастрового проекта. Работа в проекте типа Межевой план

1. Откройте набор проектов **кадастровые работы/Открыть набор проектов**.
2. Выберите команду **Межевой план/Свойства Проекта**. Обратите внимание, в разделе шаблон проекта по умолчанию назначен шаблон «Раздел ЗУ». Выберите шаблон «**Образование из земель…**» (рис.1.27).
3. В разделе **Параметры документа** должно быть установлено: **Отображать свойства – Все**, **Версия отчета-*последняя***.

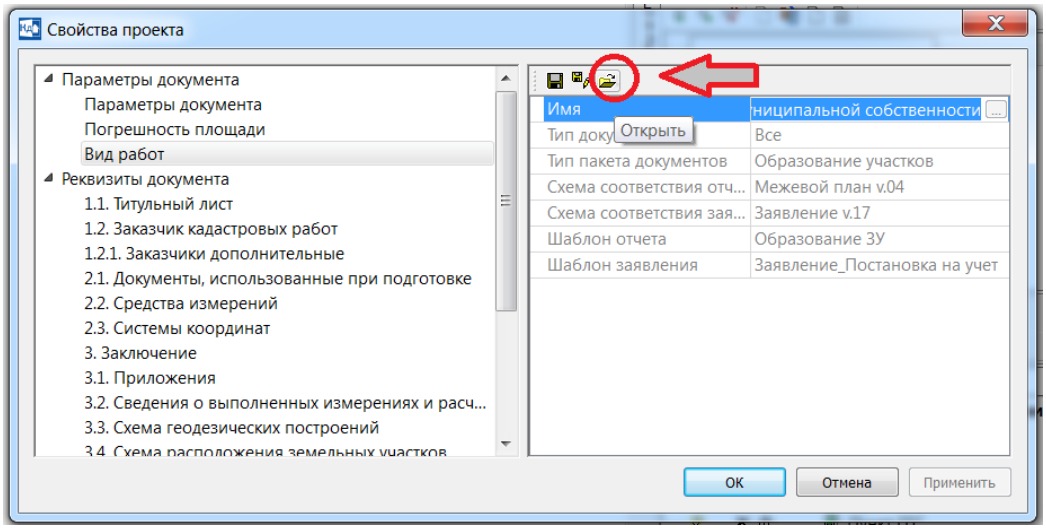


Рис. 1.27

4. В разделе **Погрешность площади** задайте **Нормативный коэффициент** – 2,5, **СКП точек** – Максимальная.
5. В строке **Вид работ** нажмите кнопку и отредактируйте выбранный вариант заполнения, как показано на рисунке 1.28

6. В реквизите **Титульный лист** на локальной панели инструментов строку **Цель работ** заполните согласно рис. 1.28. Способ образования участка выберете значение **Образование из земель** нажмите кнопку **Применить.**

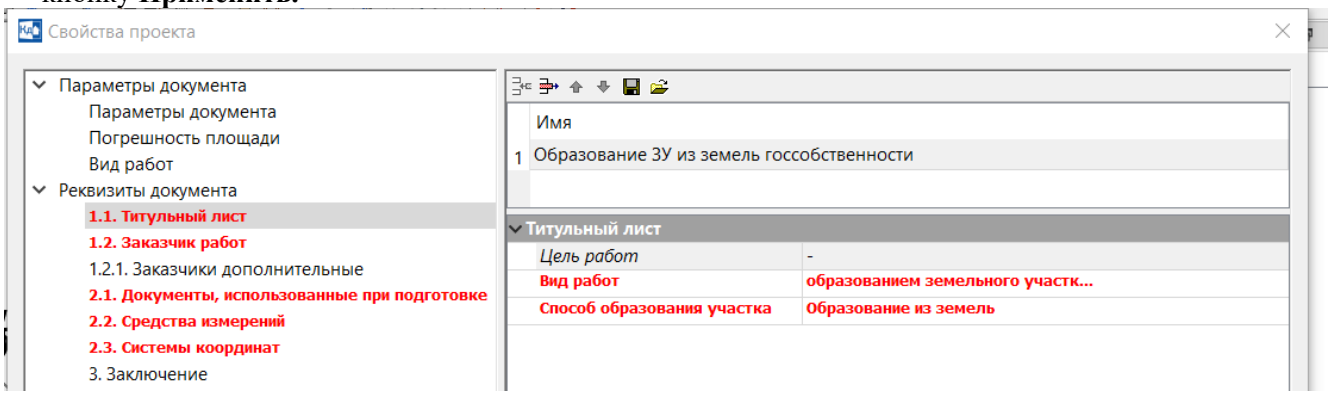


Рис. 1.28

7. В реквизите **Заказчик кадастровых работ** выберите **Дата** – 2015-02-19, **Вид** – Физическое лицо,

ФИО – Иванов Игорь Иванович (паспорт серия 65 36 №. 487923, выданный 3 февраля 2010 года Отделом УФМС России по Свердловской области в Ленинском районе г. Екатеринбурга, проживающий по адресу: г. Екатеринбург, пер. Университетский, д.11, кв. 40). Заполните сведения о заказчике кадастровых работ.

8. В реквизите **Документы, использованные при подготовке** введите информацию о документах:

- Кадастровый план территории №2900/201/11-31315 выданный Управлением Росеестра по Свердловской области 2 августа 2022 года;
- Договор о предоставлении участка в постоянное бессрочное пользование № 259 от 9 марта 2010 года, выданный Администрацией МО «Городское поселение Белоярский».
- Технический отчет о результатах топографо-геодезических работ (графическая часть) от 25 сентября 2014 г. ФГБОУ ВПО «УГГУ». Пример заполнения представлен на рис. 1.29.

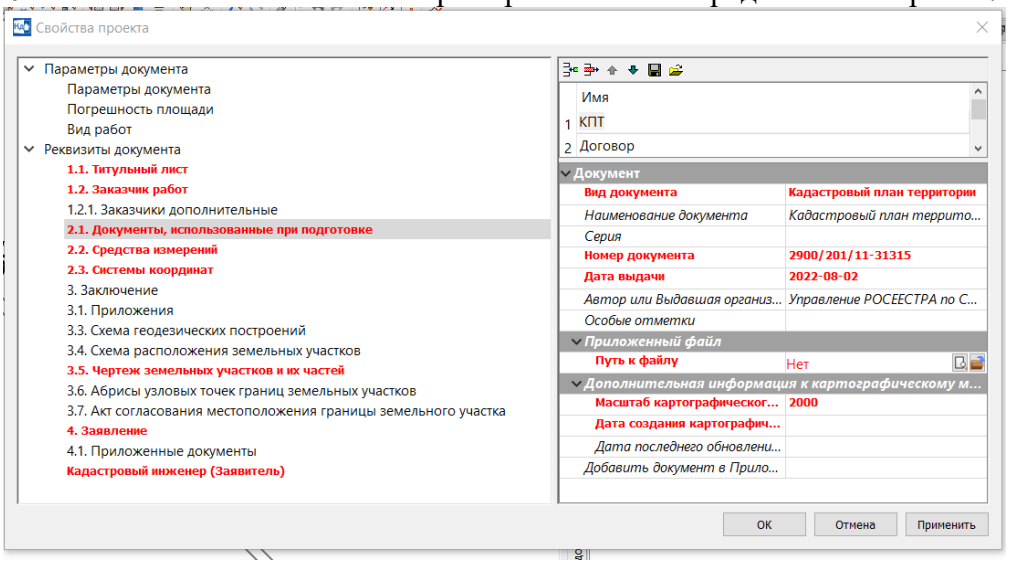


Рис. 1.29

Для этого выберите на панели инструментов кнопку Создать  . Также можно приложить образы соответствующих документов. Сохраните сведения о документах в системе КАДАСТР используя  , для этого выберете каждую строку и нажмите нужную кнопку.

9. Введите сведения о средствах измерений согласно таблице 1

Таблица 1

Сведения о средствах измерений

№ п/п	Наименование прибора (инструмента, аппаратуры)	Реквизиты сертификата прибора (инструмента, аппаратуры)	Реквизиты свидетельства о поверке прибора (инструмента, аппаратуры)
1	2	3	4
1.	Тахеометр Leika 407	Заводской номер 755782	Свидетельство о поверке №1055, выдано ФГУП «ПО»УОМЗ» 31.10.2022 г. Номер в государственном реестре средств измерений 43895-10
2	GPS приемник SOKKIA GRX-2	Заводской номер 100259, 100260	Свидетельство о поверке №562, выдано ООО «Геостройизыскания-Екатеринбург» 25.01.2022 г. Номер в государственном реестре средств измерений 44563-10

Пример ввода представлен на рис. 1.30. Сохраните сведения о средствах измерений в системе КАДАСТР используя  .

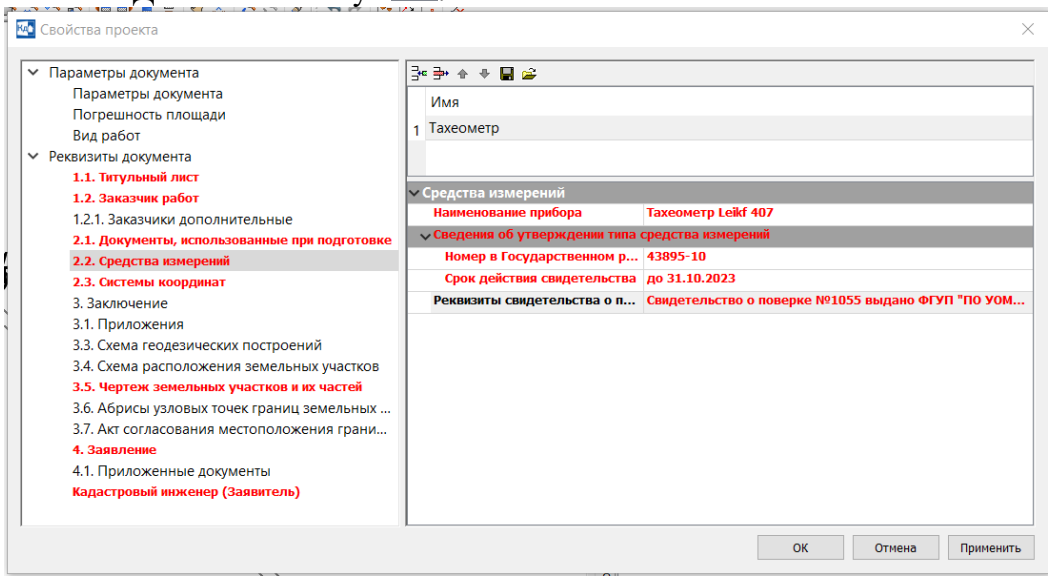
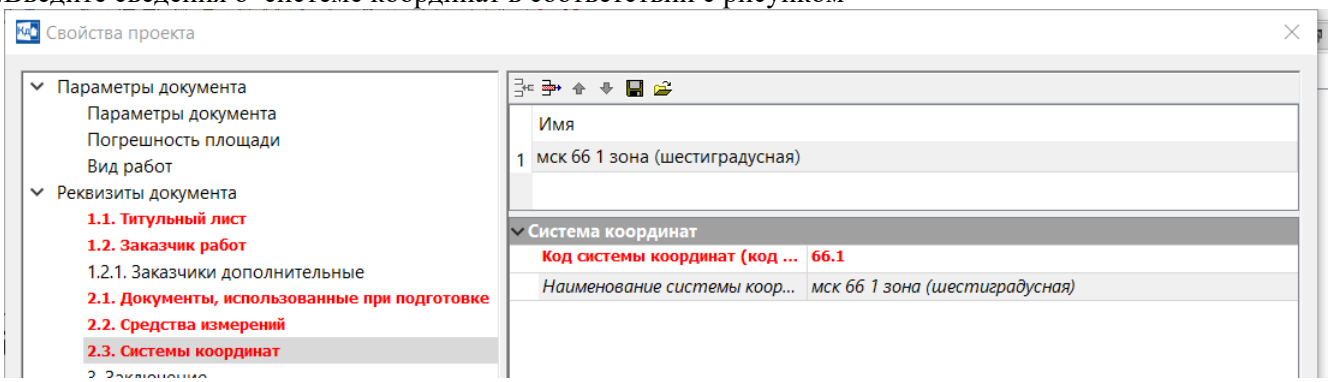
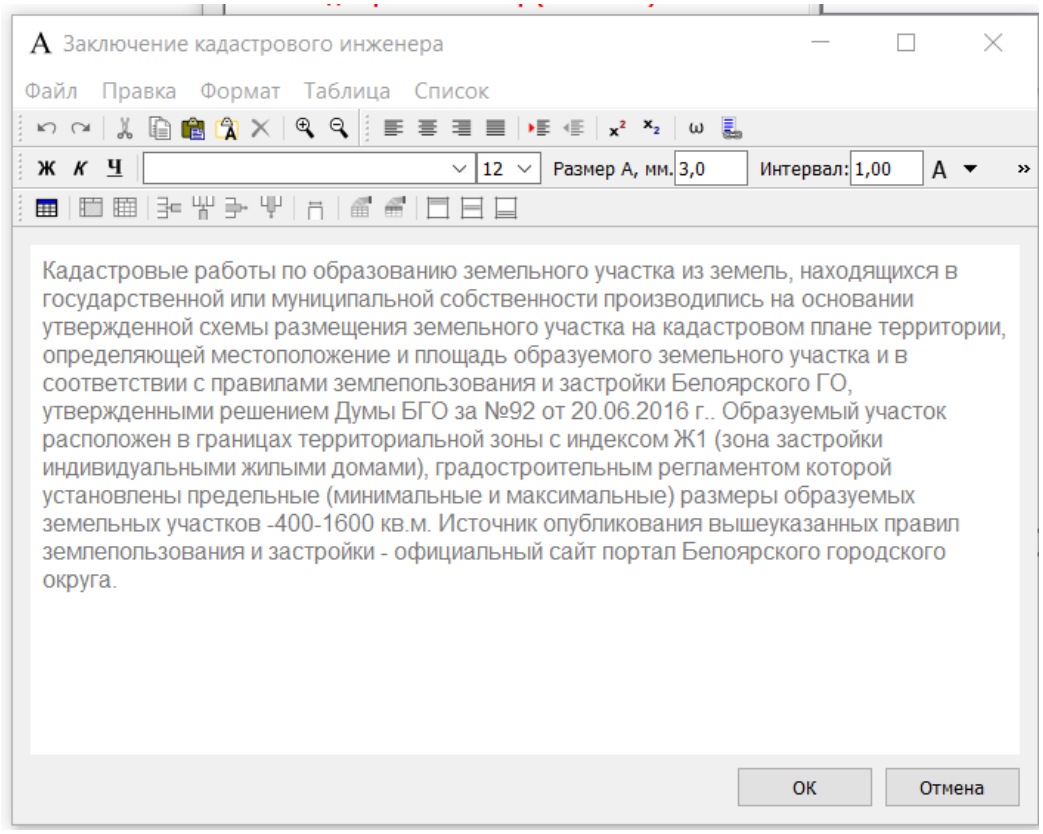


Рис. 1.30

10. Введите сведения о системе координат в соответствии с рисунком



11. Введите данные по Заключению кадастрового инженера:



12. В реквизит **Кадастровый инженер** задайте информацию в соответствии с рисунком 1.31. Остальные значения введите произвольно.

Сохраните сведения о кадастровом инженере Бубнове нажав кнопку , затем удалите строку Бубнов, добавьте новую строку и введите сведения о кадастровом инженере Баринове (см. рис. 1.31)

Физическое лицо	
Фамилия, имя, отчество для Физ. лиц	
Фамилия	Бубнов
Имя	Александр
Отчество	Алексеевич
Номер квалификационного аттестата кадастрового инженера	ОГРН 1044701332125
ИНН	
Контактный телефон	8(81362) 56789
Электронный адрес	office@land.ru
Адрес кадастрового инженера	**Свердловская область, г. Екатеринбург, ул. Зеленая, д.9**
Организация	
Название организации Юр. лица	ООО "Новый уровень"
ОГРН	
ИНН	

.

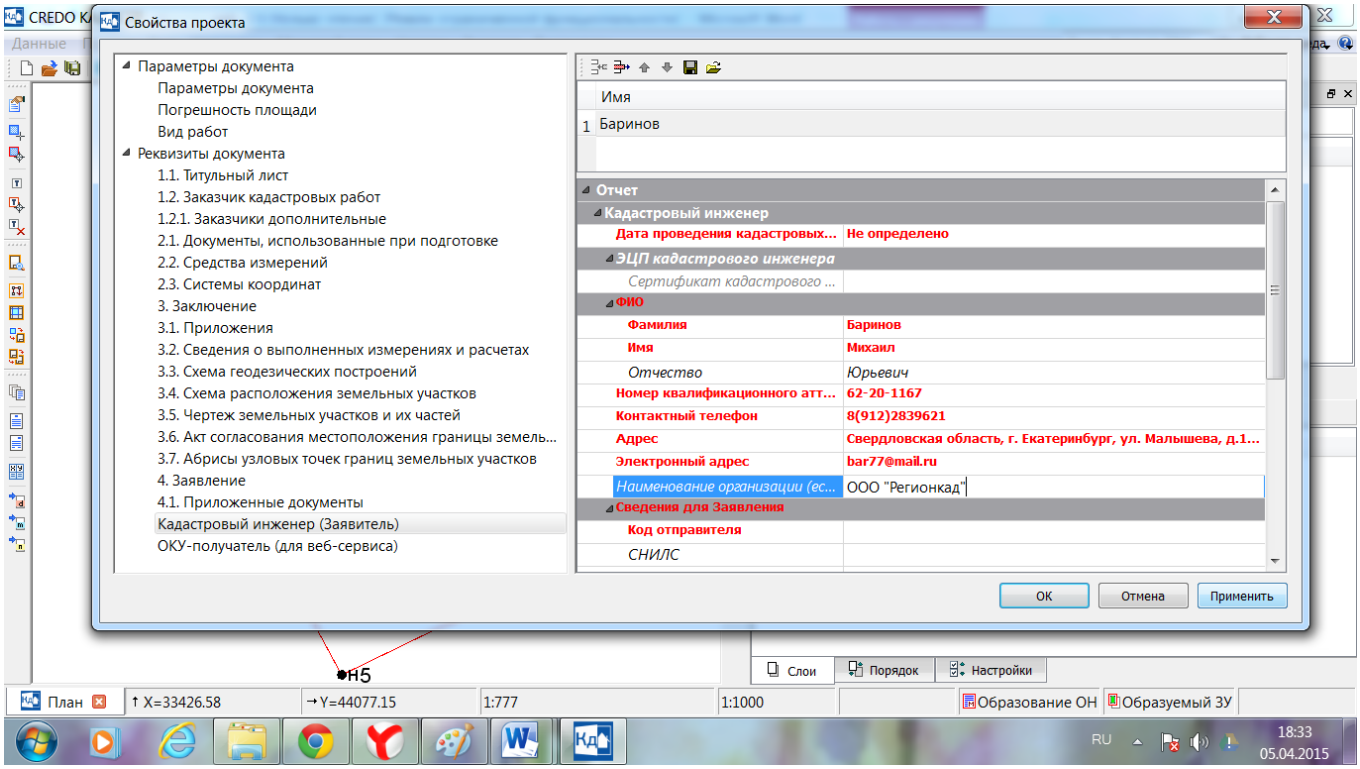


Рис. 1.31

После ввода всей информации нажмите на локальной панели инструментов кнопку .

13. Реквизиты:, **Заявление**, **Заявитель**, **Приложенные документы** оставьте без заполнений.
14. После заполнения всех реквизитов нажмите **Применить**. **ОК**.
15. Выполните сохранение данных.

3.3. Назначения и возможности проекта Изыскания. Работа в проекте типа Изыскания

Основное **Назначение** проекта **Изыскания**:

- создание схем геодезических построений. Для этих целей в системе реализованы специализированные команды, которые позволят свести к минимуму затраты на создание таких схем.
- импорт данных GDS из CREDO_DAT. В результате импорта в систему CREDO КАДАСТР подгружаются точки и связи планово-высотного обоснования (образующие схему), которые далее могут использоваться при создании кадастровых объектов;

Создание схемы геодезических построений

Для создания схем геодезических построений предназначены команды **Измерения** , **Ход** , которые расположены в блоке **Создать** меню **Схема геодезических построений**.

При создании схемы с помощью команды **Измерения** происходит последовательное создание сначала точки станции, а затем – точек и связей, снятых с этой станции. В окне параметров можно уточнить координаты создаваемых точек, параметры линии связи. Также для всех создаваемых элементов назначаются объекты классификатора, определяющие внешний вид элементов схемы.

Команда **Ход** позволяет интерактивно создавать пункты и ходы планового обоснования с одновременным уточнением в окне параметров характеристик всех создаваемых элементов. Завершение построения выполняется с помощью кнопки локальной панели инструментов **Последний элемент построения** (либо после захвата последнего узла построения – вид курсора). После этого в окне параметров для пунктов и линий измерений можно изменить назначенные по умолчанию объекты классификатора .

Команда **Переместить** меню **Схема геодезических построений\Редактировать** позволяет интерактивно перемещать пункты и точки, а вслед за ними – и линии связей схем геодезических построений.

Команда **Удалить** меню **Схема геодезических построений\Редактировать** производит удаление всех связанных элементов схемы. То есть, если, например, выбрать для удаления точку, то вместе с ней будут удалены и линии связи, которые на нее «опираются».

С точки зрения типизации элементов платформы – точки, пункты, создаваемые в схемах геодезических построений, являются точечными тематическими объектами, а линии связей – линейными тематическими объектами либо графическими масками. Поэтому при необходимости редактирования параметров элементов схемы следует пользоваться командами **Редактировать точечный объект**, **Редактировать линейный объект**, **Редактировать графическую маску**, выбирая команду в соответствии с тем типом элемента, который требуется редактировать.

Упражнение 4. Работа в проекте типа Изыскания. Создание схемы геодезических построений

1. Откройте набор проектов **кадастровые работы**..
2. Включите видимость слоёв проекта **Образуемый ЗУ, кроме ЗУ учтенный** .
3. Включите видимость проекта **Изыскания «результаты съемки»,** сделайте его активным**.**
4. Выберите команду **Схема геодезических построений/Создать/Измерения**.
5. Создайте ход по точкам, как показано на рис.1.32. Используя команду ***Параметры и удаление объектов*** удалите лишние стороны теодолитного хода и измените параметры исходных сторон на элемент классификатора – ***базовая линия***.

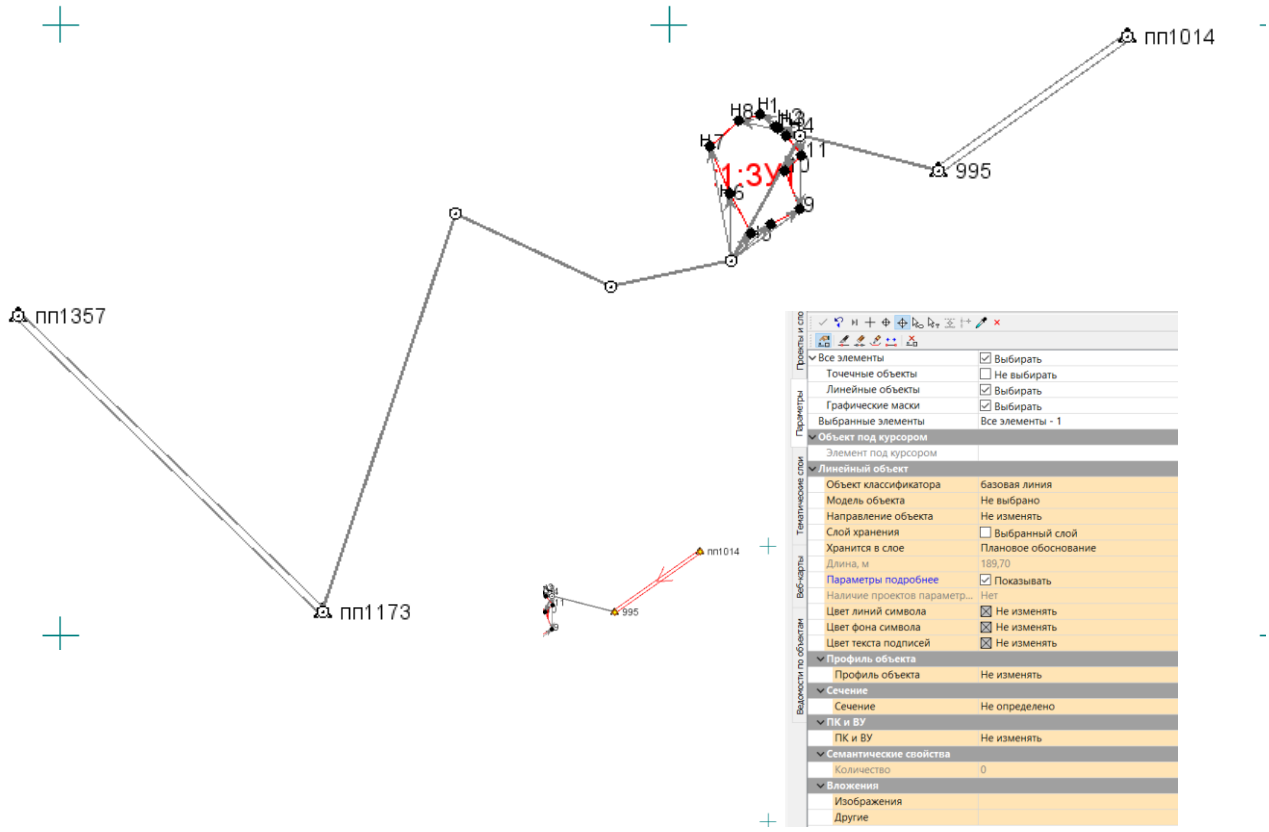


Рис.1.32

6. Установите курсор в режим захвата точки (вид курсора) и выберите **Пункт съёмочного обоснования**. Затем выберите поочерёдно точки (вид курсора) образуемого ЗУ (см. рис. 1.33) (Объект классификатора для раздела Линия измерения должен быть – Линия засечки).

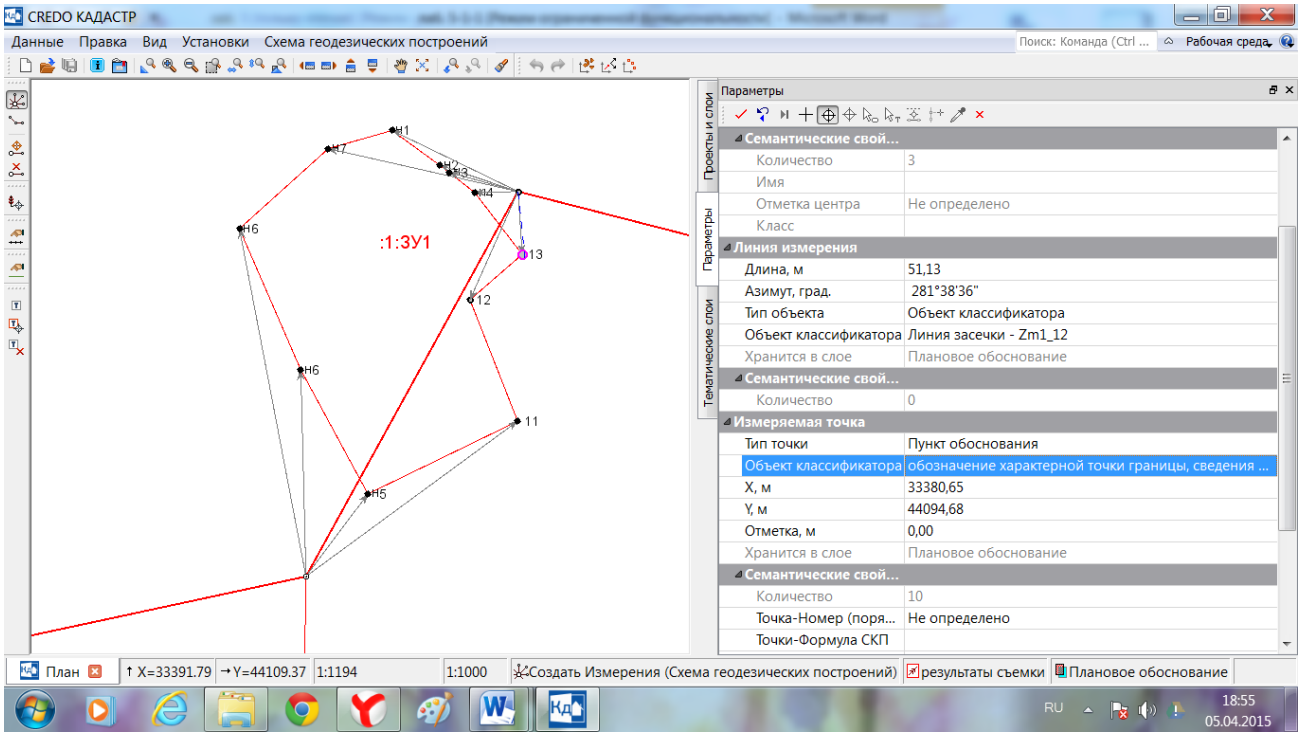


Рис. 1.33

7. Нажмите примените построение .
8. В пункте Установки/ Свойства набора проектов установите масштаб 1:5000
9. Выполните сохранение данных.

3.4. Формирование разделов графической части МП

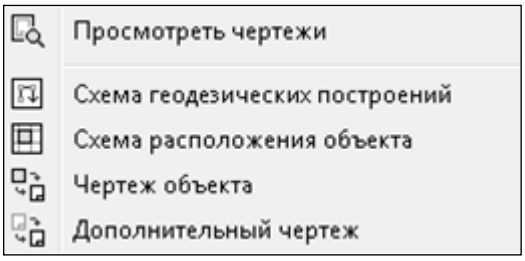


Рис. 1.34

В системе CREDO КАДАСТР предусмотрена возможность создания чертежа объектов, схемы расположения объектов, схемы геодезических построений и дополнительного чертежа (абрис узловых точек границ ЗУ, план этажа или здания).

В дальнейшем созданные схемы и чертежи используются для автоматической вставки в соответствующие разделы межевого и технического планов.

Создание чертежей (схем) производится в окне плана посредством специальных команд меню **Чертеж** (рис. 1.34). При этом должен быть активным проект, в котором выполняется подготовка соответствующего документа, т.е. один из проектов: **Межевой план**, **Карта (План)**, **Технический план здания**, **Технический план помещения**, **Технический план сооружения**, **Технический план объекта незавершенного строительства**.

Формирование чертежей (схем), все подготовительные операции проводятся в окне плана посредством специальных команд. В результате создаются проекты типа **Чертеж** в окне чертежной модели.

Информация, попадающая на чертежи (схемы), формируется путем копирования данных видимых слоев модели плана из всех типов проектов (**Межевой план**, **Ситуационный план** и т.д.). Контур, в пределах которого происходит копирование, автоматически определяется областью печати применяемого шаблона чертежа.

С системой поставляется библиотека шаблонов, но пользователь может редактировать существующие шаблоны или создавать новые и сохранять их в библиотеке. Приложение **Редактор Шаблонов** вызывается при помощи команды **Установки/Редактор Шаблонов**. Настройка шаблонов осуществляется предварительно в приложении **Редактор Шаблонов**.

Перед формированием чертежа (схемы) необходимо учесть следующую особенность: в чертежную модель передаются только видимые элементы, поэтому следует отрегулировать видимость слоев и включить/выключить видимость необходимых элементов модели (панель **Слои**, кнопка **Фильтры видимости**).

Общая последовательность действий по созданию чертежа (схемы):

- Для начала необходимо выполнить подготовительные операции: отредактировать местоположение подписей объектов (кадастровые номера, номера точек границы), включить/выключить видимость необходимых проектов либо слоев, установить масштаб съемки и т.д.
- Затем выбирается необходимая команда для создания чертежа (схемы) (например, **Чертеж/Чертеж объекта**). Откроется диалог **Открыть объект «Шаблон чертежа»**, в котором задается требуемый шаблон (для чертежа земельного участка – *Чертеж ЗУ*, а для схем – *Схема геод. построений_ЗУ и Схема расположения ЗУ и т.д.*).

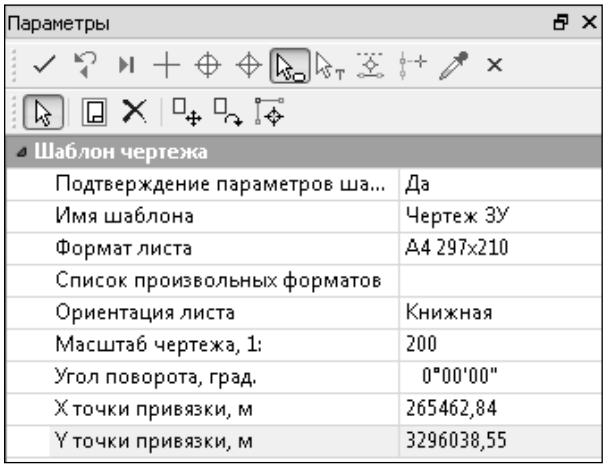


Рис. 1.35

- После выбора шаблона откроется окно **Параметры**, в котором необходимо задать параметры создания чертежа (рис. 1.35):

На локальной панели окна сгруппированы методы  , которые позволяют перемещать, поворачивать шаблон, изменять область печати, добавлять и удалять шаблоны. Используя данные методы, а также уточнением доступных параметров шаблона (в частности, координат точки привязки, угла поворота, ориентации листа) добейтесь требуемого размещения шаблона на плане.

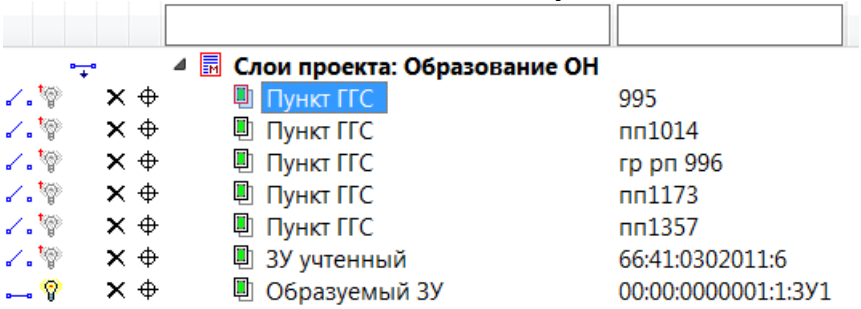
В окне параметров можно изменить шаблон чертежа, формат листа, масштаб создаваемого чертежа и т.д.

После выполнения всех настроек нажимается кнопка **Применить построение**  , после чего автоматически осуществляется переход в **Чертежную модель**.

В чертежной модели имеется возможность создавать ведомости **Условные обозначения** и **Землеустроительная таблица** в меню **Ведомости** в автоматическом режиме. Ведомость условных обозначений создается для кадастровых объектов активного проекта либо всего набора проектов с автоматической вставкой условных обозначений в виде многострочного текста на чертеж или схему. Вставленные условные обозначения можно отредактировать стандартными командами для редактирования текста. Аналогично создается и редактируется землеустроительная таблица.

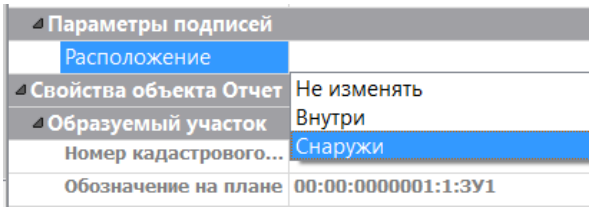
Упражнение 5. Формирование разделов графической части МП. Создание чертежа объекта

1. Откройте набор проектов **кадастровые работы/Открыть набор проектов**.
2. Отключите видимость всех проектов, кроме проекта **Образование ОН** (тип Межевой план).
3. У проекта **Образование ОН** отключите видимость слоёв **Пункт ГГС**.



4. Сделайте проект **Образование ОН** активным.

5. Скройте видимость координатной сетки. Команда **Установки/Свойства Набора проектов/Координатная сетка/Отображать координатную сетку/Нет**. В окне **Свойств Набора проектов** нажмите **Применить**, установите масштаб генерализации 1:1000 и нажмите **[ОК]**.
6. Отредактируйте положение подписей точек *(перемещение с помощью направляющих)* поворота границы объекта. Команда **Межевой план/Подпись/Редактировать** или воспользуйтесь командой **Межевой план/Редактировать объект**. Выберете объект – образуемый участок и в параметрах объекта измените положение подписи.



7. Активизируйте команду **Чертёж/Чертёж объекта**.
8. В открывшемся окне **Открыть объект «Шаблон чертежа»** выберите шаблон МП **Чертеж ЗУ и их частей**.

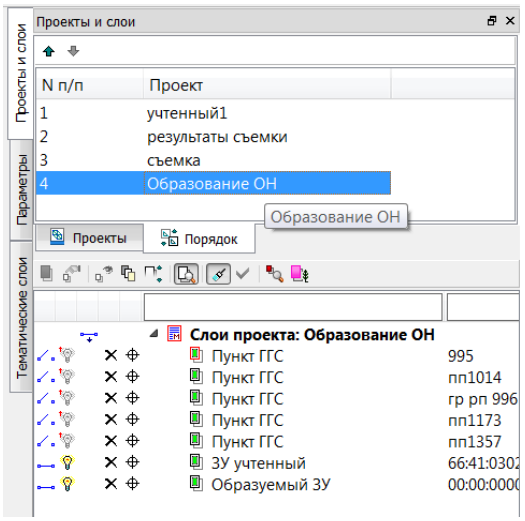
В окне параметров в строке **Формат листа** выберите формат листа *А4 297х210*. Ориентацию листа оставьте – *Книжная*. Переместите шаблон так, чтобы кадастровые объекты размещались в центре, используя команду **Переместить шаблоны** на локальной панели инструментов.

9. Примените построение .
10. Закройте проект чертёжной модели. На вопрос о сохранении нажмите **Да**.

Упражнение 6. Формирование разделов графической части МП. Создание схемы геодезических построений

1. В открытом наборе проектов **кадастровые работы** включите видимость проектов **Образование ОН**, **результаты съемки** (видимость остальных проектов отключите).
2. Сделайте проект **Образование ОН** активным. Включите видимость слоев с пунктами (ГГС).
3. С помощью команды **Установки/Свойства набора проекта** установите масштаб генерализации 1:5000.
4. Выберите команду **Чертёж/Схема геодезических построений**.
5. В открывшемся окне **Открыть объект «Шаблон чертежа»** выберите шаблон **Схема геод. построений_ЗУ.**
6. В окне параметров в строке **Формат листа** выберите формат листа *А4 297х210*.
7. Ориентацию листа оставьте – *Альбомная*.
8. Масштаб чертежа установите 1:5000.
9. Переместите шаблон используя команду **Переместить шаблоны** на локальной панели инструментов. Предусмотрите место для втавки условных обозначений.
10. Примените построение .
11. Вернитесь в окно **План**, закрыв чертёжную модель с сохранением данных.

Упражнение 7. Формирование разделов графической части МП. Создание схемы расположения объекта



1. В открытом наборе проектов **кадастровые работы** включите видимость проектов **Съемка** и **Образование ОН** (видимость остальных проектов отключите). В проекте **съемка** отключите видимость слоя плановое обоснование.
2. Во вкладке **Порядок** отрисовки проектов проект Образование Он переместите на последнее место.
3. Выберите команду **Показать всё**.
4. С помощью команды **Установки/Свойства набора проекта** установите масштаб генерализации 1:1000.
5. Сделайте проект **Образование ОН** активным.
6. Выберите команду **Чертёж/Схема расположения объекта**.
7. В открывшемся окне **Открыть объект «Шаблон чертежа»** выберите шаблон **МП Схема расположения ЗУ**.
8. В окне параметров в строке **Формат листа** выберите формат листа *А4 297х210*.
9. Ориентацию листа оставьте – *Альбомная*.
10. Масштаб чертежа установите 1:1000.
11. Переместите шаблон так, чтобы кадастровые объекты размещались в центре, используя команду **Переместить шаблоны** на локальной панели инструментов (рис. 1.36).

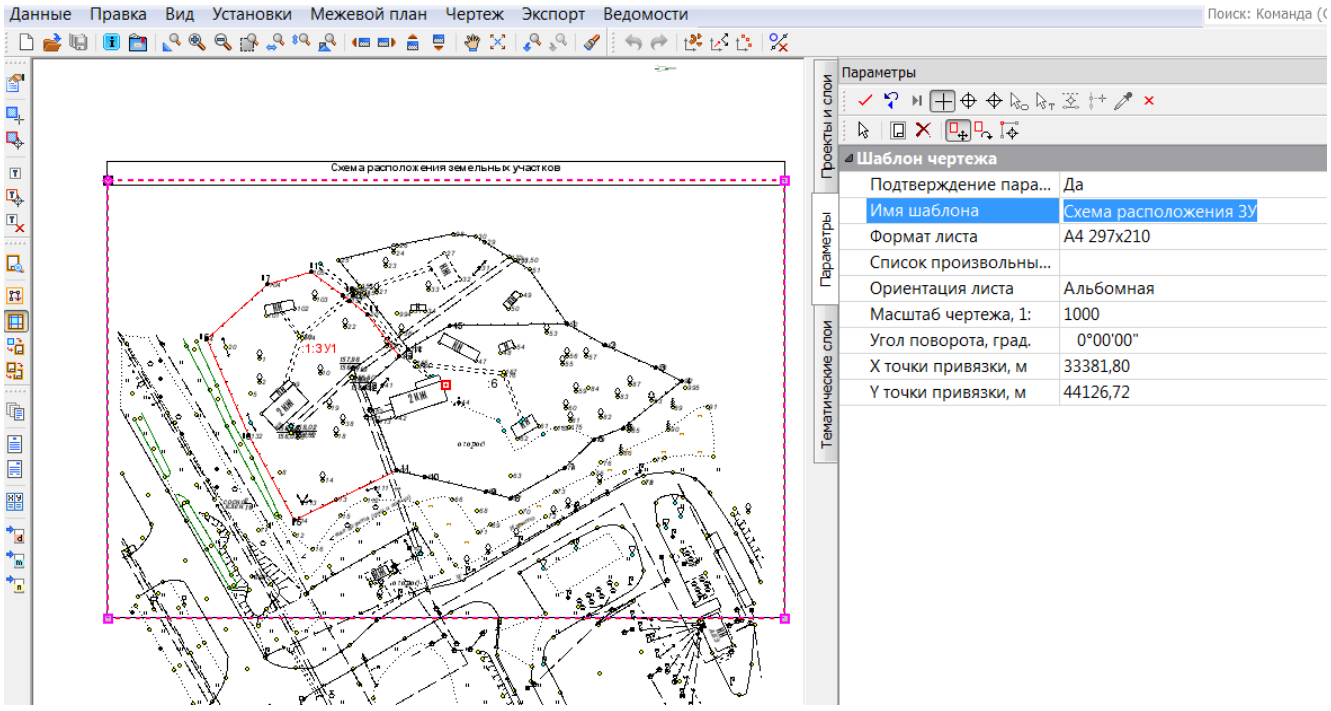


Рис. 1.36

12. Примените построение .
11. Вернитесь в окно **План**, закрыв чертёжную модель с сохранением данных.

3.5. Работа в Чертёжной модели

В наборе проектов (НП) чертежей создается определенная структура фиксированных узлов (рис. 1.37), в которых автоматически размещаются все создаваемые чертежи и схемы в виде самостоятельных проектов типа **Чертеж**.

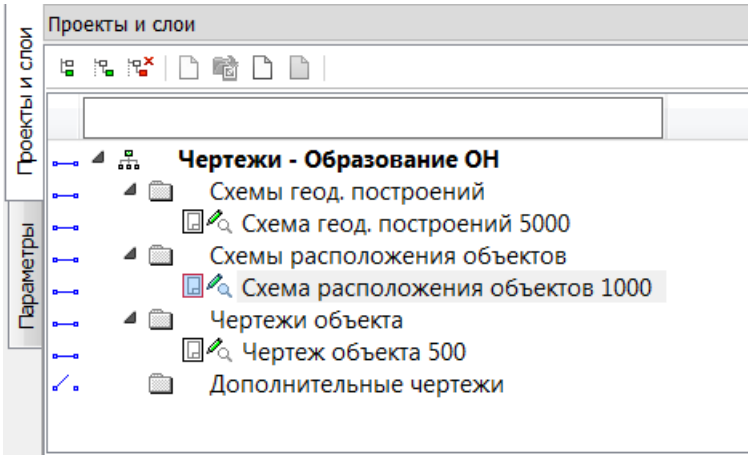


Рис. 1.37

Следует помнить, что НП чертежной модели сохраняется за кадастровыми проектами (**Межевой план**, **Карта (План)**, **Технический план здания** и т.д.), а не за НП плана.

В чертежной модели больше возможностей для редактирования отдельных элементов, чем в модели плана. Например, можно стирать участки графических масок под символами, текстами, размерами (**Построения/Редактировать маску/Стереть под текстом или символом**). Также можно редактировать значения размеров (в свойствах размера поле **Текст значения**).

Переместить проекты в требуемые координаты можно при помощи команды **Правка/Преобразование координат Проекта/Интерактивно**.

Для перемещения, копирования, поворота, масштабирования одного или нескольких элементов служит команда **Правка/Преобразование элементов**.

Кроме индивидуальных команд редактирования каждого типа элементов, предусмотрена универсальная команда для любых элементов **Редактирование элементов**  (меню **Правка**).

Сохранение проектов чертежей происходит по тому же сценарию, что и сохранение проектов плана. При сохранении набора проектов, кроме проектов чертежей, будут сохраняться и несохраненные проекты плана.

При последующем открытии набора проектов для просмотра и доработки созданных ранее чертежей (схем) необходимо сделать активным тот тип проекта, за которым они хранятся, и выбрать команду **Просмотреть чертежи** в меню **Чертеж**.

В случае если проект чертежа закрыт, то в открывшемся окне **Чертежи** на панели **Проекты и слои** следует выделить название нужного чертежа (схемы) и в контекстном меню выбрать команду **Открыть Проект для записи**.

Упражнение 8. Оформление, редактирование Чертежа в Чертёжной модели

1. Откройте набор проектов **кадастровые работы Данные/Открыть набор проектов**.
2. Выберите команду **Чертёж/Просмотреть чертежи**.
3. Сделайте активным проект чертежа – **Чертёж объекта 1000** на вкладке **Проекты и слои** (двойным щелчком мыши по названию проекта).
4. Активизируйте команду **Ведомости/ Условные обозначения**.
5. На вкладке **Параметры** в строке **Выбор проектов и слоев** кнопкой  вызовите окно выбора слоев проекта. Выберите проект **Образование ОН** и отметьте флажком слой с образуемым земельным участком этого проекта (рис. 1.40). Нажмите **ОК**.

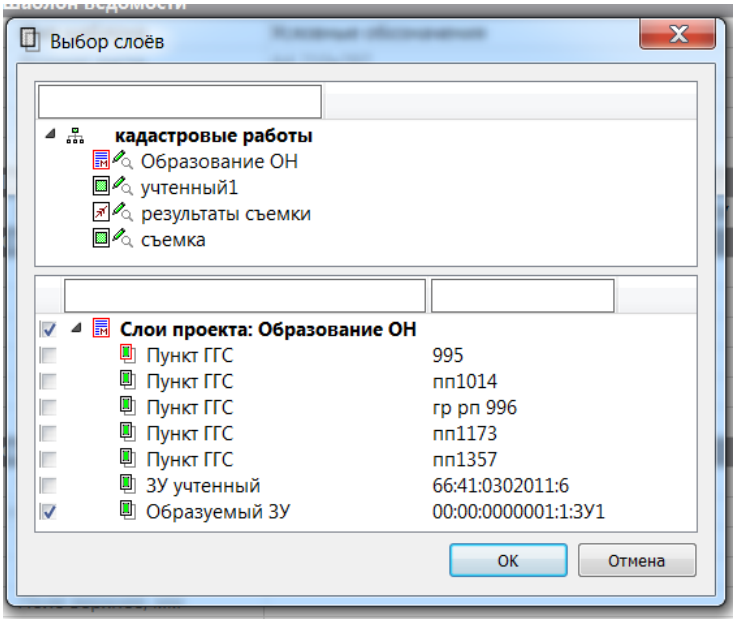


Рис. 1.40

6. На панели инструментов вкладки **Параметры** нажмите кнопку **Создать ведомость**.
7. После этого в графическом окне проекта чертежной модели в поле курсора появятся условные обозначения для образуемого ЗУ в виде многострочного текста. Выберите место расположения условных обозначений и кликните левой кнопкой мыши.
8. После этого откроется диалог **Форматирование текста**. С помощью команд окна форматирования текста можно отредактировать данные. Например, измените ширину столбцов таблицы соответствующей командой меню **Таблица** окна **Форматирование текста** (чтобы команда стала активной кликните по таблице). Используйте направляющие для перемещения и поворота текста. Примените построение.
9. При необходимости на чертеже можно разместить **Землеустроительную таблицу**. Для этого вызовите команду **Ведомости/Землеустроительная таблица**. В строке выбора объектов нажмите кнопку … и в окне выбора установите флажок только для образуемого земельного участка проекта Образуемый ЗУ. Нажмите ОК.
10. Командой Построения/Текст/редактироват текст переместите подписьь масштаба, тек чтобы она была расположена под чертежом. (рис.1.41)

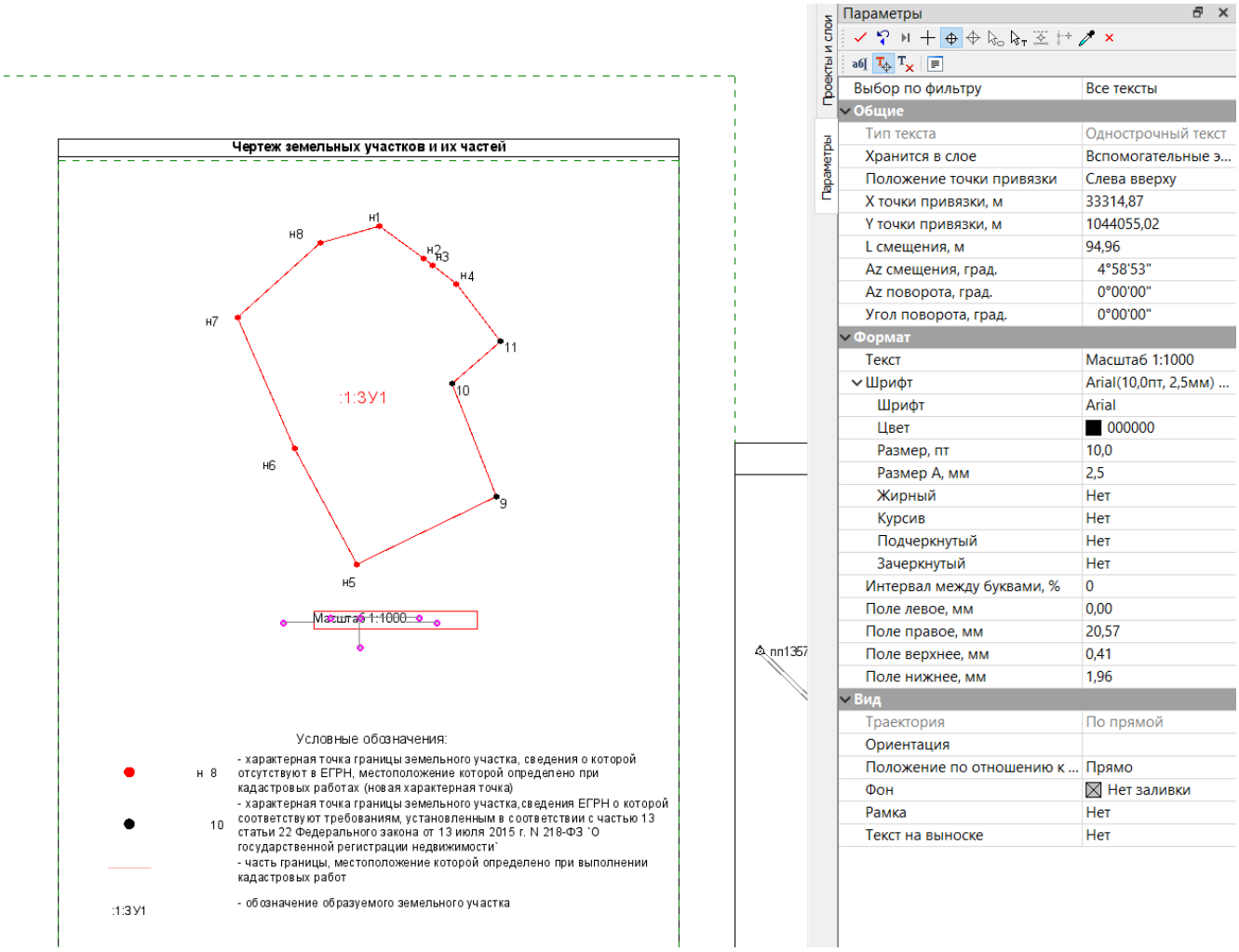
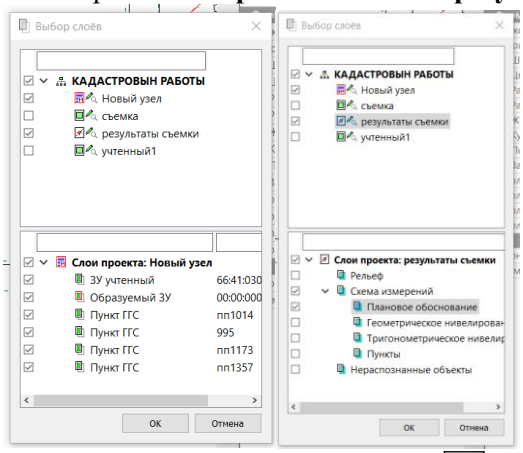


Рис.1.41

Упражнение 9. Оформление, редактирование Схемы геодезических построений в Чертёжной модели

1. Если вы закрыли набор проектов **кадастровые работы**, откройте его снова. **Данные/Открыть набор проектов**.
2. Выберите команду **Чертёж/Просмотреть чертежи**.
3. Сделайте активным проект чертежа **– Схема геод. построений 5000** на вкладке **Проекты и слои** (двойным щелчком мыши по названию проекта).
4. Активизируйте команду **Ведомости/ Условные обозначения**.
5. На вкладке **Параметры** в строке **Выбор проектов и слоев** кнопкой … вызовите окно выбора слоев проекта. Отметьте флажками слои проектов **Образование ОН** и **результаты съемки**. Нажмите **ОК**.



6. На панели инструментов вкладки **Параметры** нажмите кнопку **Создать ведомость**.

7. После этого в графическом окне проекта чертежной модели в поле курсора появятся условные обозначения для образуемого ЗУ и схемы геодезических построений в виде многострочного текста. Выберите место расположения условных обозначений и кликните левой кнопкой мыши.
8. При этом откроется диалог **Форматирование текста**. С помощью команд окна форматирования текста можно отредактировать данные. Например, измените ширину столбцов таблицы соответствующей командой меню **Таблица** окна **Форматирование текста**. Используйте направляющие текста для перемещения и поворота. Примените построение.
9. Отредактируйте подпись масштаба.
10. Выполните сохранение изменений.

Упражнение 10. Оформление, редактирование Схемы расположения объекта в Чертёжной модели

1. Если вы закрыли набор проектов **кадастровые работы**, откройте его снова. **Данные/Открыть набор проектов**.
2. Выберите команду **Чертёж/Просмотреть чертежи**.
3. Сделайте активным проект чертежа – **Схема расположения объектов 1000** на вкладке **Проекты и слои** (двойным щелчком мыши по названию проекта).
4. Активизируйте команду **Ведомости/ Условные обозначения**.
5. На вкладке **Параметры** в строке **Выбор проектов и слоев** кнопкой  вызовите окно выбора слоев проекта. Отметьте флажком слой с образуемым земельным участком проекта **Образуемый ЗУ**. Нажмите **ОК**.
6. На панели инструментов вкладки **Параметры** нажмите кнопку  **Создать ведомость**.
7. После этого в графическом окне проекта чертежной модели в поле курсора появятся условные обозначения для образуемого ЗУ и схемы геодезических построений в виде многострочного текста. Выберите место расположения условных обозначений и кликните левой кнопкой мыши.
8. При этом откроется диалог **Форматирование текста**. С помощью команд окна форматирования текста можно отредактировать данные. Например, измените ширину столбцов таблицы соответствующей командой меню **Таблица** окна **Форматирование текста**. Используйте направляющие текста для перемещения и поворота. Примените построение.
9. Выполните сохранение изменений.

3.6. Формирование отчётных текстовых документов

В системе CREDO КАДАСТР можно создавать ведомости типа **отчет** и **заявление**.

Формирование отчетов, заявлений предусмотрено для следующих типов проектов: **Межевой план**, **Карта (План)**, **Технический план здания**, **Технический план помещения**, **Технический план сооружения**, **Технический план объекта незавершенного строительства**.

Для формирования заявления, отчета предназначены специальные команды. Команда **Заявление**-расположена в меню **Экспорт**. Формирование отчета межевого и технических планов осуществляется с помощью команды **Экспорт/Отчет**.

Для формирования каталога координат кадастровых объектов предназначена команда **Ведомости/Каталог координат**. В каталоге отображается следующая информация: порядковый номер точки, ее обозначение, координаты X и Y, дирекционный угол направления, расстояние между точками.

> 🕮 *Кроме команд подготовки **Отчета** и **Заявления**, в меню **Экспорт** присутствуют команды создания следующих документов: **Декларация** (в проектах типа Технический план), а также **Измерения и расчеты** и **Акт согласования** (в проектах типа Межевой план).*

Выходные ведомости для отчета (разделы текстовой части) формируются из **Разделов**, которые, в свою очередь, формируются из **Реквизитов**. В связи с тем, что некоторые разделы содержат информацию из нескольких реквизитов и данные формируются из различных источников на основании заданного стиля и способа образования объекта, программой предусмотрено формирование ведомостей из нескольких шаблонов. Таким образом, ведомость может формироваться из двух или более шаблонов.

Чтобы обеспечить все многообразие требований кадастрового инженера к формированию ведомостей, в специальных приложениях системы **Редактор шаблонов** и **Редактор отчетов** разработано множество шаблонов, на основе которых составляются отчеты и заявления.

Для создания и редактирования шаблонов ведомостей используется **Редактор шаблонов** (команда **Установки/Редактор Шаблонов отчетов**) – дополнительное приложение к системам CREDO III. Редактор шаблонов предоставляет пользователю возможность оформлять разделы текстовой части межевого плана в соответствии с приказами. Редактор шаблонов содержит большой список подготовленных шаблонов ведомостей (папка **Землеустройство и кадастр**), который при необходимости можно дополнить.

Упражнение 11. Формирование Межевого плана в бумажном виде

1. Откройте набор проектов **кадастровые работы/Открыть набор проектов**.

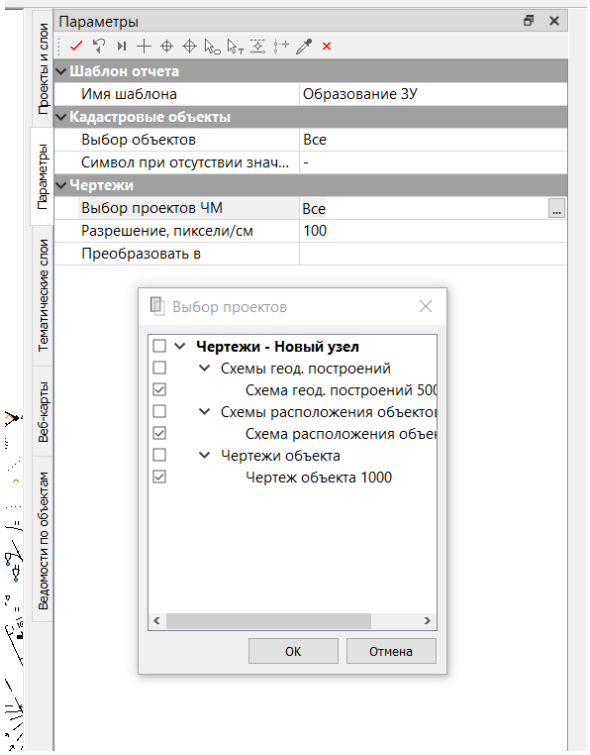


Рис. 1.42

2. Сделайте активным проект **Образуемый ЗУ**.
3. Выберите команду **Экспорт/Отчет**.
4. В окне параметров отобразятся параметры создаваемого отчета (рис.1.42). В строке **Имя шаблона** указано имя создаваемого отчета.
5. В группе **Кадастровые объекты** в строке **Выбор объектов** выберите значение **Все**. (Если выбрать **Все**, то при подготовке отчёта будут использоваться данные по выбранным объектам).
6. В строке **Символ при отсутствии значения** не вносите изменений
7. В строке **Выбор проектов ЧМ** нажмите кнопку [...] и выберите созданные чертежи и схемы (рис. 1.42).

> 🕮 *Выбранные параметры команд создания отчетных документов (бумажного отчета и пакета XML – документов) сохраняются между сеансами работы. Например, параметры экспорта бумажного отчета автоматически загрузятся при экспорте пакета XML – документов.*

8. Нажмите кнопку **Применить построение** [✓] после установки всех параметров. После чего откроется Microsoft Word со сформированным МП, при необходимости его можно отредактировать.
9. Выполните сохранение данных.

3.7. Формирование отчётных документов в электронном виде

Электронные документы в виде файлов формата XML, предоставляемые в орган кадастрового учета (Росреестр) в форме электронного документа, формируются в соответствии с актуальными схемами XML-документов на сайте Росреестра на основе:

XML-схемы (версия 03, версия 04) – для формирования XML-документа – межевого плана земельного участка;

XML-схема (версия 15, версия 17) – для формирования XML-документа – заявления.

XML-схема (версия 02) – для формирования XML-документа – Карта (План) – зоны, Карта (План) – границы.

XML-схема (версия 02) – для формирования XML-документа – технических планов зданий, помещений, сооружений, объектов незавершённого строительства.

Формирование электронных документов, предоставляемых в орган кадастрового учета в виде файлов в формате XML (**Межевого плана земельного участка** и **Заявления**), выполняется с помощью команды **Пакет XML-документов** меню **Экспорт**, причем при их создании используются те же данные, что и при формировании «бумажных» документов. При этом надо учитывать, что состав данных, необходимых для «бумажного» и электронного вариантов документов, несколько отличается. В результате, данных, введенных для формирования одного типа документов, может оказаться недостаточно для формирования документов другого типа.

В версии 1.20 программы реализована возможность электронного документооборота через приложение **"Мониторинг кадастровых запросов CREDO"**.

Мониторинг кадастровых запросов CREDO - это приложение, которое обеспечивает электронное взаимодействие между кадастровыми инженерами и органами кадастрового учета, минуя Портал Росреестра. Функциональность данного приложения позволяет:

- подписать все файлы пакетов документов, сформированных в системах CREDO КАДАСТР и CREDO МЕЖЕВОЙ ПЛАН;
- создать zip-архив, необходимый для отправки в органы кадастрового учёта, который содержит XML-файлы межевого или технического плана и заявление, а также образы приложенных документов;
- создавать и отправлять в органы кадастрового учета соответствующие типы заявок (запросов), необходимых для кадастрового учета или получения сведений из ГКН и ГРП;
- получать актуальные статусы отправленных заявок (запросов) и ответные документы (паспорта, выписки и т.п.).

Тема 4. Технология работы с многоконтурными образуемыми ЗУ. Уточнение ЗУ

4.1.Создание многоконтурного объекта и формирование Межевого плана.

Упражнение 1. Подготовка и формирование отчётной документации по многоконтурному объекту.

1. Запустите систему CREDO КАДАСТР.
2. Создайте **Новый набор проектов**. Выберите команду **Данные/Создать набор проектов.**
3. Выберите **Тип проекта** – **Ситуационный план.**
4. Укажите **Вариант создания нового проекта – Создать проект импортом внешних данных.** Выберете тип данных **Импорт файлов MIF/MID**. В папке **ДанныеДляРаботы** примените **Выбор папки, ОК**.
5. В окне **Параметры импорта файлов MIF/MID** выберете команду **Импорт.** В результате в графической части появится изображение участков (рис. 1.44)

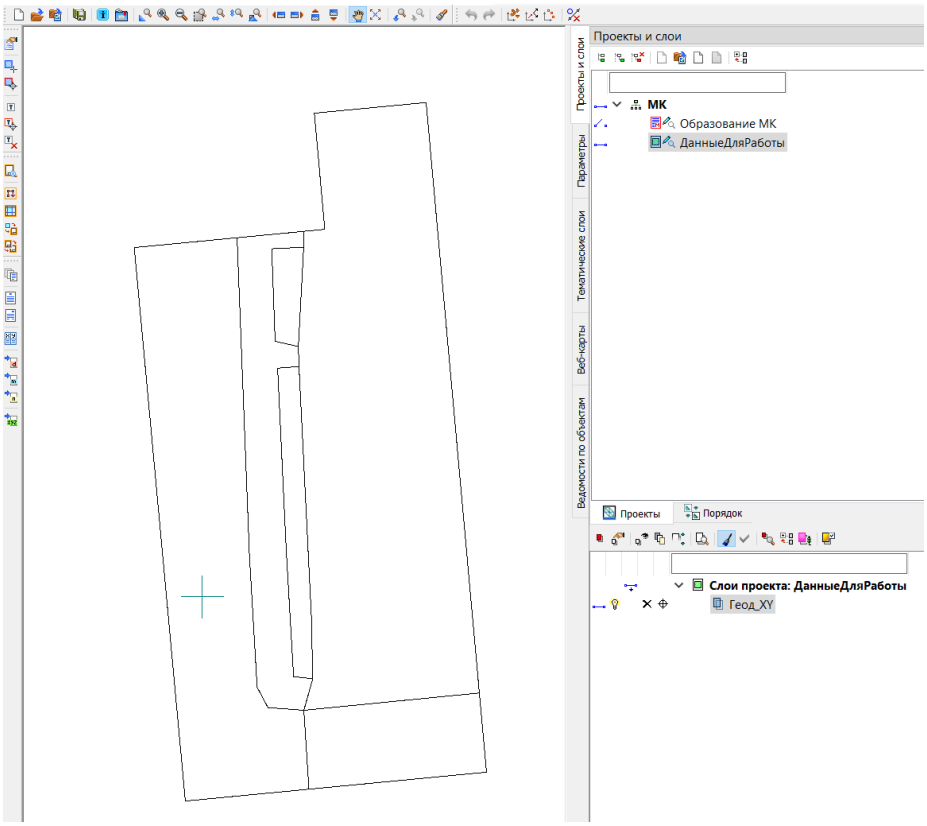


Рис. 1.44

6. Выполните команду **Показать всё**.
7. Переименуйте набор проектов в **МК** и сохраните данные.
8. Создайте новый проект типа **Межевой план.** Выберите на локальной панели инструментов окна **Проекты** команду **Создать узел на одном уровне**  .
9. Выделите курсором запись *Новый узел* и нажмите кнопку **Создать проект**  .
10. В открывшемся окне диалога **Новый Проект** выберите **Тип проекта – Межевой план.** Введите название проекта **Образование МК**
11. Укажите **Вариант создания нового проекта – Создать пустой проект.** Нажмите ОК. В видах кадастровых работ выберете **Раздел ЗУ.**
12. Сделайте активным проект типа Межевой план **Образование МК.**

13. Выберите команду **Установки/Свойства набора проектов/Карточка набора проектов/Масштаб и система координат.** Установите для удобства работы **масштаб 1:2000.** Нажмите **Применить. ОК.**
14. Затем зайдите в меню **Межевой план/Свойства проекта**. В разделе **Параметры документа** по умолчанию будет установлено**: Отображать свойства** – Все; **Версия отчета –** *последняя* и т.д.
15. В разделе **Погрешность площади** установите**:**
    - **Нормативный коэффициент** – 2,5.
    - **СКП точек** – Максимальная.
16. В реквизите документа **Титульный лист** Отредактируйте Виды работ как показано на рисунке 1.45.

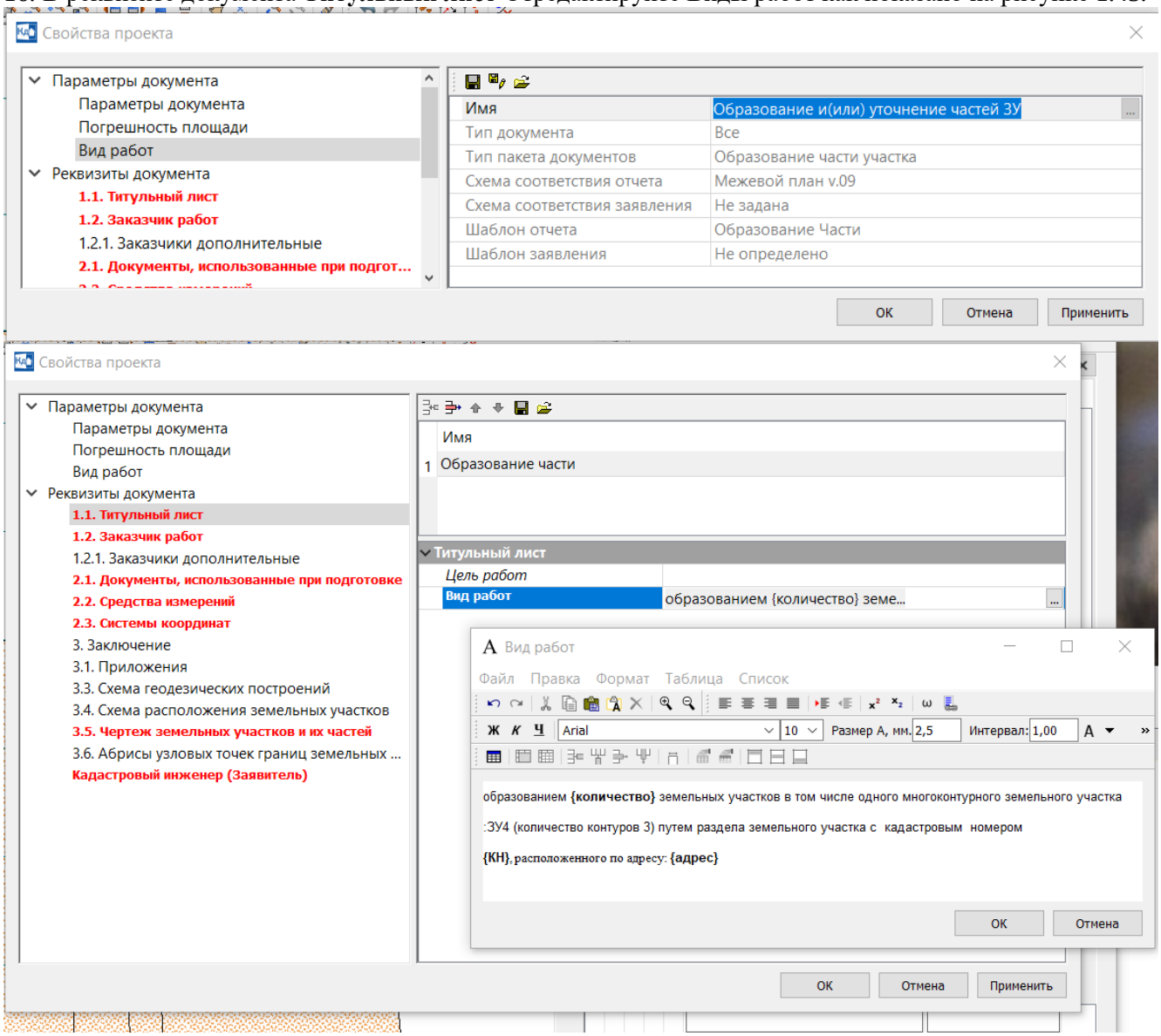


Рис. 1.45

17. В реквизите Заказчик кадастровых работ выберите **Дата** - 2022.03.02, **Вид** – Юридическое лицо - Публичное акционерное общество «Нефтяная компания РОСНЕФТЬ» (ИНН- 7706107510, Код ОГРН – 7706107510), **Представитель ФИО** – Шатилов Евгений Владимирович, должность - Начальник управления землеустройства и маркшейдерских работ ООО "РН-Юганскнефтегаз" по доверенности от ОАО "НК Роснефть" №108 от 14.01.2015 г .
18. В реквизите Кадастровый инженер используйте сохранённую информацию в **Вариантах заполнения** при подготовке предыдущего Межевого плана и используемую по умолчанию (см. рис. 1,46).

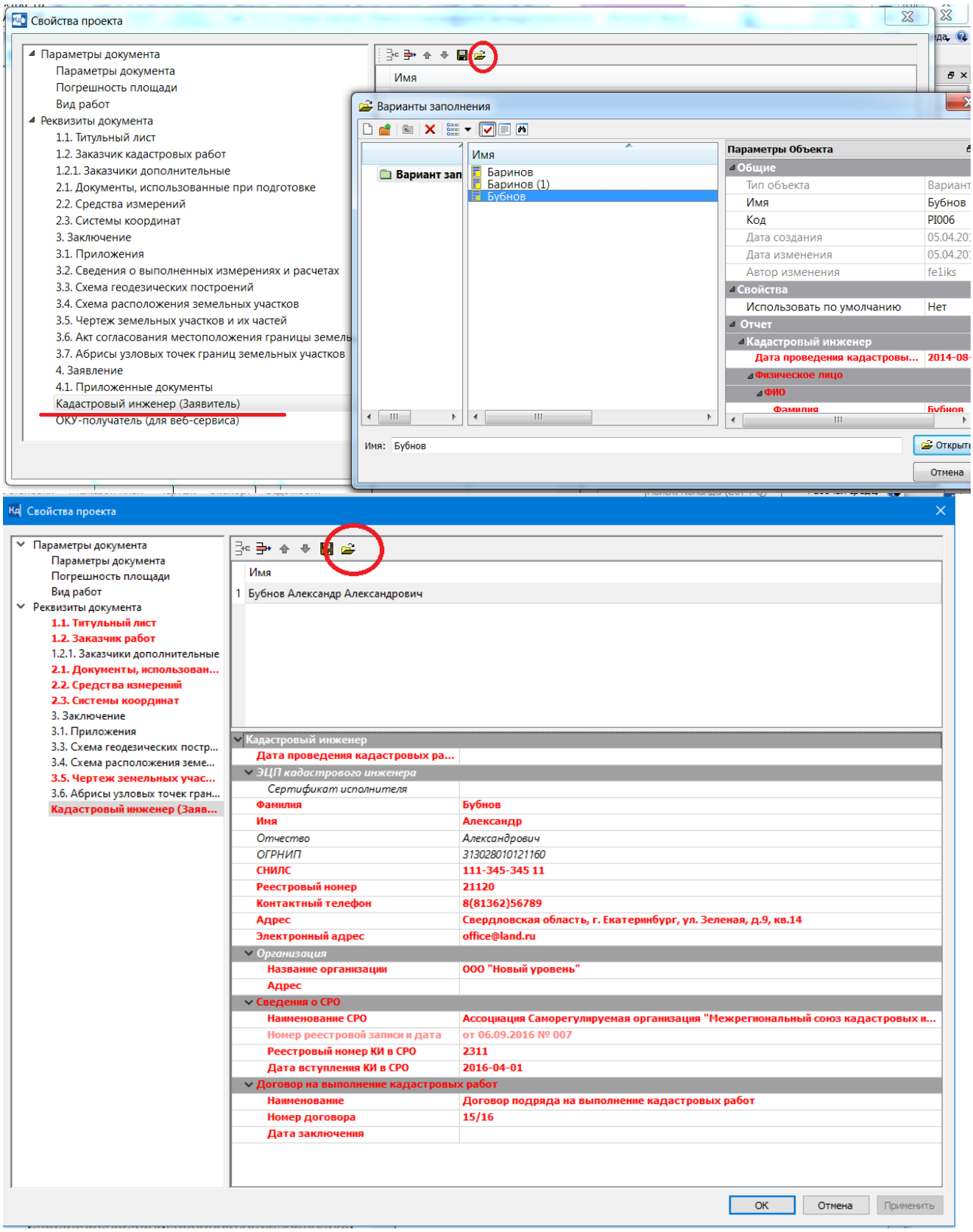


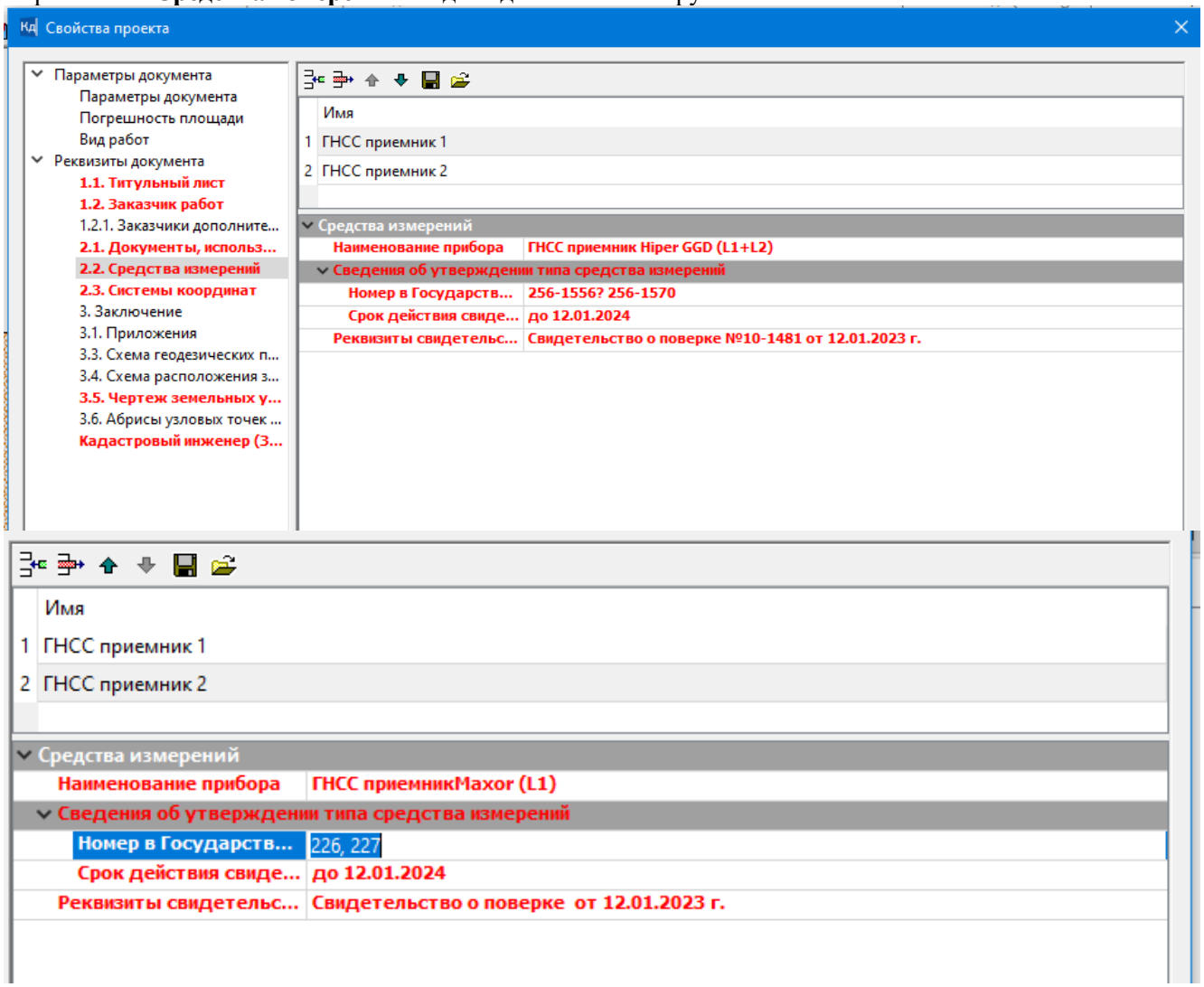
Рис. 1.46 Кадастровая выписка

19. В реквизите **Документы, использованные при подготовке** - введите информацию:

- Кадастровая выписка о земельном участке с кадастровым номером 86:02:0808002:146 №8602/201/09-5392 от 02.12.2022 г.
- Договор аренды земель несельскохозяйственного назначения №41 от 12.02.2009 г
-Распоряжение Администрации Ханты-Мансийского района «О предоставлении земельных участков в аренду» №61-р от 12.02.2009 г.

- Копия приложения к Приказу Департамента имущественных отношений и природопользования «Схема расположения земельных участков №2,3 правобережной части Приобского месторождения в кадастровом квартале 86:02:0808002» №226-п от12.04.2014 г.
- Согласие на раздел исходного земельного участка с кадастровым номером 86:02:0808002:142.

20. В реквизите **Средства измерения** введите данные по инструментам:



21. В реквизите **Системы координат** введите – *мск 86.*
22. Примените внесенные изменения нажав кнопку **ОК**.
23. Выполните команду **Показать всё**. Удалите все слои с ЧЗУ.
24. Создайте Исходный земельный участок. Для этого сделайте активным проект **Образование МК.**
25. Выберите команду **Межевой план/Создать объект**. В организаторе объектов выберете слой **Исходный ЗУ,** нажмите **ОК**. Создайте геометрию участка, как показано на рис. 1.47 и заполните характеристики.

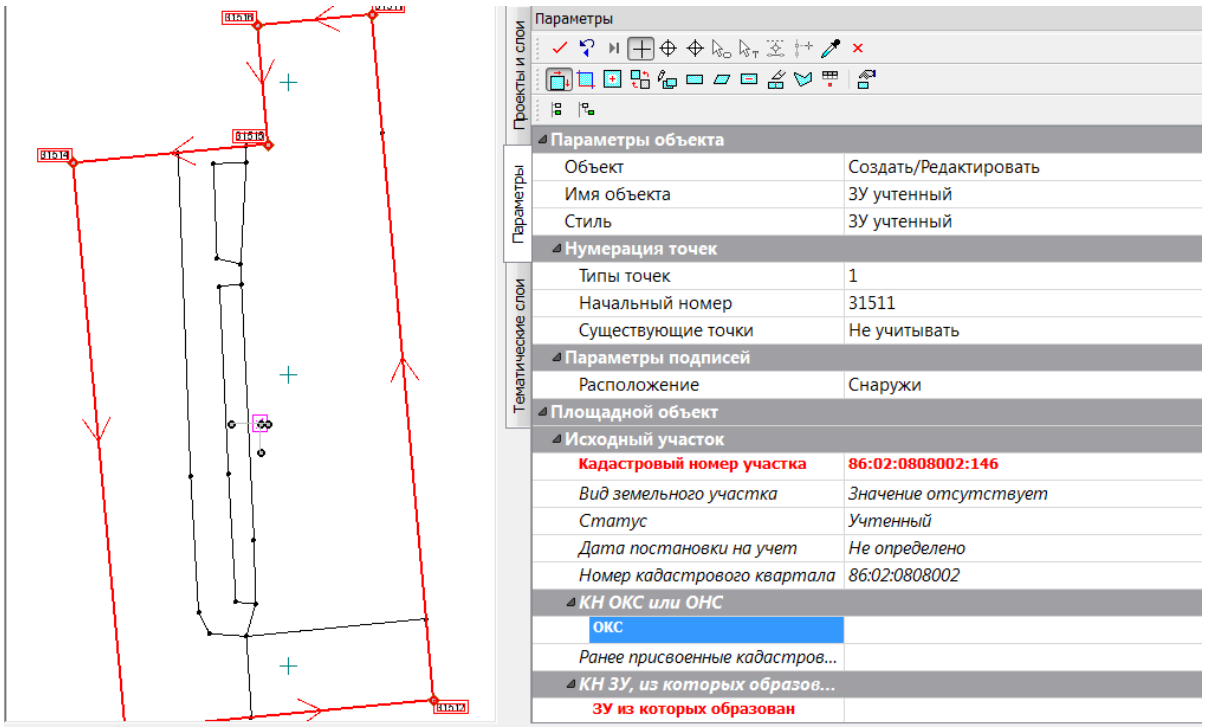
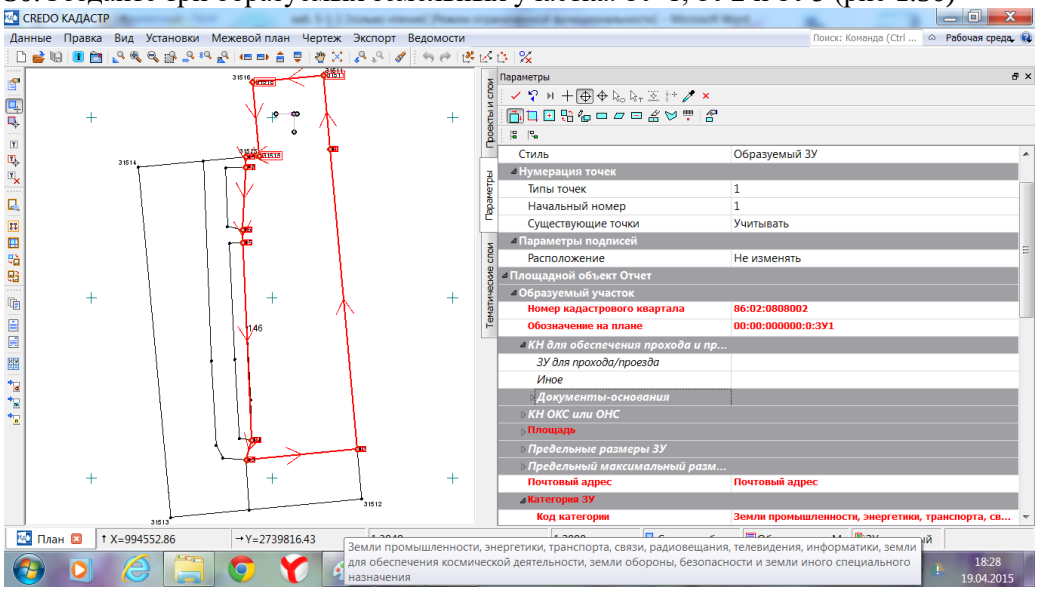


Рис. 1.47

26. Почтовый адрес :**Ханты-Мансийский Автономный округ – Югра, р-н. Ханты-Мансийский, Приобское месторождение (правый берег)**, выберете в базе адресов нужные данные.
27. Категория земель – **земли промышленности**, Разрешенное использование – **для размещения иных объектов трубопроводного транспорта**
28. **Метод определения координат** – спутниковый метод с погрешностью 0,5 м. Примените построение.
29. Используя организатор слоев удалите все слои, **с ЧЗУ.**
30. Создайте три образуемых земельных участка. ЗУ 1, ЗУ2 и ЗУ3 (рис 1.50)



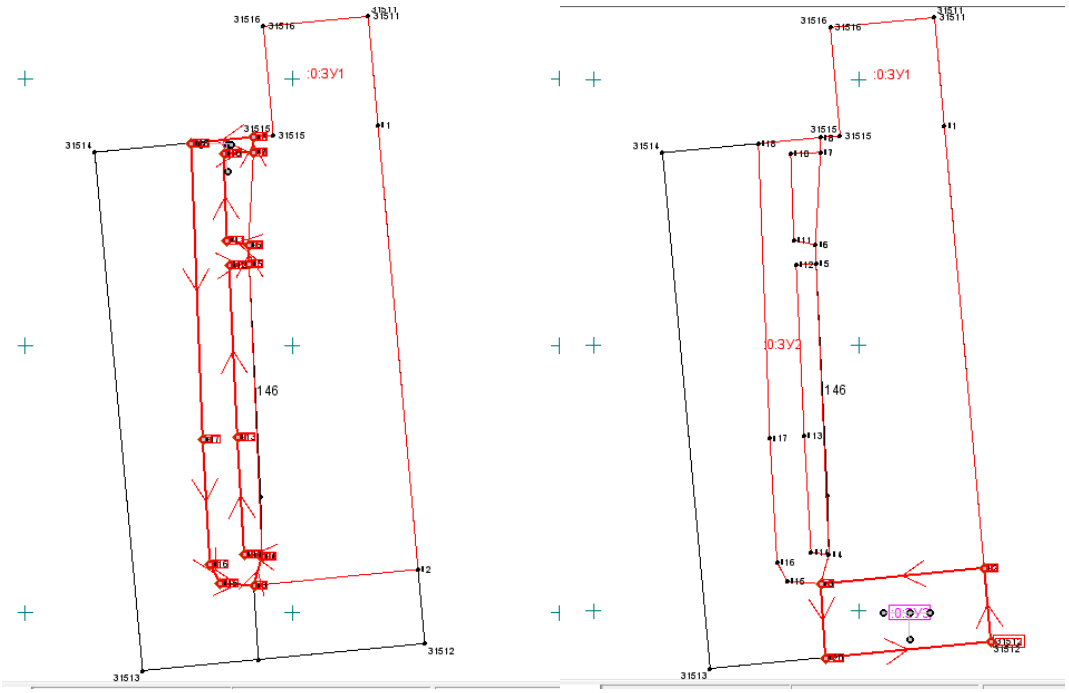


Рис.1.50

При создании образуемых участков номера точек начинайте для участка ЗУ1 с 1, Зу2 с 10 а ЗУ3 с 20 с использованием существующих. Обозначение на плане введите 86:02:0808002:146:ЗУ1 и. т.д., категория земель – Земли промышленности…, разрешенное использование – для размещения объектов промышленности. Метод определения координат – спутниковые геодезические измерения с погрешность 0,5 м Вычисление СКП осуществлено с использованием программного обеспечения, посредством которого велась обработка полевых материалов.

31. Создайте **Общий Многоконтурный** объект, который будет объединять три контура. Выберите команду **Межевой план/Создать объект.**
32. В открывшемся диалоге **Организатор объектов** создайте слой **Новый участок** на одном уровне с созданными. Выберете этот слой. Нажмите **ОК.**
33. В открывшемся диалоге **Открыть объект «Стиль»** выберите папку **Стиль**, стиль –***Образуемый МЗУ***.
34. Затем в окне **Параметров в**ведите данные по следующим параметрам:
    - **Номер кадастрового квартала** = *86:02:0808002*;
    - **Обозначение на плане** = *86:02:0808002:146:*:ЗУ4;
    - Почтовый адрес **:*Ханты-Мансийский Автономный округ – Югра, р-н. Ханты-Мансийский, Приобское месторождение (правый берег),* выберете в базе адресов нужные данные.**
    - Категория земель **– земли промышленности,**
    - В разделе **Использование ЗУ** в строке **Вид разрешенного использования по справочнику** выберите из выпадающего списка значение ***Для размещения иных объектов трубопроводного транспорта***. В данной строке работает фильтр выбора- при вводе сочетаний букв, например «Для …», программа будет предлагать имеющиеся в списке значения с таким сочетанием. Вид использования по документу : ***Под обустройство участков №2 и №3 правобережной части Приобского месторождения.***
35. Выберите в разделе **Сведения об ограничениях (обременениях) вещных прав** строку **Сведения об обременениях** и нажмите кнопку  .
36. В открывшемся окне **Сведения об обременениях** нажмите кнопку **Добавить**  .
    - В строке **Код обременения**, выберите из выпадающего списка значение *Иные ограничения (обременения) прав*, нажмите **Применить, ОК**.
37. Далее создадим контура многоконтурного земельного участка. Для этого при создании кадастрового объекта выберете команду Создать на уровень ниже (рис. 1.51).

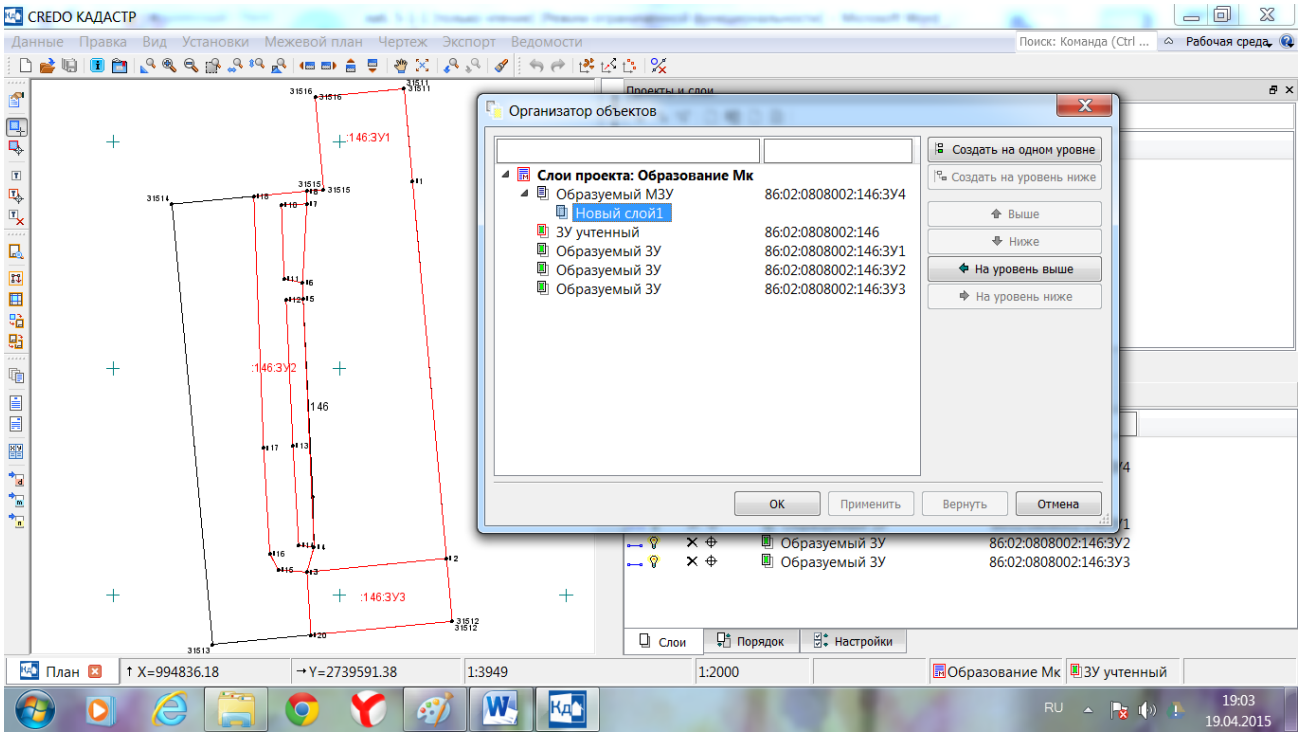
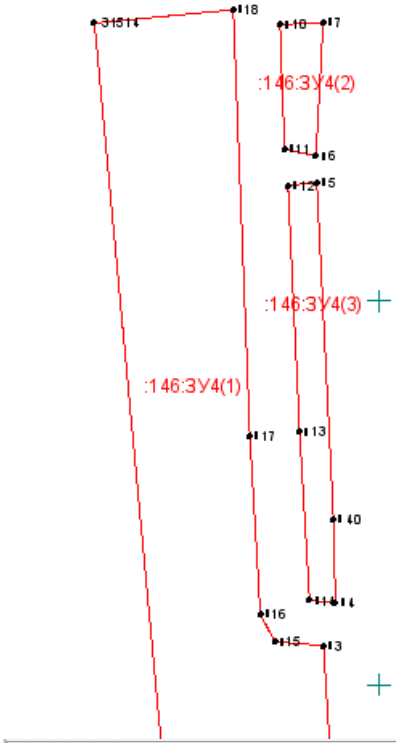


Рис. 1.51

38. В окне **Открыть объект «Стиль»** укажите стиль **Контур образуемый**. Нажмите кнопку **Открыть**.



При работе с многоконтурными земельными участками имеется возможность создавать множество однотипных контуров (с одинаковой геометрией и площадью). Для этого при создании кадастровых объектов методом По контуру на панели инструментов окна Параметры будет доступна дополнительная панель Преобразование элементов со следующими элементами: переместить, повернуть, симметрично переместить, масштабировать и т.д. Подобная команда облегчит работу при создании столбов ЛЭП, ТП и т.д. на земельных участках.

39. В разделе обозначение на плане введите в строке **Обозначение** значение **(1).**

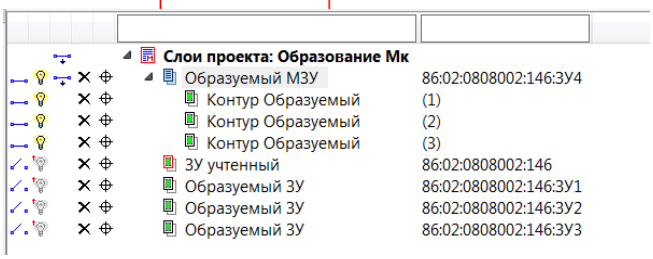
40. В поле **Начальный номер** раздела **Нумерация точек** задается порядковый номер начальной точки. Существующие точки учитывать.

41. Обратите внимание на выбор соответствующих участков для прохода и проезда к создаваемым участкам.

42. Примените построение ✓, но при этом не закрывайте меню команд создания кадастрового объекта.

43. Создайте аналогичным образом самостоятельно два оставшихся контура.

44. Примените построение ✓ и закройте команду (кнопка ✕ красного цвета или перевести курсор в графическое окно и щёлкнуть правой клавишей мыши).

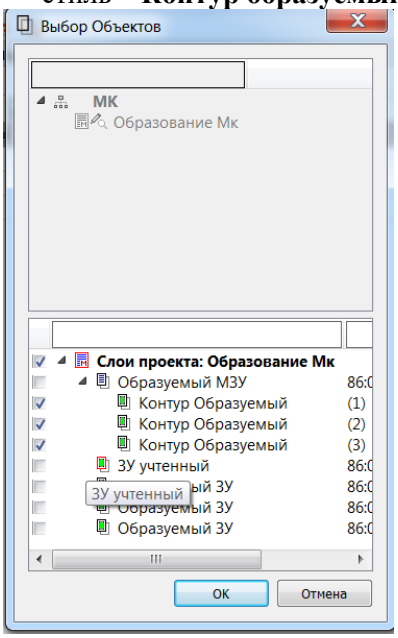


45. Удалите проект «Исходные данные», созданный импортом MIF/MID файлов.

46. Выполните групповое редактирование общих параметров объектов. Выберите команду **Межевой план/Редактировать объект.**

47. В окне открывшемся окне **Параметров** выберите строку **Имена** и нажмите кнопку ...

48. В открывшемся окне **Выбор Объекта** поставьте флажки напротив тех объектов, которые имеют один стиль – **Контур образуемый**. Нажмите **ОК.**



49. Нажмите в окне параметров команду **Параметры объекта** и заполните свойства точки:

- **Метод определения координат** – *Спутниковые геодезические измерения*.
- **Способ закрепления точек** - *Долговременный межевой знак.*
- **Погрешность** – 0,50.
- **Формула расчета СКП** - Вычисление СКП осуществлено с использованием программного обеспечения, посредством которого велась обработка полевых материалов

50. Нажмите команду **Применить построение**.

51. Отредактируйте положение подписей объектов (кадастровые номера, номера точек поворота границы). Выберите команды **Межевой план/Подпись/Редактировать.**

- Выберите нужную подпись курсором в режиме захвата текста;
- Затем нажмите на локальной панели инструментов команду **Переместить/Повернуть подписи**;
- Перейдите в графическое окно и захватив направляющие переместите подпись в нужное место (курсор в режиме захвата точки).

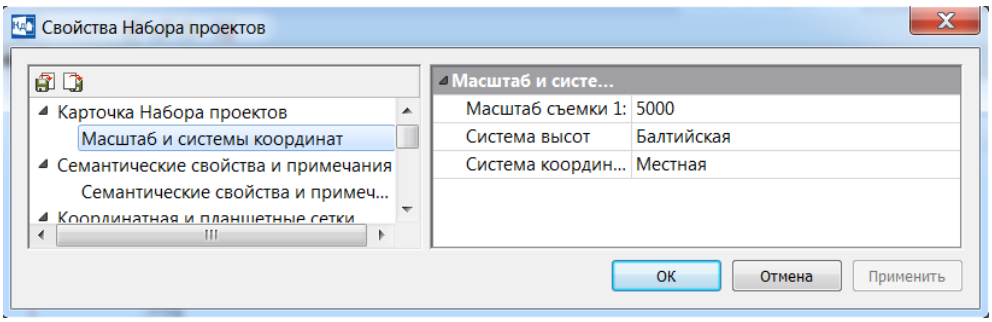
52. Автоматически отредактировать положение подписей точек также можно непосредственно при редактировании кадастровых объектов в разделе **Параметры подписи** в строке **Расположение** варианты **Снаружи/Внутри.**

53. Сохраните изменения. **Данные/Сохранить набор проектов и все проекты.**

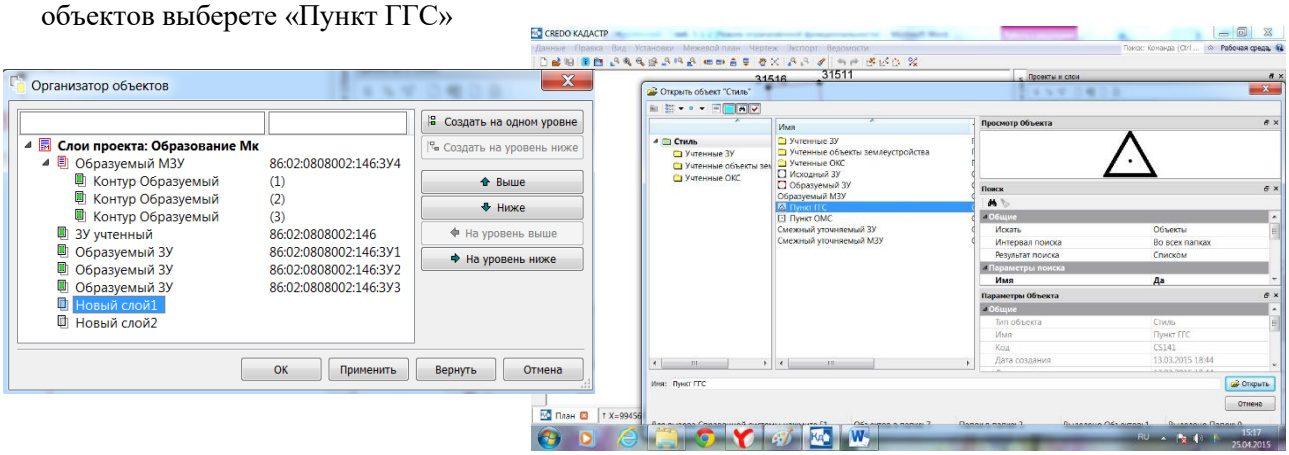
Упражнение 2. Формирование разделов графической части МП.

Формирование схемы геодезических построений

1. Откройте набор проектов **МК**..
2. Включите видимость слоёв проекта Образование МК.
3. Установите масштаб 1:5000 используя команду **Установки/Свойства набора проектов:**



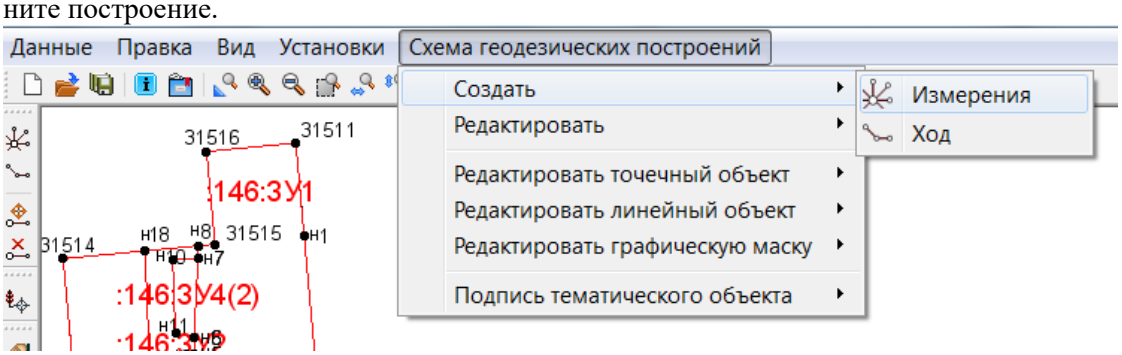
4. Создайте кадастровый объект на одном уровне с образуемыми земельными участками. В стиле объектов выберете «Пункт ГГС»

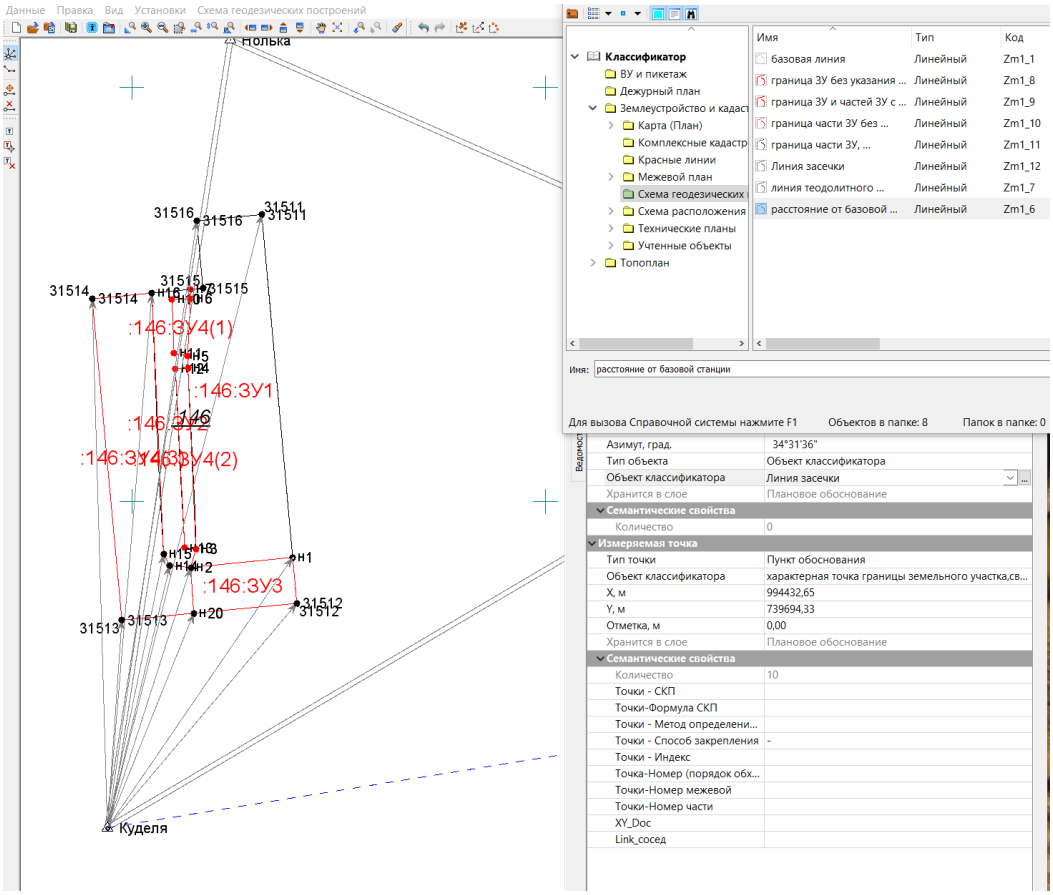


5. Создайте два пункта ГГС со следующими параметрами:

№ п.п	Название пункта	X(м)	Y (м)	Тип пункта	Класс пункта
1	Теляна	994688,38	740459,38	Триангуляция, сигнал (не сохранился)	3 класс
2	Куделя	994106,14	739470,48	Триангуляция, сигнал	3 класс
3	Нолька	995057,51	739619,28	Триангуляция, сигнал	2 класс

6. Для формирования схемы геодезических построений создайте пустой проект **типа «Изыскания»** и сделайте активным слой **«Плановое обоснование».**
7. С помощью команды **Схема геодезических построений/Создать/Ход** создайте геометрию измерений, соединив точки ГГС, в качестве объекта классификатора для линии измерений выберете **базовая линия**.
8. С помощью команды **Схема геодезических построений/Создать/Измерения** создайте геометрию измерений Установите курсор в режим захвата точки (вид курсора ) и выберите Пункт ГГС Куделя. Затем выберите поочерёдно точки (вид курсора ) образуемых ЗУ (Объект классификатора для раздела Линия измерения должен быть – ***Расстояние до базовой линии***), Примените построение.





9. Сделайте активным проект Образование МК. Создайте чертех схемы геодезических построний командой **Чертеж/Схема геодезических построений,** имя шаблона – ***Схема геодезических построений.*** Параметры схемы выберете, как показано на рисунке 1.51, примените построение.

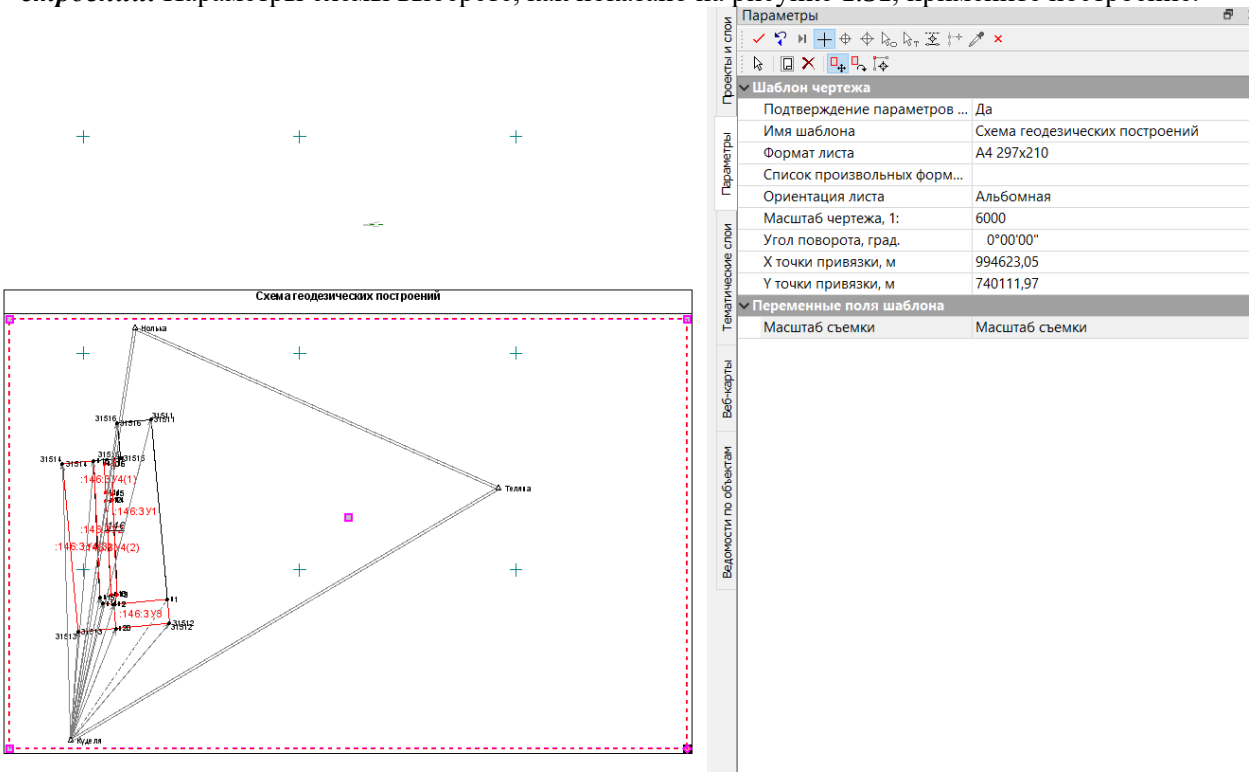


Рис. 1.51

10. После создания Схемы геодезических определений в чертежной модели оформите схему, добавив Условные обозначения и масштаб, как было описано выше. Для обозначения расстояния до базовой станции необходимо настроить стиль размера для этого в Чертежной модели выберете пункт

меню **Установки/Активный проект/Свойства проекта/Стили размеров** Для стиля План 1 установите параметры как на рисунке 1.52. Нажмите **ОК**.

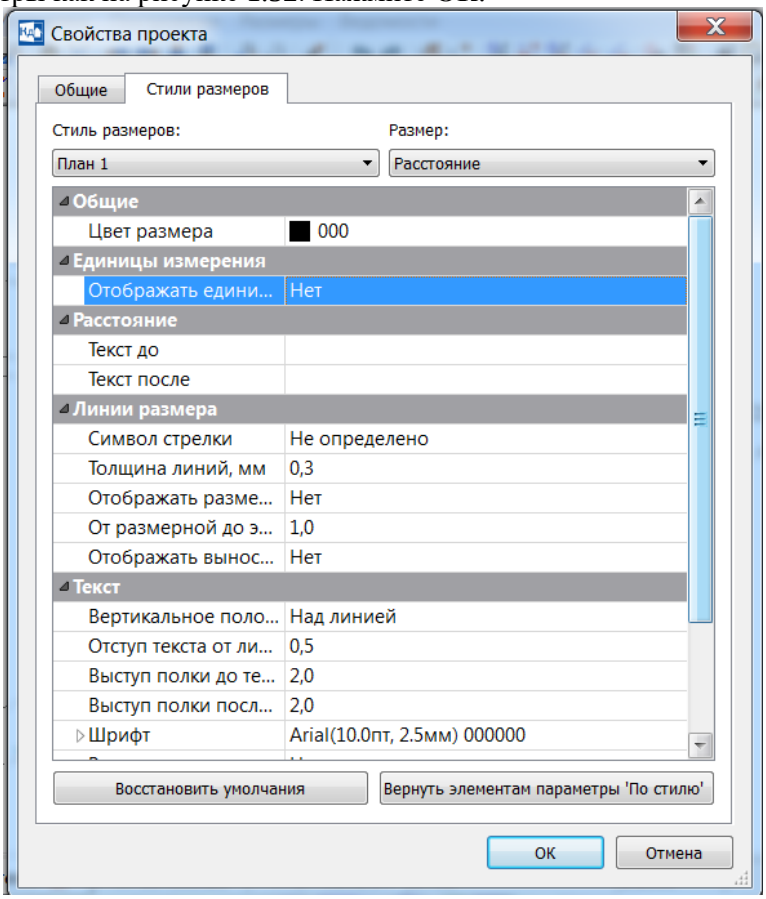
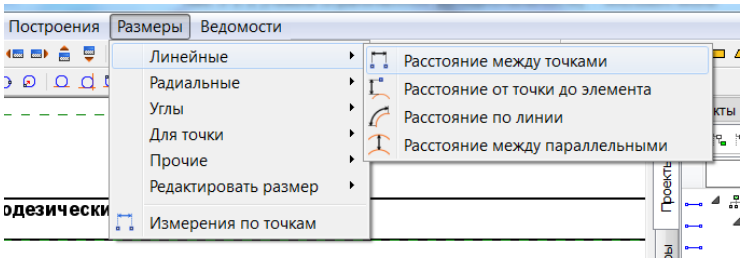


Рис. 1.52

11. Для определения расстояния по линиям до базовой станции выберете пункт меню **Размеры/Линейные/Расстояние между точками**. В режиме захвата точки последовательно выберете пункт ГГС и точку границы ЗУ. Установите параметры как на рисунке 1.53. Примените построение. В результате схема должна выглядеть как на рис. 1.54.



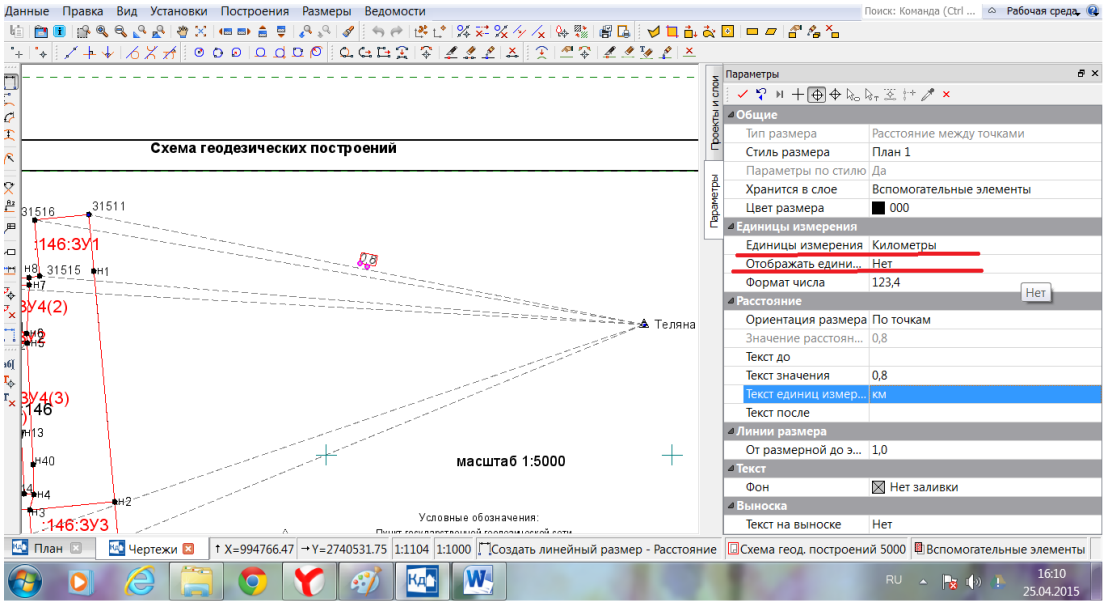


Рис. 1.53

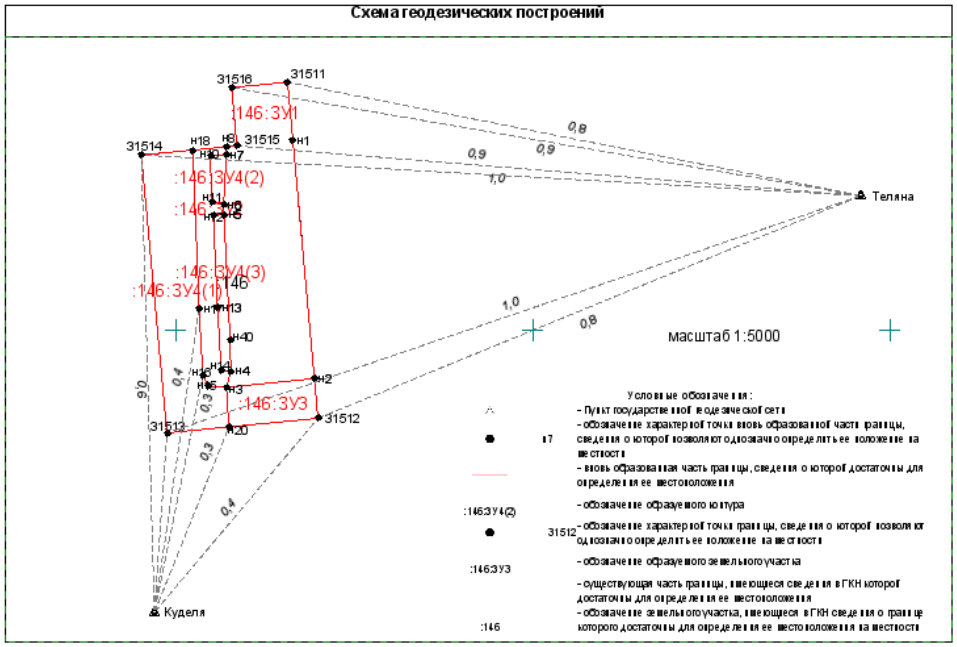


Рис. 1.54

12. Подготовьте **чертеж объекта и схему расположения объекта,** как описано в предыдущем разделе.
13. Сформируйте отчётный документ Межевого плана. Выберите команду **Экспорт/Отчёт**.
14. В группе **Кадастровые объекты** в строке **Выбор объектов** должно стоять значение - *Все.*
15. После установки всех параметров нажмите кнопку **Применить построение** . После чего откроется Отчёт (в Microsoft Word).

4.2. Создание уточненного ЗУ и формирование Межевого плана.

Упражнение 1. Подготовка и формирование отчётной документации по уточненному ЗУ.

1. Запустите систему CREDO КАДАСТР.
2. Откройте набор проектов **Кадастровые работы**.
3. Создайте новый проект типа Межевой план, вид работ выберете **Уточнение местоположения границы**. Сделайте проект **Уточнение** активным.
4. Заполните **Свойства проекта** в пункте меню **Межевой план: Отображать свойства** – Все; **Версия отчета** –последняя.
5. В разделе **Погрешность площади: Нормативный коэффициент** – 2,5; **СКП точек** – Максимальная.
6. В реквизите документа **Титульный лист** выберите строку **Вид работ** и нажмите на локальной панели инструментов выберите кнопку **Открыть**  .
7. Выберите в открывшемся окне **Варианты заполнения –** шаблон **Уточнение местоположения ЗУ.**
8. Дополните шаблон кадастровым номером участка – 66:41:0302011:3 и адресом расположения – Свердловская область, Белоярский район, пос. белоярский, ул. Бажова, д. 15
9. В реквизите Заказчик кадастровых работ выберите **Дата** - 2012.09.17, **Вид** – Физическое лицо, **ФИО** – Сидоров Владимир Ефимович (паспорт серия 6509 № 480879 выданный 1 июля 2008 года Отделом УФМС России по Свердловской области в Кировском районе г. Екатеринбурга, адрес: г. Екатеринбург, Ул. Советская, д12, кв. 10).
10. В реквизите Кадастровый инженер используйте сохранённую информацию в **Вариантах заполнения** при подготовке предыдущего Межевого плана (кадастровый инженер – Бубнов).
11. В реквизите **Документы, использованные при подготовке** - введите информацию, как на рис. 1.55.

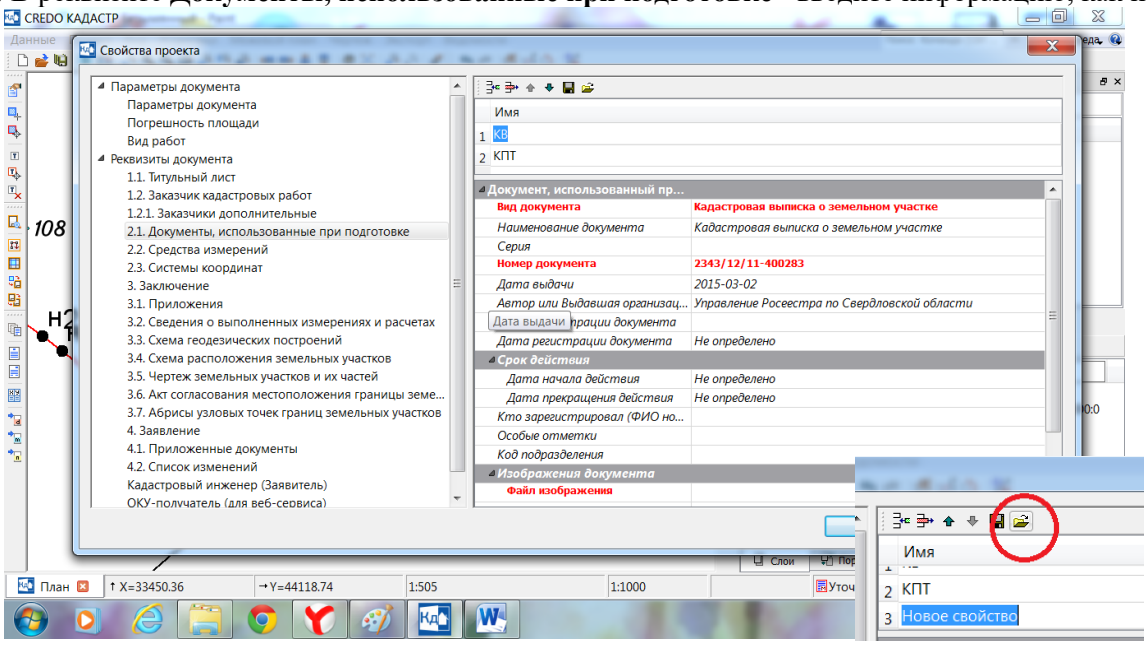
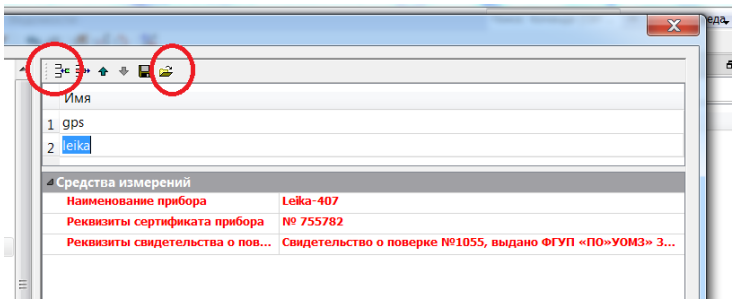


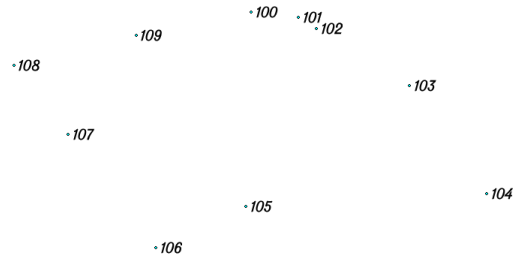
Рис. 1.55

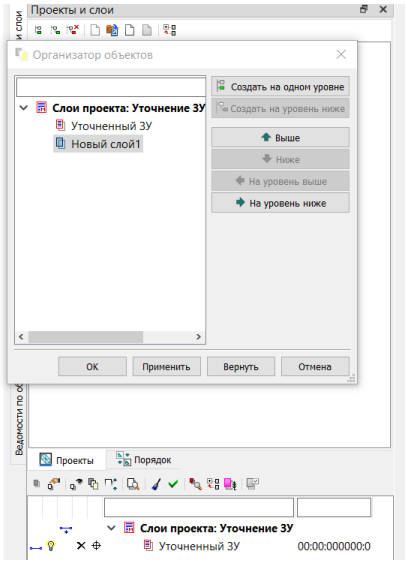
12. Добавьте новое свойство и выберете с помощью кнопки **Открыть** вариант КПТ, сохраненный в предыдущем Межевом плане.

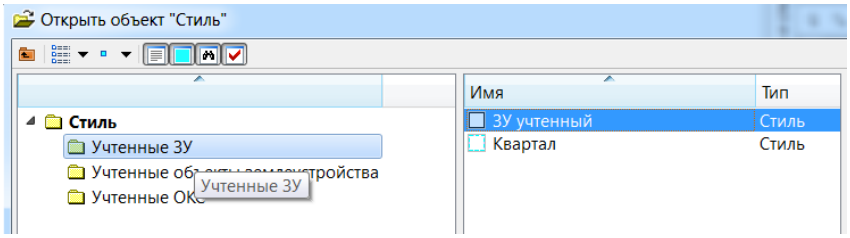
13. В реквизите **Средства измерения** используйте сохранённую информацию в **Вариантах заполнения** при подготовке предыдущего Межевого плана «gps и leika»



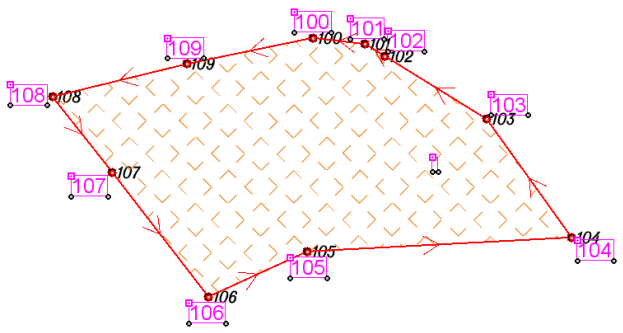
14. В реквизите Система координат введите – *Местная.*
15. После заполнения всех реквизитов нажмите **Применить. ОК.**
16. Создайте новый кадастровый объект. Для этого воспользуйтесь командой **Межевой план/Создать объект.** В организаторе объектов создайте новый слой на одном уровне со слоем **Уточненный ЗУ.** В окне выбора стилей в папке **Учтенные** выберете стиль **ЗУ Учтенный.**







Создайте геометрию участка и определите параметры, как на рис. 1.56



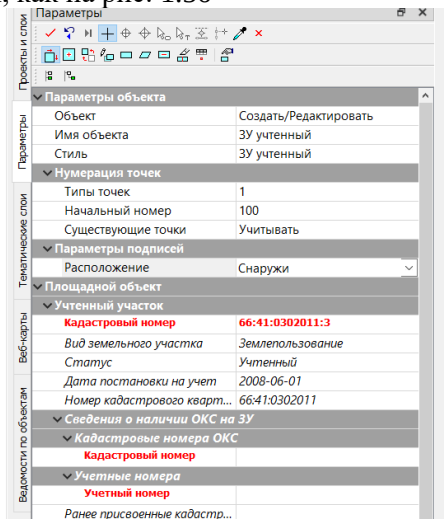
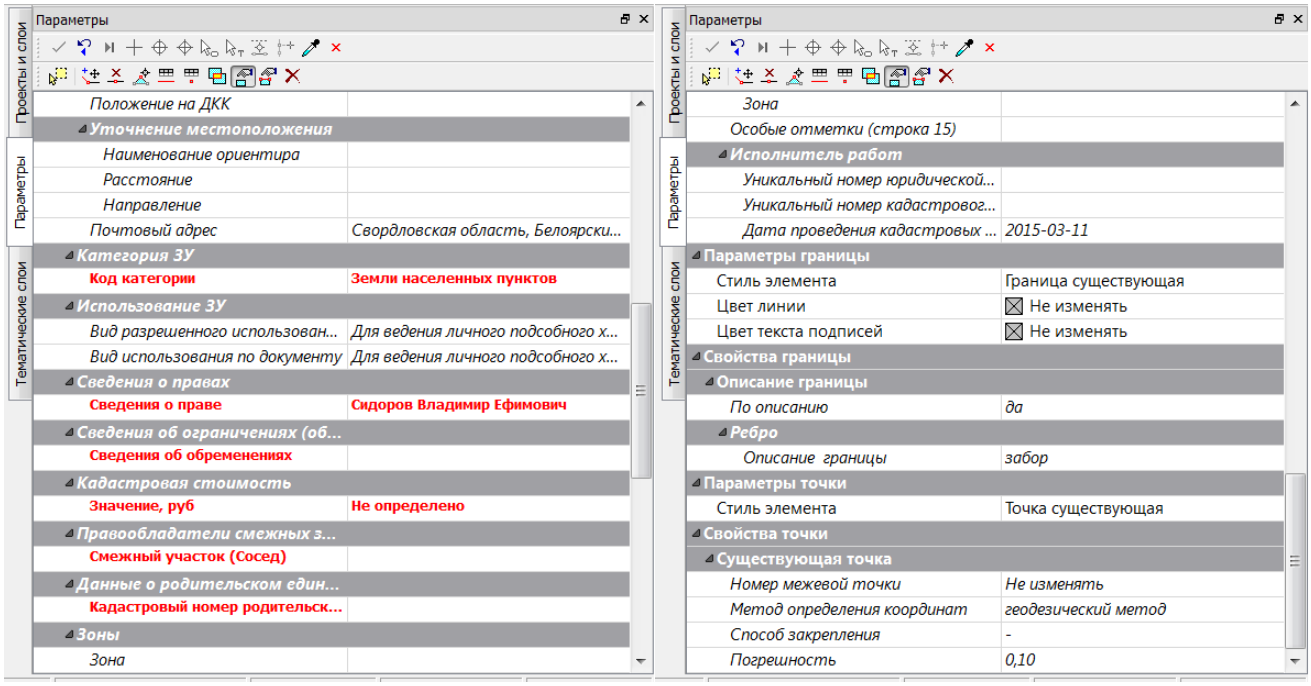


Рис. 1.56

Заполните другие характеристики объекта:



17.Отключите видимость проекта **Учтенный 1.**
18.Создайте новый кадастровый объект в Слое **Уточненный ЗУ.**

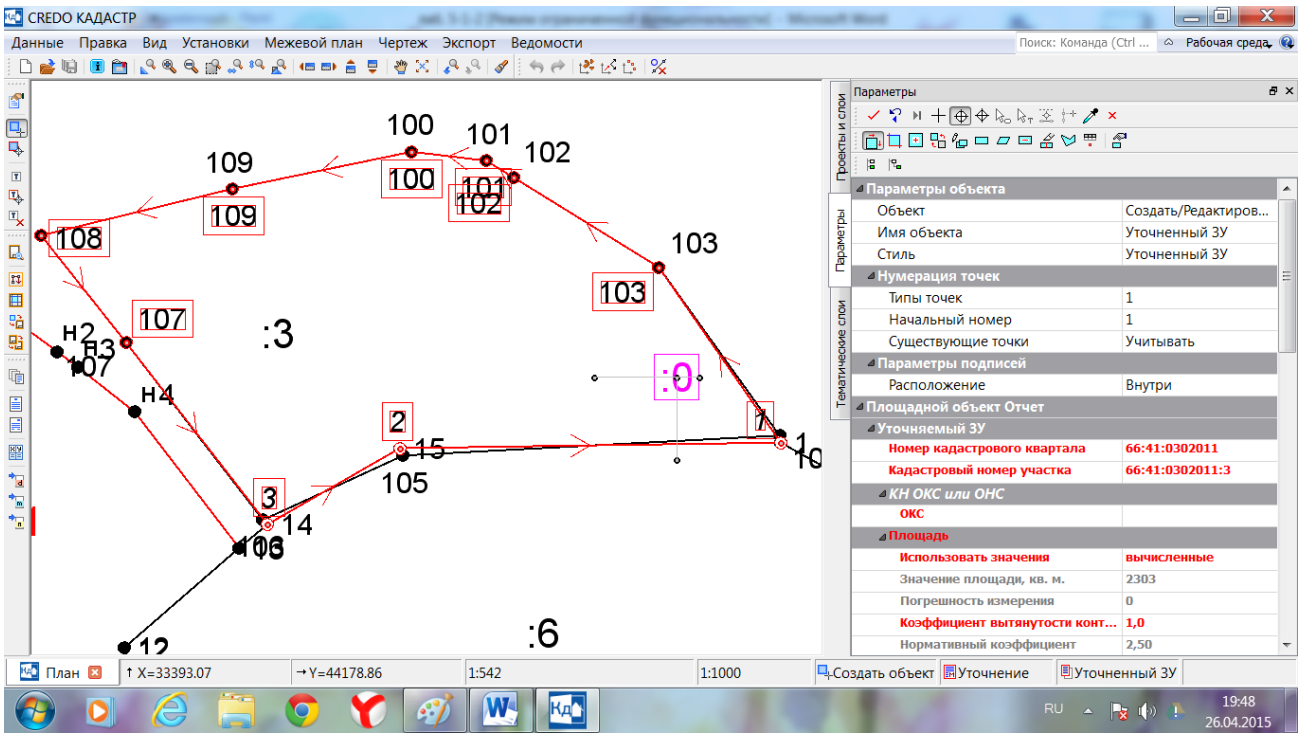


Рис. 1.57

Заполните параметры объекта, используя информацию, описанную Выше (сведения о правообладателе, почтовом адресе и др.) см. рис. 1.57 и 1.58

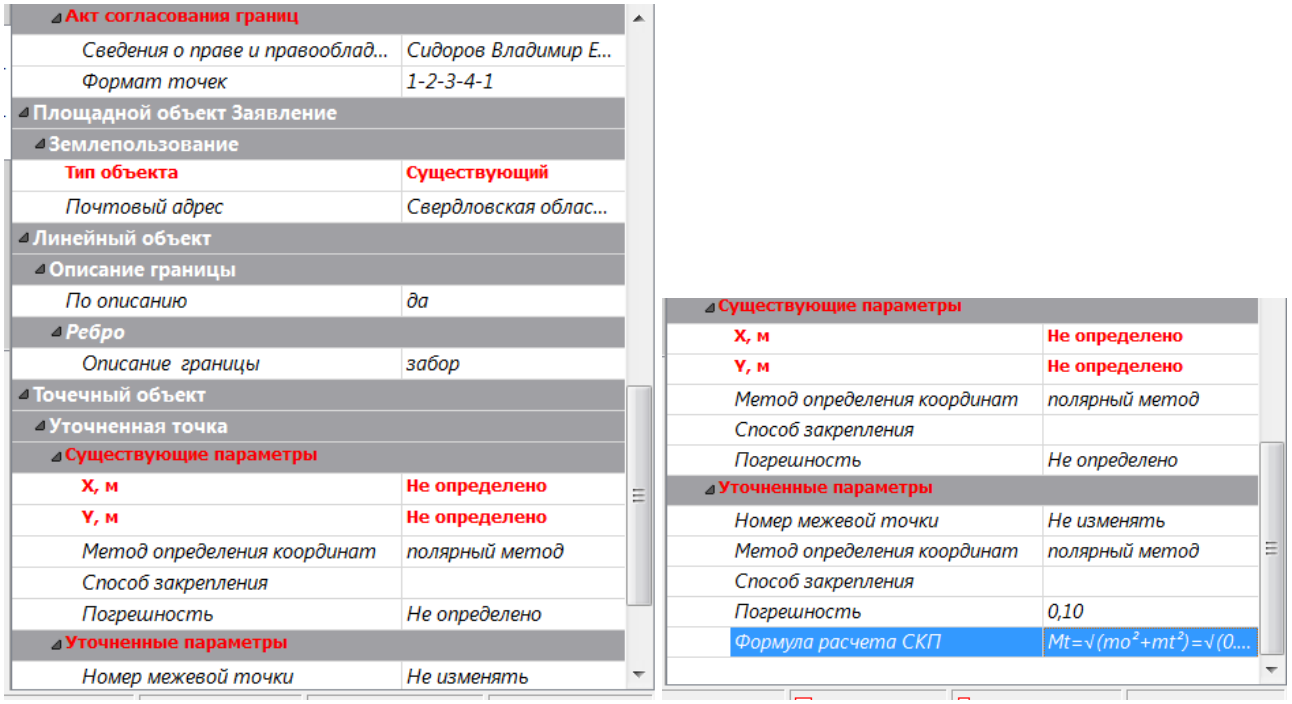


Рис. 1.58

19. В окне **Параметров** заполните:
    - **Номер кадастрового квартала** - 66:41:0302011;
    - **Кадастровый номер ЗУ** - 66:41:0302011:3;
    - **Почтовый адрес** согласно рис. 4.17, в строке ***Неформализованное описание местоположения*** - *обл. Свердловская, Белоярский р-н, пос. Белоярский, ул. Бажова, д. 15*. Нажмите **Применить, ОК**.
20. В разделе **Нумерация точек** укажите **Существующие точки – Учитывать.** В разделе **Параметры подписей** в сроке **Расположение** установите **Внутри**.
21. Выберите в разделе **Сведения об ограничениях (обременениях)…** строку **Сведения об обременениях** и нажмите кнопку ... .
22. В разделе **Уточненная точка/Уточненные параметры** укажите **Метод определения** – *полярная засечка*, **Способ закрепления** - *Временный межевой знак*, **Погрешность**- *0,1*
23. После заполнения параметров нажмите команду **Применить построение** .
24. На вкладке **Слои** выделите слой с Уточненным ЗУ, нажмите правую кнопку мыши и выберите команду **Редактировать параметры КО** из контекстного меню.
25. Выберите на локальной панели окна **Параметры** команду **Редактировать точечные элементы** .
26. В открывшемся окне **Особенности при уточнении КО**, удерживая кнопку **Ctrl** либо **Shift**, выберите точки 1,2 и 3**.**
27. Перейдите в раздел **Параметры точки,** выберите строку **Стиль элемента** и нажмите кнопку ... .
28. В окне **Открыть объект «Стиль элемента»** выберите **Точка Уточняемая.** Нажмите **Открыть.**
29. Выберите команду **Применить.**
30. Перейдите на вкладку **Уточняемый объект.**
31. В разделе **Исходный объект,** в строке **Выбрать объект** нажмите кнопку ... (см. рис. 1.59)(ЗУ Учтенный).

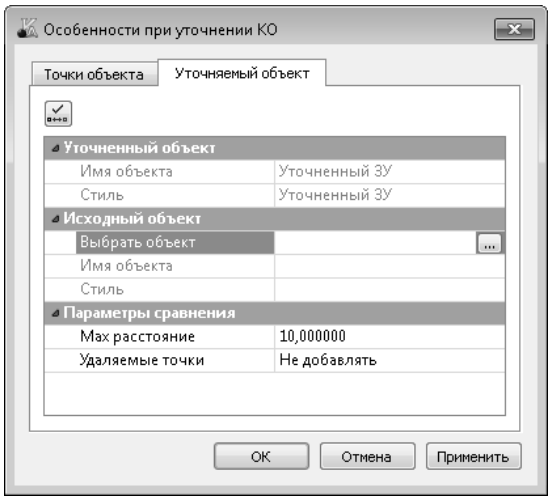


Рис. 1.59

32. Подведите курсор в графическом окне к объекту (курсор в режиме – **выбора полигона**) **и** выберите кадастровый объект **ЗУ учтенный** (граница подсветится) нажатием левой клавиши мыши. *При выборе КО в графическом окне для их «перебора» используйте клавишу F3.*
33. В открывшемся окне **Особенности при уточнении КО** в параметрах сравнения в строке **Max расстояние** укажите 10, нажмите кнопку **Расчёт** .

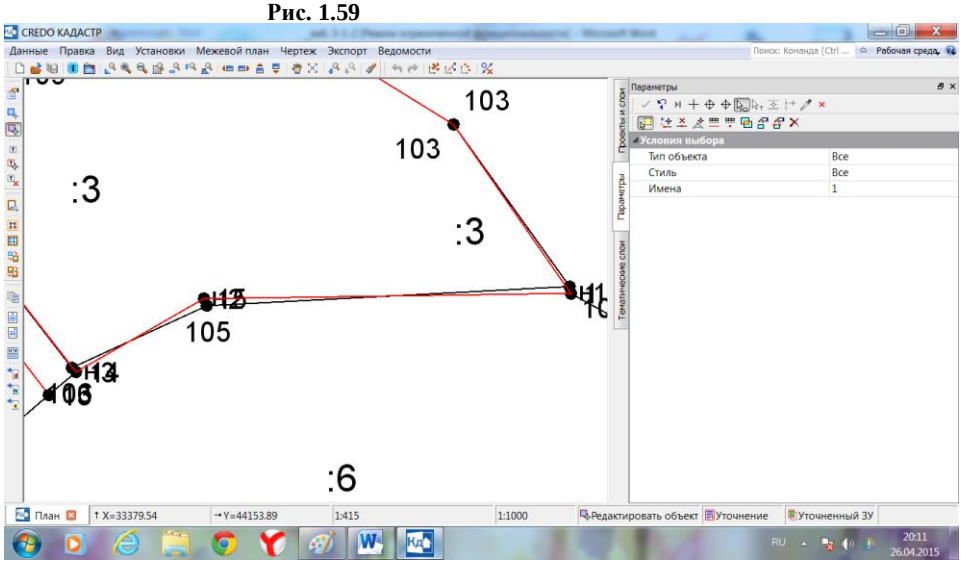


Рис. 1.60

34. Нажмите **Применить. ОК.**
35. Создайте чертеж земельного участка командой **Чертеж/Чертеж объекта.**
36. В окне **Открыть объект «Шаблон чертежа»** выберите **Чертеж ЗУ**.
37. В параметрах создания чертежа укажите **Формат листа А4 297х210,** ориентация **- Книжная**.
38. При необходимости переместите рамку чертежа в графическом окне в нужное положение, нажмите **Применить**.
39. Самостоятельно вставьте условные обозначения (в виде многострочного текста) командой **Ведомости/Условные обозначения**.
40. Из чертежной модели выйдите с сохранением.
41. Самостоятельно создайте схему геодезических определений и схему расположения ЗУ.
42. Сохраните данные. Выберите команду **Данные/Сохранить Набор Проектов и все Проекты.**
43. Сформируйте отчётный документ Межевого плана. Выберите команду **Экспорт/Отчёт.**
44. В группе **Кадастровые объекты** в строке **Выбор объектов** нажмите кнопку ... и выберите слой **Уточненный ЗУ**.
45. Затем нажмите кнопку **Применить построение** . После чего откроется Microsoft Word со сформированным МП.
46. В разделе **Чертежи** в строке **Выбор проектов ЧМ** нажмите кнопку ... и отметьте флажком все созданные проекты.
47. После заполнения всех параметров нажмите команду **Применить построение** .
48. В открывшемся диалоге **Обзор папок** выберите папку для экспорта пакета документов.
49. Выполните сохранение изменений в наборе проектов.

Тема 5. Технология работы с проектом Технический план здания.

5.1. Создание отчётного документа – Технического плана здания.

Упражнение 1. Подготовка и формирование отчётной документации по техническому плану здания.

1. Запустите систему CREDO КАДАСТР.
2. Выполните команду **Данные/Открыть набор проектов**.
3. В открывшемся окне укажите в выпадающем списке форматов **Файл обмена для Набора проектов (*.obx)** и выберите файл **Технический план.obx**, который находится в папке **ДанныеДляРаботы**. Нажмите **Открыть.**

   В открывшемся наборе проектов уже созданы ЗУ учтённый(проект ТП здания) и Геодезическая основа (проект Результаты съемки).

4. Сделайте активным проект ТП здания (двойным щелчком на названии проекта в окне **Проекты**). Выделите новый проект.
5. Проверьте заполнение **Свойств проекта.**
6. Выберите команду **Технический план/Свойства Проекта.**
7. В реквизите документа **Титульный лист** проверим, чтобы было указано Имя – *Здание-постановка на учет*.
   Некоторые поля в **Реквизитах документа** будут заполнены, т.к. при создании проекта мы использовали в качестве исходных данных уже подготовленный проект, в котором были заполнены все необходимые реквизиты.
8. Реквизиты: **Заключение кадастрового инженера, Заявление, Заявители, Приложенные документы** оставьте без заполнений.
9. Сохраните проекты и набор проектов.
10. В открывшемся окне укажите путь к Папке, в которой сохраняете все Проекты и Наборы проектов. Набор проектов Кадастра имеет расширение *.cocds. Далее в окне **Сохранения Набора проектов и всех Проектов** укажите все проекты для сохранения.
11. Нажмите кнопку **Сохранить.**
12. Создайте образуемое здание на основании точек проекта **Съемка** типа **Ситуационный план.**
    - Выберите команду **Технический план/Создать объект.**
    - В открывшемся диалоге **Организатор объектов** выберите слой **Образуемое здание.** Нажмите **ОК.**
    - Переведите курсор в режим захвата точки  и захватите последовательно точки **№ н1 – н7.** Чтобы контур был замкнутым захватите повторно начальную точку **№ н1 (рис.1.61).**

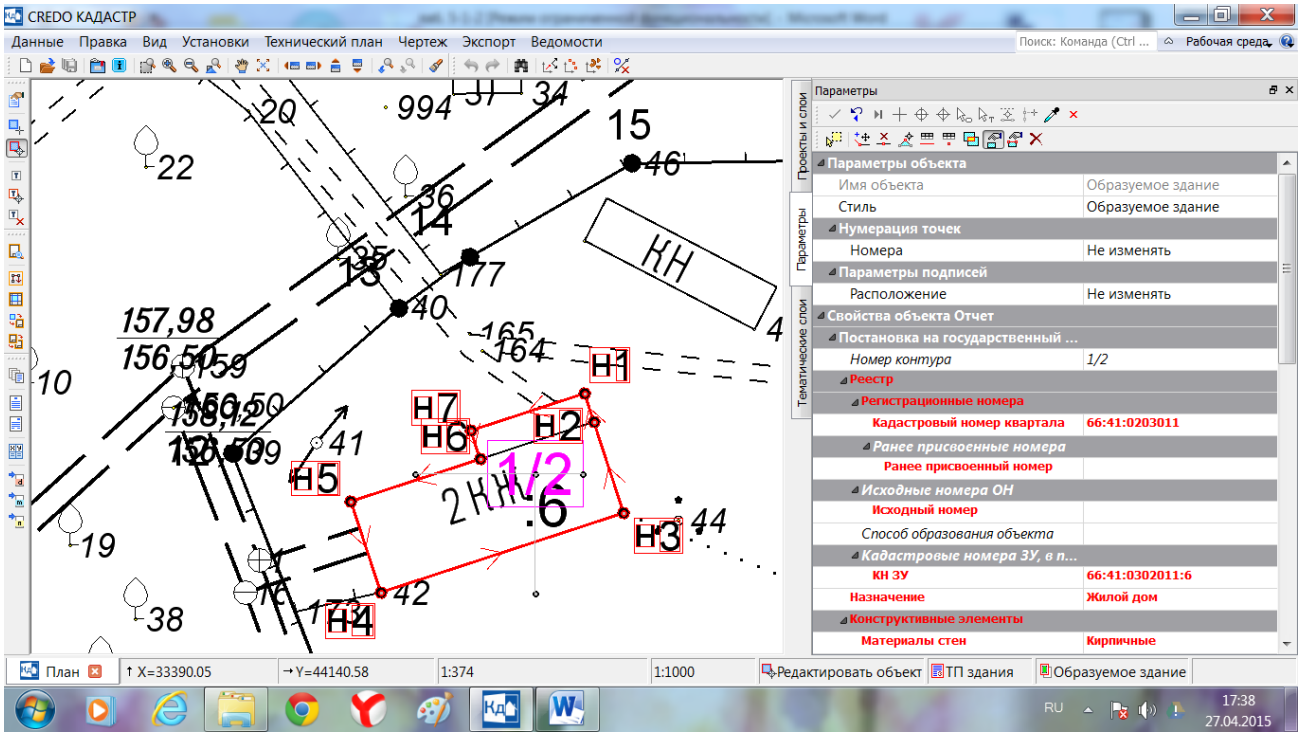
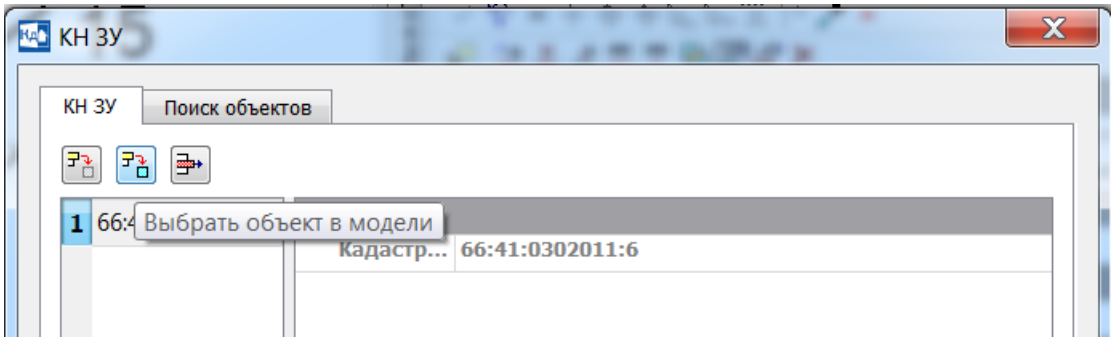


Рис. 1.61

24.Перейдите в открывшееся окно **Параметров** и заполните характеристики, как на рис. 4.66**.**

25.В разделе **Кадастровые номера ЗУ, в пределах которых расположен данный объект ОН**, в строке **КН ЗУ** нажмите кнопку ...

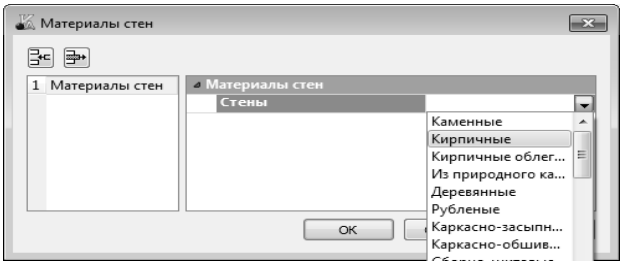
26.В открывшемся диалоге **КН ЗУ** кнопку **Выбрать объект в модели. В вариантах выбора выберете ЗУ Учтенный.**



28.В строке **Номер контура** введите значение 1.

31.В разделе **Конструктивные элементы**, в строке **Материалы стен** нажмите кнопку ...

32.В открывшемся диалоге **Материалы стен** нажмите кнопку Добавить. В строке Материалы стен из выпадающего списка выберите значение – **Кирпичные**. Нажмите **Применить. ОК.**



33.А разделе **Эксплуатационные характеристики** в строке **Год завершения строительства** укажите 2014.

34.В строке **Значение площади, м2** укажите значение 195,8.

35.В разделе точка в строке **Погрешность** укажите значение *0,10*; **Формула расчета** – значение из выпадающего списка «*Вычисление СКП осуществлено … обработка полевых материалов*».

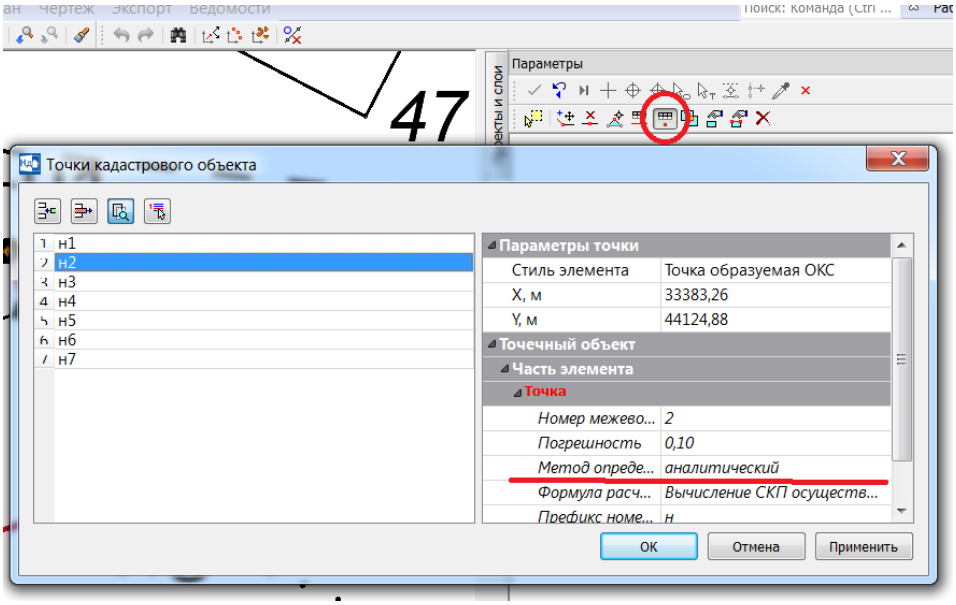
36.Заполните информацию по Почтовому **адресу здания**: Свердловская область, Белоярский район, пос. Белоярский, ул. Бажова, д.13

*Если был выполнен импорт адресов из базы адресов ФИАС, то в диалоге **Почтовый адрес** будет отображена кнопка **Выбрать в базе адресов**. При нажатии на нее откроется диалоговое окно **Диалог наполнения адреса**, разделенный на две части. В верхней части из выпадающих списков следует выбрать наименования адресных объектов – сначала регион, затем район, деревню и улицу. При этом в нижней части диалога автоматически будут заполняться поля Код КЛАДР, Почтовый индекс, Код ОКАТО. После нажатия кнопки ОК, в диалоге Почтовый адрес соответствующие поля будут автоматически заполнены (при необходимости их можно редактировать (изменять/ дополнять)).*

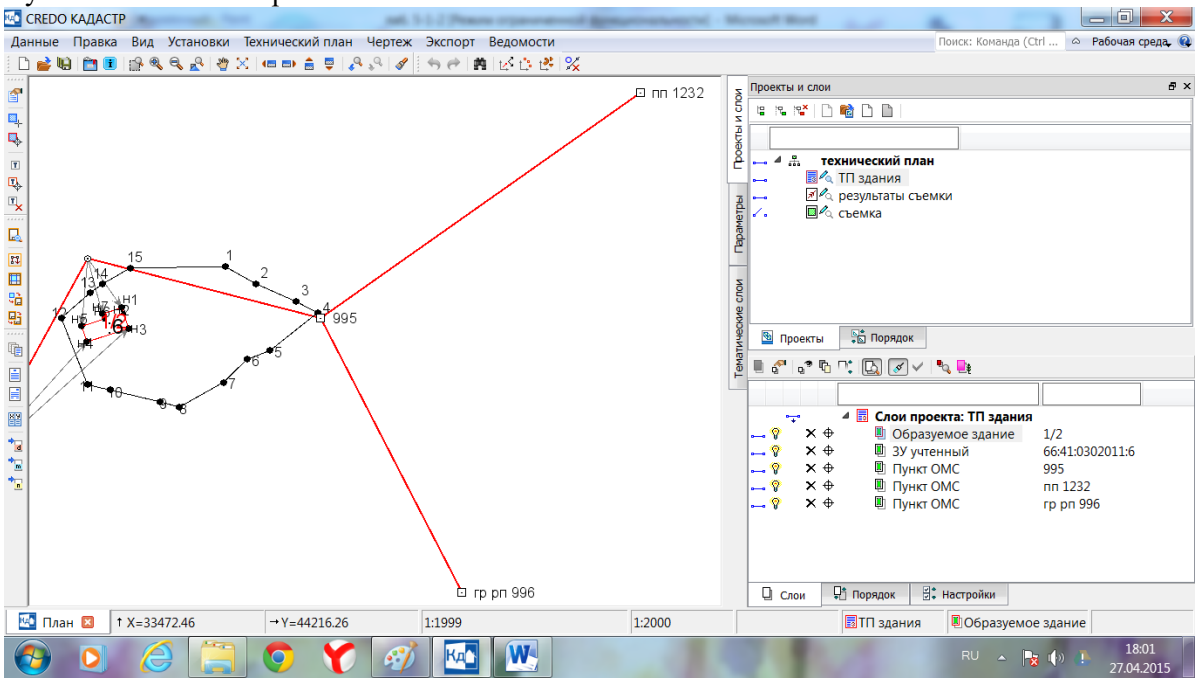
37. Правообладатель: Петров Павел Петрович, проживающий по адресу : Свердловская область, Белоярский район, пос. Белоярский, ул. Бажова, д.13, паспорт гражданина РФ серия 6503 №498726 выданный 1 июня 2008 г. Отделом УФМС России по Свердловской области в Белоярском районе.

Заполнив параметры, нажмите Применить построение .

Воспользовавшись командой **Редактировать точечные элементы** измените способ определения точек н2 и н6 на **аналитический.**



38. В проекте ТП Здания создайте кадастровые объекты под исходными геодезическими пунктами. Пункты полигонометрии 4 класса точности.



Отключите видимость проекта **Съемка** .

39. Выберите команду **Чертеж/Схема геодезических построений/Создать.** В чертежной модели оформите схему вставив Условные обозначения и масштаб.

40. Создайте **Чертеж контура здания**, отключив проекта **Съемка** и **Результаты съемки**, а также слои с исходными пунктами геодезической сети.

41. Создайте Схему расположения объекта, подключив проект **Съемка.**

Сформируйте отчётный документ Технического плана здания. Выберите команду **Экспорт/Отчёт.**

42. В окне **Параметры** в строке **Имя шаблона** должен быть указан шаблон – *Постановка на учет здания*.

43. В группе **Кадастровые объекты** в строке **Выбор объектов** должно стоять значение - *Все*.

44. В строке **Выбор проектов ЧМ** нажмите кнопку  и выберите созданные чертежи и схемы .

45. После установки всех параметров нажмите кнопку **Применить построение**  . После чего откроется Microsoft Word со сформированным ТП.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А.Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Б1.О.10 ПСИХОЛОГИЯ КОМАНДНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И САМОРАЗВИТИЯ

Направление подготовки
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль)
Кадастр недвижимости

Одобрена на заседании кафедры	Рассмотрена методической комиссией
Управления персоналом	Горно-технологического факультета
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой	Председатель
_____ *(подпись)*	_____ *(подпись)*
Ветошкина Т.А	Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И. О.)*
Протокол № 1 от 10.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Автор: Полянок О.В., к.пс.н., доцент

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	3
1	Методические рекомендации по написанию реферата	5
2	Методические рекомендации по написанию эссе	13
3	Методические рекомендации по написанию реферата статьи	17
4	Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий	23
5	Методические рекомендации по составлению тестовых заданий	27
6	Требования к написанию и оформлению доклада	29
7	Методические рекомендации к опросу	34
8	Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям	36
9	Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям	38
10	Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов	40
	Заключение	43
	Список использованных источников	44

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью студентов по освоению знаний и умений в области учебной и научной деятельности без посторонней помощи.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует студентам источники и учебно-методические пособия для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Подразумевается несколько категорий видов самостоятельной работы студентов, значительная часть которых нашла отражения в данных методических рекомендациях:

- работа с источниками литературы и официальными документами (*использование библиотечно-информационной системы*);
- выполнение заданий для самостоятельной работы в рамках учебных дисциплин (*рефераты, эссе, домашние задания, решения практико-ориентированных заданий*);
- реализация элементов научно-педагогической практики (*разработка методических материалов, тестов, тематических портфолио*);
- реализация элементов научно-исследовательской практики (*подготовка текстов докладов, участие в исследованиях*).

Особенностью организации самостоятельной работы студентов является необходимость не только подготовиться к сдаче зачета /экзамена, но и собрать, обобщить, систематизировать, проанализировать информацию по темам дисциплины.

Технология организации самостоятельной работы студентов включает использование информационных и материально-технических ресурсов образовательного учреждения.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня умений студентов.

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, тестирование, опрос, доклад, реферат, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине.

1. Методические рекомендации по написанию реферата

Реферат - письменная работа объемом 10-18 печатных страниц, выполняемая студентом в течение длительного срока (от одной недели до месяца).

Реферат (от лат. referrer - докладывать, сообщать) - краткое точное изложение сущности какого-либо вопроса, темы на основе одной или нескольких книг, монографий или других первоисточников. Реферат должен содержать основные фактические сведения и выводы по рассматриваемой теме[1].

Выполнение и защита реферата призваны дать аспиранту возможность всесторонне изучить интересующую его проблему и вооружить его навыками научного и творческого подхода к решению различных задач в исследуемой области.

Основными задачами выполнения и защиты реферата являются развитие у студентов общекультурных и профессиональных компетенций, среди них:

- формирование навыков аналитической работы с литературными источниками разных видов;
- развитие умения критически оценивать и обобщать теоретические положения;
- стимулирование навыков самостоятельной аналитической работы;
- углубление, систематизация и интеграция теоретических знаний и практических навыков по соответствующему направлению высшего образования;
- презентация навыков публичной дискуссии.

Структура и содержание реферата

Подготовка материалов и написание реферата - один из самых трудоемких процессов. Работа над рефератом сводится к следующим этапам.

1. Выбор темы реферата.
2. Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата.
3. Конкретизация необходимых элементов реферата.
4. Сбор и систематизация литературы.
5. Написание основной части реферата.
6. Написание введения и заключения.
7. Представление реферата преподавателю.
8. Защита реферата.

Выбор темы реферата

Перечень тем реферата определяется преподавателем, который ведет дисциплину. Вместе с тем, аспиранту предоставляется право самостоятельной формулировки темы реферата с необходимым обоснованием целесообразности ее разработки и согласованием с преподавателем. Рассмотрев инициативную тему реферата студента, преподаватель имеет право ее отклонить, аргументировав свое решение, или, при согласии студента, переформулировать тему.

При выборе темы нужно иметь в виду следующее:

1. Тема должна быть актуальной, то есть затрагивать важные в данное время проблемы общественно-политической, экономической или культурной жизни общества.
2. Не следует формулировать тему очень широко: вычленение из широкой проблемы узкого, специфического вопроса помогает проработать тему глубже.

---

[1] Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

3. Какой бы интересной и актуальной ни была тема, прежде всего, следует удостовериться, что для ее раскрытия имеются необходимые материалы.

4. Тема должна открывать возможности для проведения самостоятельного исследования, в котором можно будет показать умение собирать, накапливать, обобщать и анализировать факты и документы.

5. После предварительной самостоятельной формулировки темы необходимо проконсультироваться с преподавателем с целью ее возможного уточнения и углубления.

Предварительная проработка литературы по теме и составление «рабочего» плана реферата

Подбор литературы следует начинать сразу же после выбора темы реферата. Первоначально с целью обзора имеющихся источников целесообразно обратиться к электронным ресурсам в сети Интернет и, в частности, к электронным информационным ресурсам УГГУ: благодаря оперативности и мобильности такого источника информации, не потратив много времени, можно создать общее представление о предмете исследования, выделить основные рубрики (главы, параграфы, проблемные модули) будущего курсовой работы. При подборе литературы следует также обращаться к предметно-тематическим каталогам и библиографическим справочникам библиотеки УГГУ, публичных библиотек города.

Предварительное ознакомление с источниками следует расценивать как первый этап работы над рефератом. Для облегчения дальнейшей работы необходимо тщательно фиксировать все просмотренные ресурсы (даже если кажется, что тот или иной источник непригоден для использования в работе над рефератом, впоследствии он может пригодиться, и тогда его не придется искать).

Результатом предварительного анализа источников является рабочий план, представляющий собой черновой набросок исследования, который в дальнейшем обрастает конкретными чертами. Форма рабочего плана допускает определенную степень произвольности. Первоначальный вариант плана должен отражать основную идею работы. При его составлении следует определить содержание отдельных глав и дать им соответствующее название; продумать содержание каждой главы и наметить в виде параграфов последовательность вопросов, которые будут в них рассмотрены. В реферате может быть две или три главы - в зависимости от выбранной проблемы, а также тех целей и задач исследования.

Работа над предварительным планом необходима, поскольку она дает возможность еще до начала написания реферата выявить логические неточности, информационные накладки, повторы, неверную последовательность глав и параграфов, неудачные формулировки выделенных частей или даже реферата в целом.

Рабочий план реферата разрабатывается студентом самостоятельно и может согласовываться с преподавателем.

Конкретизация необходимых элементов реферата

Реферат должен иметь четко определенные цель и задачи, объект, предмет и методы исследования. Их необходимо сформулировать до начала непосредственной работы над текстом.

Цель реферата представляет собой формулировку результата исследовательской деятельности и путей его достижения с помощью определенных средств. Учитывайте, что у работы может быть только одна цель.

Задачи конкретизируют цель, в реферате целесообразно выделить три-четыре задачи. Задачи - это теоретические и практические результаты, которые должны быть получены в реферате. Постановку задач следует делать как можно более тщательно, т.к. их

решение составляет содержание разделов (подпунктов, параграфов) реферата. В качестве задач может выступать либо решение подпроблем, вытекающих из общей проблемы, либо задачи анализа, обобщения, обоснования, разработки отдельных аспектов проблемы, ведущие к формулировке возможных направлений ее решения.

Объект исследования - процесс или явление, порождающие проблемную ситуацию и избранные для изучения.

Предмет исследования - все то, что находится в границах объекта исследования в определенном аспекте рассмотрения.

Методы исследования, используемые в реферате, зависят от поставленных цели и задач, а также от специфики объекта изучения. Это могут быть методы системного анализа, математические и статистические методы, сравнения, обобщения, экспертных оценок, теоретического анализа и т.д.

Впоследствии формулировка цели, задач, объекта, предмета и методов исследования составят основу Введения к реферату.

Сбор и систематизация литературы

Основные источники, использование которых возможно и необходимо в реферате, следующие:

- учебники, рекомендованные Министерством образования и науки РФ;
- электронные ресурсы УГГУ на русском и иностранном языках;
- статьи в специализированных и научных журналах;
- диссертации и монографии по изучаемой теме;
- инструктивные материалы и законодательные акты (только последних изданий);
- данные эмпирических и прикладных исследований (статистические данные, качественные интервью и т.д.)
- материалы интернет-сайтов.

Систематизацию получаемой информации следует проводить по основным разделам реферата, предусмотренным планом. При изучении литературы не стоит стремиться освоить всю информацию, заключенную в ней, а следует отбирать только ту, которая имеет непосредственное отношение к теме работы. Критерием оценки прочитанного является возможность его использования в реферате.

Сбор фактического материала - один из наиболее ответственных этапов подготовки реферата. От того, насколько правильно и полно собран фактический материал, во многом зависит своевременное и качественное написание работы. Поэтому, прежде чем приступить к сбору материала, аспиранту необходимо тщательно продумать, какой именнофактический материал необходим для реферата и составить, по возможности, специальныйплан его сбора и анализа. После того, как изучена и систематизирована отобранная по темелитература, а также собран и обработан фактический материал, возможны некоторые изменения в первоначальном варианте формулировки темы и в плане реферата.

Написание основной части реферата

Изложение материала должно быть последовательным и логичным. Общая логика написания параграфа сводится к стандартной логической схеме «Тезис - Доказательство - Вывод» (количество таких цепочек в параграфе, как правило, ограничивается тремя - пятью доказанными тезисами).

Все разделы реферата должны быть связаны между собой. Особое внимание следует обращать на логические переходы от одной главы к другой, от параграфа к параграфу, а внутри параграфа - от вопроса к вопросу.

Использование цитат в тексте необходимо для того, чтобы без искажений передать мысль автора первоисточника, для идентификации взглядов при сопоставлении различных

точек зрения и т.д. Отталкиваясь от содержания цитат, необходимо создать систему убедительных доказательств, важных для объективной характеристики изучаемого вопроса. Цитаты также могут использоваться и для подтверждения отдельных положений работы.

Число используемых цитат должно определяться потребностями разработки темы. Цитатами не следует злоупотреблять, их обилие может восприниматься как выражение слабости собственной позиции автора. Оптимальный объем цитаты - одно- два, максимум три предложения. Если цитируемый текст имеет больший объем, его следует заменять аналитическим пересказом.

Во всех случаях употребления цитат или пересказа мысли автора необходимо делать точную ссылку на источник с указанием страницы.

Авторский текст (собственные мысли) должен быть передан в научном стиле. Научный стиль предполагает изложение информации от первого лица множественного числа («мы» вместо «я»). Его стоит обозначить хорошо известными маркерами: «По нашему мнению», «С нашей точки зрения», «Исходя из этого мы можем заключить, что...» и т.п. или безличными предложениями: «необходимо подчеркнуть, что...», «важно обратить внимание на тот факт, что.», «следует отметить.» и т.д.

Отдельные положения реферата должны быть иллюстрированы цифровыми данными из справочников, монографий и других литературных источников, при необходимости оформленными в справочные или аналитические таблицы, диаграммы, графики. При составлении аналитических таблиц, диаграмм, графиков используемые исходные данные выносятся в приложение, а в тексте приводятся результаты расчетов отдельных показателей (если аналитическая таблица по размеру превышает одну страницу, ее целиком следует перенести в приложение). В тексте, анализирующем или комментирующем таблицу, не следует пересказывать ее содержание, а уместно формулировать основной вывод, к которому подводят табличные данные, или вводить дополнительные показатели, более отчетливо характеризующие то или иное явление или его отдельные стороны. Все материалы, не являющиеся необходимыми для решения поставленной в работе задачи, также выносятся в приложение.

Написание введения и заключения

Введение и заключение - очень важные части реферата. Они должны быть тщательно проработаны, выверены логически, стилистически, орфографически и пунктуационно.

Структурно введение состоит из нескольких логических элементов. Во введении в обязательном порядке обосновываются:

- актуальность работы (необходимо аргументировать, в силу чего именно эта проблема значима для исследования);
- характеристика степени разработанности темы (краткий обзор имеющейся научной литературы по рассматриваемому вопросу, призванный показать знакомство студента со специальной литературой, его умение систематизировать источники, критически их рассматривать, выделять существенное, оценивать ранее сделанное другими исследователями, определять главное в современном состоянии изученности темы);
- цель и задачи работы;
- объект и предмет исследования;
- методы исследования;
- теоретическая база исследования (систематизация основных источников, которые использованы для написания своей работы);
- структура работы (название глав работы и их краткая характеристика).

По объему введение занимает 1,5-2 страницы текста, напечатанного в соответствии с техническими требованиями, определенными преподавателем.

Заключение содержит краткую формулировку результатов, полученных в ходе работы, указание на проблемы практического характера, которые были выявлены в процессе исследования, а также рекомендации относительно их устранения. В заключении возможно повторение тех выводов, которые были сделаны по главам. Объем заключения - 1 - 3 страницы печатного текста.

Представление реферата преподавателю

Окончательный вариант текста реферата необходимо распечатать и вставить в папку-скоросшиватель. Законченный и оформленный в соответствии с техническими требованиями реферат подписывается студентом и представляется в распечатанном и в электронном виде в срок, обозначенный преподавателем.

Перед сдачей реферата аспирант проверяет его в системе «Антиплагиат» (http://www.antiplagiat.ru/), пишет заявление о самостоятельном характере работы, где указывает процент авторского текста, полученный в результате тестирования реферата в данной системе. Информацию, полученную в результате тестирования реферата в данной системе (с указанием процента авторского текста), аспирант в печатном виде предоставляет преподавателю вместе с окончательным вариантом текста реферата, который не подлежит доработке или замене.

Защита реферата

При подготовке реферата к защите (если она предусмотрена) следует:

1. Составить план выступления, в котором отразить актуальность темы, самостоятельных характер работы, главные выводы и/или предложения, их краткое обоснование и практическое и практическое значение - с тем, чтобы в течение 3 - 5 минут представить достоинства выполненного исследования.
2. Подготовить иллюстративный материал: схемы, таблицы, графики и др. наглядную информацию для использования во время защиты. Конкретный вариант наглядного представления результатов определяется форматом процедуры защиты реферата.

Критерии оценивания реферата

Критерии оценивания реферата: новизна текста, степень раскрытия сущности вопроса, соблюдение требований к оформлению.

Новизна текста – обоснование актуальности темы; новизна и самостоятельность в постановке проблемы, формулирование нового аспекта известной проблемы; умение работать с литературой, систематизировать и структурировать материал; наличие авторской позиции, самостоятельная интерпретация описываемых в реферате фактов и проблем – 4 балла.

Степень раскрытия сущности вопроса - соответствие содержания доклада его теме; полнота и глубина знаний по теме; умение обобщать, делать выводы, сопоставлять различные точки зрения по вопросу (проблеме); оценка использованной литературы (использование современной научной литературы) – 4 балла.

Соблюдение требований к оформлению - правильность оформления ссылок на источники, списка использованных источников; грамотное изложение текста (орфографическая, пунктуационная, стилистическая культура); владение терминологией; корректность цитирования – 4 балла.

Критерии оценивания публичного выступления (защита реферата): логичность построения выступления; грамотность речи и владение профессиональной терминологией; обоснованность выводов; умение отвечать на вопросы; поведение при защите работы *(*манера говорить, отстаивать свою точку зрения, привлекать внимание к важным моментам в докладе или ответах на вопросы и т.д.) соблюдение требований к объёму доклада – 10 баллов.

Критерии оценивания презентации: дизайн и мультимедиа – эффекты, содержание – 4 балла.

Всего – 25 баллов.

Оценка «зачтено»

Оценка *«зачтено»* – реферат полностью соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 23-25 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, присутствует новизна и самостоятельность в постановке проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, широкий диапазон и качество (уровень) используемого информационного пространства (привлечены различные источники научной информации), прослеживается наличие авторской позиции и самостоятельной интерпретации описываемых в реферате фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована полнота и глубина знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены альтернативные взгляды на рассматриваемую проблему и обосновано сбалансированное заключение; представлен критический анализ использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – текст оформлен в соответствие с методическими требованиями и ГОСТом, в работе соблюдены правила русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое и полное определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона гармонирует с цветом текста, всё отлично читается, использовано 3 цвета шрифта, все страницы выдержаны в едином стиле, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, звуковой фон соответствует единой концепции и усиливает эффект восприятия текстовой части информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание является строго научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) усиливают эффект восприятия текстовой части информации, орфографические , пунктуационные, стилистические ошибки отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами в наиболее адекватной форме, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены.

Критерии оценивания публичного выступления: выступление логично построено, выводы аргументированы, свободное владение профессиональной терминологией, в речи отсутствуют орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы, владеет различными способами привлечения и удержания внимания и интереса аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «*зачтено*» - реферат в основном соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 18-22 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного

пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – текст оформлен в соответствие с методическими требованиями и ГОСТом, в работе имеются незначительные ошибки правил русской орфографии и пунктуации, выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), приводятся соответствующие примеры в строгом соответствии с рассматриваемой проблемой, соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона хорошо соответствует цвету текста, всё можно прочесть, использовано 3 цвета шрифта, 1-2 страницы имеют свой стиль оформления, отличный от общего, гиперссылки выделены и имеют разное оформление до и после посещения кадра, анимация присутствует только в тех местах, где она уместна, звуковой фон соответствует единой концепции и привлекает внимание зрителей в нужных местах - именно к информации, размер шрифта оптимальный, все ссылки работают, содержание в целом является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) соответствуют тексту, орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки практически отсутствуют, наборы числовых данных проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной, ключевые слова в тексте выделены

Критерии оценивания публичного выступления : выступление логично построено, выводы аргументированы, испытывает незначительные затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает в незначительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает полные и исчерпывающие ответы на вопросы, соблюдены этические нормы поведения при защите работы , владеет ограниченным набором способов привлечения внимания аудитории к сообщению, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка *«зачтено»* - реферат частично соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 13-17 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы обоснована, сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал систематизирован и структурирован, представлен достаточный диапазон используемого информационного пространства (привлечены несколько источников научной информации), прослеживается наличие авторской позиции в реферате при отборе фактов и проблем.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата соответствует теме, продемонстрирована достаточная осведомленность знаний по теме, присутствует личная оценка (вывод), объяснены 2-3 взгляда на рассматриваемую проблему и обосновано заключение; представлен критический обзор использованной литературы (использование современной научной литературы).

Соблюдение требований к оформлению – оформление текста частично не соответствует методическими требованиям и ГОСТу, в работе имеются ошибки правил русской орфографии и пунктуации, в целом выдержана стилистическая культура научного текста, четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), частично не соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона плохо соответствует цвету текста, использовано более 4 цветов шрифта, некоторые страницы имеют свой стиль оформления, гиперссылки выделены, анимация дозирована, звуковой фон не соответствует единой концепции, но не носит отвлекающий характер, размер шрифта средний (соответственно,

объём информации слишком большой — кадр несколько перегружен), ссылки работают, содержание включает в себя элементы научности, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) в определенных случаях соответствуют тексту, есть орфографические, пунктуационные, стилистические ошибки, наборы числовых данных чаще всего проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация является актуальной и современной ключевые слова в тексте, чаще всего, выделены.

Критерии оценивания публичного выступления: в выступлении нарушено логическое построение, выводы не аргументированы, испытывает затруднения при использовании профессиональной терминологии, в речи допускает в орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, дает краткие ответы на вопросы, в целом соблюдены этические нормы поведения при защите работы, соблюдены требования к объёму доклада.

Оценка «не зачтено»

Оценка *«не зачтено»* - реферат не соответствует предъявляемым требованиям (критериям оценки) – 0-12 баллов.

Критерии оценивания реферата: актуальность темы не обоснована, не сформулирован новый аспект рассмотрения проблемы, анализируемый материал не систематизирован, ограниченный диапазон используемого информационного пространства (привлечен 1 источник научной информации), отсутствует авторская позиция в реферате.

Степень раскрытия сущности вопроса - содержание реферата не соответствует теме, не продемонстрирована осведомленность знаний по теме, отсутствует личная оценка (вывод), представлен 1 позиция рассмотрения проблемы, заключение не обосновано, отсутствует критический обзор использованной литературы.

Соблюдение требований к оформлению – оформление текста не соответствует методическими требованиям и ГОСТу, в работе выполнена с ошибками правил русской орфографии и пунктуации, не выдержана стилистическая культура научного текста, отсутствует четкое определение рассматриваемых понятий (категорий), не соблюдена корректность при цитировании источников.

Критерии оценивания презентации: цвет фона не соответствует цвету текста, использовано более 5 цветов шрифта, каждая страница имеет свой стиль оформления, гиперссылки не выделены, анимация отсутствует (или же презентация перегружена анимацией), звуковой фон не соответствует единой концепции, носит отвлекающий характер, слишком мелкий шрифт (соответственно, объём информации слишком велик — кадр перегружен), не работают отдельные ссылки, содержание не является научным, иллюстрации (графические, музыкальные, видео) не соответствуют тексту, много орфографических, пунктуационных, стилистических ошибок, наборы числовых данных не проиллюстрированы графиками и диаграммами, информация не представляетсяактуальной и современной, ключевые слова в тексте не выделены

Критерии оценивания публичного выступления: отказывается от защиты или в выступлении нарушено логическое построение, отсутствуют выводы, не использует профессиональную терминологию, в речи допускает значительном количестве орфоэпические, лексические, грамматические и синтаксические ошибки, не отвечает на вопросы, нарушает со этические нормы поведения при защите работы, не соблюдены требования к объёму доклада.

2.Методические рекомендации по написанию эссе

Эссе - это самостоятельная письменная работа на тему, предложенную преподавателем (тема может быть предложена и студентом, но обязательно должна быть согласована с преподавателем). Цель эссе состоит в развитии навыков самостоятельного творческого мышления и письменного изложения собственных мыслей. Писать эссе чрезвычайно полезно, поскольку это позволяет автору научиться четко и грамотно формулировать мысли, структурировать информацию, использовать основные категории анализа, выделять причинно-следственные связи, иллюстрировать понятия соответствующими примерами, аргументировать свои выводы; овладеть научным стилем речи.

Эссе должно содержать: четкое изложение сути поставленной проблемы, включать самостоятельно проведенный анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария, рассматриваемого в рамках дисциплины, выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме. В зависимости от специфики дисциплины формы эссе могут значительно дифференцироваться. В некоторых случаях это может быть анализ имеющихся статистических данных по изучаемой проблеме, анализ материалов из средств массовой информации и использованием изучаемых моделей, подробный разбор предложенной задачи с развернутыми мнениями, подбор и детальный анализ примеров, иллюстрирующих проблему и т.д.

Построение эссе

Построение эссе - это ответ на вопрос или раскрытие темы, которое основано на классической системе доказательств.

Структура эссе

1. *Титульный лист* (заполняется по единой форме);
2. *Введение* - суть и обоснование выбора данной темы, состоит из ряда компонентов, связанных логически и стилистически.

На этом этапе очень важно правильно *сформулировать вопрос, на который вы собираетесь найти ответ в ходе своего исследования.*

При работе над Введением могут помочь ответы на следующие вопросы: «Надо ли давать определения терминам, прозвучавшим в теме эссе?», «Почему тема, которую я раскрываю, является важной в настоящий момент?», «Какие понятия будут вовлечены в мои рассуждения по теме?», «Могу ли я разделить тему на несколько более мелких подтем?».

3. *Основная часть* - теоретические основы выбранной проблемы и изложение основного вопроса.

Данная часть предполагает развитие аргументации и анализа, а также обоснование их, исходя из имеющихся данных, других аргументов и позиций по этому вопросу. В этом заключается основное содержание эссе и это представляет собой главную трудность. Поэтому важное значение имеют подзаголовки, на основе которых осуществляется структурирование аргументации; именно здесь необходимо обосновать (логически, используя данные или строгие рассуждения) предлагаемую аргументацию/анализ. Там, где это необходимо, в качестве аналитического инструмента можно использовать графики, диаграммы и таблицы.

В зависимости от поставленного вопроса анализ проводится на основе следующих категорий:

Причина - следствие, общее - особенное, форма - содержание, часть - целое, постоянство - изменчивость.

В процессе построения эссе необходимо помнить, что один параграф должен содержать только одно утверждение и соответствующее доказательство, подкрепленное графическим и иллюстративным материалом. Следовательно, наполняя содержанием разделы аргументацией (соответствующей подзаголовкам), необходимо в пределах параграфа ограничить себя рассмотрением одной главной мысли.

Хорошо проверенный (и для большинства — совершено необходимый) способ построения любого эссе - использование подзаголовков для обозначения ключевых моментов аргументированного изложения: это помогает посмотреть на то, что предполагается сделать (и ответить на вопрос, хорош ли замысел). Такой подход поможет следовать точно определенной цели в данном исследовании. Эффективное использование подзаголовков - не только обозначение основных пунктов, которые необходимо осветить. Их последовательность может также свидетельствовать о наличии или отсутствии логичности в освещении темы.

4. *Заключение* - обобщения и аргументированные выводы по теме с указанием области ее применения и т.д. Подытоживает эссе или еще раз вносит пояснения, подкрепляет смысл и значение изложенного в основной части. Методы, рекомендуемые для составления заключения: повторение, иллюстрация, цитата, впечатляющее утверждение. Заключение может содержать такой очень важный, дополняющий эссе элемент, как указание на применение (импликацию) исследования, не исключая взаимосвязи с другими проблемами.

Структура аппарата доказательств, необходимых для написания эссе

Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений. Оно связано с убеждением, но не тождественно ему: аргументация или доказательство должны основываться на данных науки и общественно-исторической практики, убеждения жемогут быть основаны на предрассудках, неосведомленности людей в вопросах экономики и политики, видимости доказательности. Другими словами, доказательство или аргументация - это рассуждение, использующее факты, истинные суждения, научные данные и убеждающее нас в истинности того, о чем идет речь.

Структура любого доказательства включает в себя три составляющие: тезис, аргументы и выводы или оценочные суждения.

Тезис - это положение (суждение), которое требуется доказать. *Аргументы* - это категории, которыми пользуются при доказательстве истинности тезиса. *Вывод* - это мнение, основанное на анализе фактов. *Оценочные суждения* - это мнения, основанные на наших убеждениях, верованиях или взглядах. *Аргументы* обычно делятся на следующие группы:

1. *Удостоверенные факты* — фактический материал (или статистические данные).
2. *Определения* в процессе аргументации используются как описание понятий, связанных с тезисом.
3. *Законы* науки и ранее доказанные теоремы тоже могут использоваться как аргументы доказательства.

Требования к фактическим данным и другим источникам

При написании эссе чрезвычайно важно то, как используются эмпирические данные и другие источники (особенно качество чтения). Все (фактические) данные соотносятся с конкретным временем и местом, поэтому прежде, чем их использовать, необходимо убедится в том, что они соответствуют необходимому для исследований времени и месту. Соответствующая спецификация данных по времени и месту — один из способов, который может предотвратить чрезмерное обобщение, результатом которого может, например,

стать предположение о том, что все страны по некоторым важным аспектам одинаковы (если вы так полагаете, тогда это должно быть доказано, а не быть голословным утверждением).

Всегда можно избежать чрезмерного обобщения, если помнить, что в рамках эссе используемые данные являются иллюстративным материалом, а не заключительным актом, т.е. они подтверждают аргументы и рассуждения и свидетельствуют о том, что автор умеет использовать данные должным образом. Нельзя забывать также, что данные, касающиеся спорных вопросов, всегда подвергаются сомнению. От автора не ждут определенного или окончательного ответа. Необходимо понять сущность фактического материала, связанного с этим вопросом (соответствующие индикаторы? насколько надежны данные для построения таких индикаторов? к какому заключению можно прийти на основании имеющихся данных и индикаторов относительно причин и следствий? и т.д.), и продемонстрировать это в эссе. Нельзя ссылаться на работы, которые автор эссе не читал сам.

Как подготовить и написать эссе?

Качество любого эссе зависит от трех взаимосвязанных составляющих, таких как:

1. Исходный материал, который будет использован (конспекты прочитанной литературы, лекций, записи результатов дискуссий, собственные соображения и накопленный опыт по данной проблеме).
2. Качество обработки имеющегося исходного материала (его организация, аргументация и доводы).
3. Аргументация (насколько точно она соотносится с поднятыми в эссе проблемами).

Процесс написания эссе можно разбить на несколько стадий: обдумывание - планирование - написание - проверка - правка.

Планирование - определение цели, основных идей, источников информации, сроков окончания и представления работы.

Цель должна определять действия.

Идеи, как и цели, могут быть конкретными и общими, более абстрактными. Мысли, чувства, взгляды и представления могут быть выражены в форме аналогий, ассоциации, предположений, рассуждений, суждений, аргументов, доводов и т.д.

Аналогии - выявление идеи и создание представлений, связь элементов значений.

Ассоциации - отражение взаимосвязей предметов и явлений действительности в форме закономерной связи между нервно - психическими явлениями (в ответ на тот или иной словесный стимул выдать «первую пришедшую в голову» реакцию).

Предположения - утверждение, не подтвержденное никакими доказательствами.

Рассуждения - формулировка и доказательство мнений.

Аргументация - ряд связанных между собой суждений, которые высказываются для того, чтобы убедить читателя (слушателя) в верности (истинности) тезиса, точки зрения, позиции.

Суждение - фраза или предложение, для которого имеет смысл вопрос: истинно или ложно?

Доводы - обоснование того, что заключение верно абсолютно или с какой-либо долей вероятности. В качестве доводов используются факты, ссылки на авторитеты, заведомо истинные суждения (законы, аксиомы и т.п.), доказательства (прямые, косвенные, «от противного», «методом исключения») и т.д.

Перечень, который получится в результате перечисления идей, поможет определить, какие из них нуждаются в особенной аргументации.

*Источники***.** Тема эссе подскажет, где искать нужный материал. Обычно пользуются библиотекой, Интернет-ресурсами, словарями, справочниками. Пересмотр означает редактирование текста с ориентацией на качество и эффективность.

Качество текста складывается из четырех основных компонентов: ясности мысли, внятности, грамотности и корректности.

Мысль - это содержание написанного. Необходимо четко и ясно формулировать идеи, которые хотите выразить, в противном случае вам не удастся донести эти идеи и сведения до окружающих.

Внятность - это доступность текста для понимания. Легче всего ее можно достичь, пользуясь логично и последовательно тщательно выбранными словами, фразами и взаимосвязанными абзацами, раскрывающими тему.

Грамотность отражает соблюдение норм грамматики и правописания. Если в чем-то сомневаетесь, загляните в учебник, справьтесь в словаре или руководстве по стилистике или дайте прочитать написанное человеку, чья манера писать вам нравится.

Корректность — это стиль написанного. Стиль определятся жанром, структурой работы, целями, которые ставит перед собой пишущий, читателями, к которым он обращается.

3. Методические рекомендации по написанию реферата статьи

Реферирование представляет собой интеллектуальный творческий процесс, включающий осмысление, аналитико-синтетическое преобразование информации и создание нового документа - реферата, обладающего специфической языково-стилистической формой.

Рефератом статьи (далее - реферат) называется текст, передающий основную информацию подлинника в свернутом виде и составленный в результате ее смысловой переработки[2].

Основными функциями рефератов являются следующие: информативная, поисковая, индикативная, справочная, сигнальная, адресная, коммуникативная.

Информативная функция. Поскольку реферат является кратким изложением основного содержания первичного документа, главная его задача состоит в том, чтобы передавать фактографическую информацию.

Отсюда информативность является наиболее существенной и отличительной чертой реферата.

Поисковая и справочная функции. Как средство передачи информации реферат нередко заменяет чтение первичного документа. Обращаясь к рефератам, пользователь осуществляет по ним непосредственный поиск информации, причем информации фактографической. В этом проявляется поисковая функция реферата, а также функция справочная, поскольку извлекаемая из реферата информация во многом представляет справочный интерес.

Индикативная функция. Реферат должен характеризовать оригинальный материал не только содержательно, но и описательно. Путем описания обычно даются дополнительные характеристики первичного материала: его вид (книга, статья), наличие в нем иллюстраций и т.д.

Кроме того, в реферате иногда приходится ограничиваться лишь названием или перечислением отдельных вопросов содержания. Это еще одно свойство реферата, которое принято называть индикативностью.

Адресная функция. Точным библиографическим описанием первичного документа одновременно достигается то, что реферат способен выполнять адресную функцию, без чего бессмысленен документальный информационный поиск.

Сигнальная функция. Эта функция реферата проявляется, когда осуществляется оперативное информирование с помощью авторских рефератов о планах выпуска литературы, а также о существовании неопубликованных, в том числе депонированных работ.

Диапазон использования рефератов очень широк. Они применяются как в индивидуальном, так и в коллективном информационном обеспечении, проводимом в интересах научно-исследовательских работ, учебного процесса и т.д. Они же являются средством международного обмена информацией и выполняют научно-коммуникативные функции в интернациональном масштабе.

Являясь наиболее экономным средством ознакомления с первоисточником, реферат должен отразить все существенные моменты последнего и особо выделить основную мысль автора. Многообразные функции реферата в системе научных коммуникаций можно объединить в следующие основные группы: информативные, поисковые, коммуникативные. Поскольку реферат передает в сжатом виде текст первоисточника, он позволяет специалисту либо получить релевантную информацию, либо сделать вывод о том, что обращаться к первоисточнику нет необходимости.

Существует три основных способа изложения информации в реферате.

---

[2] Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5

Экстрагирование - представление информации первоисточника в реферате. Эта методика достаточно проста: референт отмечает предложения, которые затем полностью или с незначительным перефразированием переносятся в реферат-экстракт.

Перефразирование - наиболее распространенный способ реферативного изложения. Здесь имеет место частичное текстуальное совпадение с первоисточником. Перефразирование предполагает не использование значительной части сведений оригинала, а перестройку его смысловой и синтаксической структуры. Перестройка текста достигается за счет таких операций, как замещение (одни фрагменты текста заменяются другими), совмещения (объединяются несколько предложений в одно) и обобщение.

Интерпретация - это способ реферативного изложения, когда содержание первоисточника может раскрываться либо в той же последовательности, либо на основе обобщенного представления о нем. Разновидностью интерпретированных рефератов могут быть авторефераты диссертаций, тезисы докладов научных конференций и совещаний.

Для качественной подготовки реферата необходимо владеть основными приемами анализа и синтеза, знать основные требования, предъявляемые к рефератам, их структурные и функциональные особенности.

Процесс реферирования делится на пять основных этапов:

1. Определение способа охвата первоисточника, который в данном конкретном случае наиболее целесообразен, для реферирования (общее, фрагментное, аспектное и т.д.).
2. Беглое ознакомительное чтение, когда референт решает вопрос о научно-практической значимости и информационной новизне первоисточника. Анализ его вида позволяет осуществить выбор аспектной схемы изложения реферата.
3. Конструирование текста реферата, которое осуществляется с использованием приемов перефразирования, обобщения, абстрагирования и т.д. Очень редко предложения или фрагменты оригинала используются без изменения. Запись полученных в результате синтеза конструкций осуществляется в последовательности, соответствующей разработанной схеме или плану.
4. Критический анализ полученного текста с точки зрения потребителя реферата.
5. Оформление и редактирование, которые являются заключительным этапом подготовки реферата.

Все, что в первичном документе не заслуживает внимания потребителя реферата, должно быть опущено. Так, в реферат не включаются:

- общие выводы, не вытекающие из полученных результатов;
- информация, не понятная без обращения к первоисточнику;
- общеизвестные сведения;
- второстепенные детали, избыточные рассуждения;
- исторические справки;
- детальные описания экспериментов и методик;
- сведения о ранее опубликованных документах и т. д.

Приемы составления реферата позволяют обеспечить соблюдение основных методических принципов реферирования: адекватности, информативности, краткости и достоверности.

Хотя реферат по содержанию зависит от первоисточника, он представляет собой новый, самостоятельный документ. Общими требованиями к языку реферата являются точность, краткость, ясность, доступность.

По своим языковым и стилистическим средствам реферат отличается от первоисточника, поскольку референт использует иные термины и строит предложения в соответствии со стилем реферата. Наряду с сообщением могут использоваться перифразы. Вместе с тем в ряде случаев стилистика реферата может совпадать с первоисточником, что особенно характерно для расширенных рефератов.

Изложение реферата должно обеспечивать наибольшую семантическую адекватность, семантическую эквивалентность, краткость и логическую последовательность. Для этого

необходимы определенные лексические и грамматические средства. Адекватность и эквивалентность достигаются за счет правильного употребления терминов, краткость - за счет экономной структуры предложений и использования терминологической лексики.

Быстрое и адекватное восприятие реферата обеспечивается употреблением простых законченных предложений, имеющих правильную грамматическую форму. Громоздкие предложения затрудняют понимание реферата, поэтому сложные предложения, как правило, расчленяются на ряд простых при сохранении логических взаимоотношений между ними путем замены соединительных слов, например, местоимениями.

Широко используются неопределенно-личные предложения без подлежащего. Они концентрируют внимание читающего только на факте, усиливая тем самым информационно-справочную значимость реферата.

Реферату, как одному из жанров научного стиля, присущи те же семантико-структурные особенности, что и научному стилю в целом: объективность, однозначность, логичность изложения, безличная манера повествования, широкое использование научных терминов, абстрактной лексики и т.д. В то же время этот жанр имеет исвою специфику стиля: фактографичность (констатация фактов), обобщенно-отвлеченный характер изложения, предельная краткость, подчеркнутая логичность, стандартизация языкового выражения.

Рефераты делятся на информативные (реферат-конспект), индикативные, указательные (реферат-резюме) и обзорные (реферат-обзор)[3]. В основу их классификации положена степень аналитико-синтетической переработки источника.

Информативные рефераты включают в себя изложение (в обобщенном виде) всех основных проблем, изложенных в первоисточнике, их аргументацию, основные результаты и выводы, имеющие теоретическую и практическую ценность.

Индикативные рефераты указывают только на основные моменты содержания первоисточника. Их также называют реферативной аннотацией.

Научные рефераты отражают смысловую сторону образно-тематического содержания. В его основе лежат такие мыслительные операции, как обобщение и абстракция.

Реферат-резюме направлен на перечисление основных проблем источника без содержания доказательств.

Реферат, независимо от его типа, имеет единую структуру:

- название реферируемой работы (или выходные данные);
- композиция реферируемой работы;
- главная мысль реферируемого материала;
- изложение содержания;
- выводы автора по реферируемому материалу.

Обычно в самом первоисточнике главная мысль становится ясной лишь после прочтения всего материала, в реферате же с нее начинается изложение содержания, она предшествует всем выводам и доказательствам. Такая последовательность изложения необходима для того, чтобы с самого начала сориентировать читателя относительно основного содержания источника и его перспективной ценности. Выявление главной мысли источника становится весьма ответственным делом референта и требует от него вдумчивого отношения к реферируемому материалу. Иногда эта главная мысль самим автором даже не формулируется, а лишь подразумевается. Референту необходимо суметь сжато ее сформулировать, не внося своих комментариев.

Содержание реферируемого материала излагается в последовательности первоисточника по главам, разделам, параграфам. Обычно дается формулировка вопроса, приводится вывод по этому вопросу и необходимая цепь доказательств в их логической последовательности.

---

[3] Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. - 368с.

Следует иметь в виду, что иногда выводы автора не вполне соответствуют главной мысли первоисточника, так как могут быть продиктованы факторами, выходящими за пределы излагаемого материала. Но в большинстве случаев выводы автора вытекают из главной мысли, выявление которой и помогает их понять.

Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств представлен в таблице 1.

Таблица 1

Перечень типичных смысловых частей информационного реферата и используемых в каждой из них типичных языковых средств

Смысловые части реферата	**Используемые языковые средства**
1. Название реферируемой работы (или выходные данные)	- В. Вильсон. Наука государственного управления // Классики теории государственного управления: американская школа. Под ред. ДЖ. Шафритца, А. Хайда. – М. : Изд-во МГУ, 2003. – с. 24-42.; - Статья называется (носит название, озаглавлена)
2. Композиция реферируемой работы	- Статья • состоит из…… • делится на ….. • начинается с……. • кончается (чем?) .....; - В статье можно выделить две части…….
3. Проблематика и основные положения работы	- Статья • посвящена теме (проблеме, вопросу) …… • представляет собой анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) …….. - Автор статьи • ставит (рассматривает, освещает, поднимает, затрагивает) следующие вопросы (проблемы) …… • особо останавливается (на чем?) ..... • показывает значение (чего?) …….. • раскрывает сущность (чего?) ……. • обращает внимание (на что?) …… • уделяет внимание (чему?) ….. • касается (чего?) ……. - В статье • рассматривается (что?) …. • анализируется (что?) ….. • делается анализ (обзор, описание, обобщение, изложение) (чего?) …… • раскрывается, освещается вопрос… • обобщается (что?) ……. • отмечается важность (чего?) …… • касается (чего?)….. - В статье • показано (что?) …… • уделено большое внимание (чему?) …… • выявлено (что?) ……. • уточнено (что?) ……..
4. Аргументация основных положений работы	- Автор • приводит примеры (факты, цифры, данные) ……. • иллюстрирует это положение …….. • подтверждает (доказывает, аргументирует) свою точку зрения примерами (данными)… - в подтверждение своей точки зрения автор приводит доказательства (аргументы, ряд доказательств, примеры, иллюстрации, данные, результаты наблюдений)… - Для доказательств своих положений автор описывает • эксперимент …… • в ходе эксперимента автор привлекал …

5. Выводы, заключения	• выполненные исследования показывают… • приведенные наблюдения (полученные данные) приводят к выводу (позволяют сделать выводы).. • из сказанного можно сделать вывод, что ….. • анализ результатов свидетельствует … - На основании проведенных наблюдений (полученных данных, анализ результатов) • был сделан вывод (можно сделать заключение) …. • автор приводит выводы …….

Реферат может содержать комментарий референта, только в том случае, если референт является достаточно компетентным в данном вопросе и может вынести квалифицированное суждение о реферируемом материале. В комментарий входят критическая характеристика первоисточника, актуальность освещенных в нем вопросов, суждение об эффективности предложенных решений, указание, на кого рассчитан реферируемый материал.

Комментарий реферата может содержать оценку тех или иных положений, высказываемых автором реферируемой работы. Эта оценка чаще всего выражает согласие или несогласие с точкой зрения автора. Языковые средства, которые используются при этом, рассмотрены в таблице 2.

Таблица 2

Языковые средства, используемых при оценке те положений, высказываемых автором реферируемой работы

Смысловые части комментарии	**Используемые языковые средства**
Смысловые части комментарии	- Автор • справедливо указывает …. • правильно подходит к анализу (оценке) …. • убедительно доказывает …. • отстаивает свою точку зрения …. • критически относится к работам предшественников ….. - Мы • разделяем точку зрения (мнения, оценку) автора …… • придерживаемся подобного же мнения … • критически относимся к работам предшественников …. - Можно согласится с автором, что ….. - Следует признать достоинства такого подхода к решению ….
Несогласие (отрицательная оценка)	- Автор • не раскрывает содержания (противоречий, разных точек зрения) … • противоречит себе (известным фактам) ……. • игнорирует общеизвестные факты ….. • упускает из вида ……. • не критически относится к высказанному положению …….. • не подтверждает сказанное примерами…. - Мы • придерживаемся другой точки зрения (другого, противоположного мнения) • не можем согласиться (с чем?) … • трудно согласиться с автором (с таким подходом к решению проблемы, вопроса, задачи) …. • можно выразить сомнение в том, что ….. • дискуссивно (сомнительно, спорно) , что …… • к недостаткам работы можно отнести ……

В реферате могут быть использованы цитаты из реферируемой работы. Они всегда ставятся в кавычки. Следует различать три вида цитирования, при этом знаки препинания ставятся, как в предложениях с прямой речью.

1. Цитата стоит после слов составителя реферата. В этом случае после слов составителя реферата ставится двоеточие, а цитата начинается с большой буквы. Например:

Автор статьи утверждает: «В нашей стране действительно произошел стремительный рост национального самосознания».

2. Цитата стоит перед словами составителя реферата. В этом случае после цитаты ставится запятая и тире» а слова составителя реферата пишутся с маленькой буквы. Например: «В нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания», - утверждает автор статьи.

3. Слова составителя реферата стоят в середине цитаты. В этом случае перед ними и после них ставится точка с запятой. Например: «В нашей стране, - утверждает автор статьи, - действительно стремительный рост национального самосознания».

4. Цитата непосредственно включается в слова составителя реферата. В этом случае (а он является самым распространенным в реферате) цитата начинается с маленькой буквы. Например: Автор статьи утверждает, что «в нашей стране действительно стремительный рост национального самосознания».

4. Методические рекомендации по решению практико-ориентированных заданий

Практико-ориентированные задания - метод анализа ситуаций. Суть его заключается в том, что студентам предлагают осмыслить реальную жизненную ситуацию, описание которой одновременно отражает не только какую-либо практическую проблему, но и актуализирует определенный комплекс знаний, который необходимо усвоить при разрешении данной проблемы. При этом сама проблема не имеет однозначных решений.

Использование метода практико-ориентированного задания как образовательной технологии профессионально-ориентированного обучения представляет собой сложный процесс, плохо поддающийся алгоритмизации[4]. Формально можно выделить следующие этапы:

- ознакомление студентов с текстом;
- анализ практико-ориентированного задания;
- организация обсуждения практико-ориентированного задания, дискуссии, презентации;
- оценивание участников дискуссии;
- подведение итогов дискуссии.

Ознакомление студентов с текстом практико-ориентированного задания и последующий анализ практико-ориентированного задания чаще всего осуществляются за несколько дней до его обсуждения и реализуются как самостоятельная работа студентов; при этом время, отводимое на подготовку, определяется видом практико-ориентированного задания, его объемом и сложностью.

Общая схема работы с практико-ориентированное заданием на данном этапе может быть представлена следующим образом: в первую очередь следует выявить ключевые проблемы практико-ориентированного задания и понять, какие именно из представленных данных важны для решения; войти в ситуационный контекст практико-ориентированного задания, определить, кто его главные действующие лица, отобрать факты и понятия, необходимые для анализа, понять, какие трудности могут возникнуть при решении задачи; следующим этапом является выбор метода исследования.

Знакомство с небольшими практико-ориентированного заданиями и их обсуждение может быть организовано непосредственно на занятиях. Принципиально важным в этом случае является то, чтобы часть теоретического курса, на которой базируется практико-ориентированное задание, была бы прочитана и проработана студентами.

Максимальная польза из работы над практико-ориентированного заданиями будет извлечена в том случае, если аспиранты при предварительном знакомстве с ними будут придерживаться систематического подхода к их анализу, основные шаги которого представлены ниже:

1. Выпишите из соответствующих разделов учебной дисциплины ключевые идеи, для того, чтобы освежить в памяти теоретические концепции и подходы, которые Вам предстоит использовать при анализе практико-ориентированного задания.
2. Бегло прочтите практико-ориентированное задание, чтобы составить о нем общее представление.
3. Внимательно прочтите вопросы к практико-ориентированное задание и убедитесь в том, что Вы хорошо поняли, что Вас просят сделать.
4. Вновь прочтите текст практико-ориентированного задания, внимательно фиксируя все факторы или проблемы, имеющие отношение к поставленным вопросам.
5. Прикиньте, какие идеи и концепции соотносятся с проблемами, которые Вам предлагается рассмотреть при работе с практико-ориентированное заданием.

---

[4] Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

Организация обсуждения практико-ориентированного задания предполагает формулирование перед студентами вопросов, включение их в дискуссию. Вопросы обычно подготавливают заранее и предлагают студентам вместе с текстом практико-ориентированного задания. При разборе учебной ситуации преподаватель можетзанимать активную или пассивную позицию, иногда он «дирижирует» разбором, а иногда ограничивается подведением итогов дискуссии.

Организация обсуждения практико-ориентированных заданий обычно основывается на двух методах. Первый из них носит название традиционного Гарвардского метода - открытая дискуссия. Альтернативным методом является метод, связанный с индивидуальным или групповым опросом, в ходе которого аспиранты делают формальную устную оценку ситуации и предлагают анализ представленного практико-ориентированного задания, свои решения и рекомендации, т.е. делают презентацию. Этот метод позволяет некоторым студентам минимизировать их учебные усилия, поскольку каждый аспирант опрашивается один- два раза за занятие. Метод развивает у студентов коммуникативные навыки, учит их четко выражать свои мысли. Однако, этот метод менее динамичен, чем Гарвардский метод. В открытой дискуссии организация и контроль участников более сложен.

Дискуссия занимает центральное место в методе. Ее целесообразно использовать в том случае, когда аспиранты обладают значительной степенью зрелости и самостоятельности мышления, умеют аргументировать, доказывать и обосновывать свою точку зрения. Важнейшей характеристикой дискуссии является уровень ее компетентности, который складывается из компетентности ее участников. Неподготовленность студентов к дискуссии делает ее формальной, превращает в процесс вытаскивания ими информации у преподавателя, а не самостоятельное ее добывание.

Особое место в организации дискуссии при обсуждении и анализе практико-ориентированного задания принадлежит использованию метода генерации идей, получившего название «мозговой атаки» или «мозгового штурма».

Метод «мозговой атаки» или «мозгового штурма» был предложен в 30-х годах прошлого столетия А. Осборном как групповой метод решения проблем. К концу XX столетия этот метод приобрел особую популярность в практике управления и обучения не только как самостоятельный метод, но и как использование в процессе деятельности с целью усиления ее продуктивности. В процессе обучения «мозговая атака» выступает в качестве важнейшего средства развития творческой активности студентов. «Мозговая атака» включает в себя три фазы.

Первая фаза представляет собой вхождение в психологическую раскованность,отказ от стереотипности, страха показаться смешным и неудачником; достигается созданием благоприятной психологической обстановки и взаимного доверия, когда идеи теряют авторство, становятся общими. Основная задача этой фазы - успокоиться и расковаться.

Вторая фаза - это собственно атака; задача этой фазы - породить поток, лавину идей. «Мозговая атака» в этой фазе осуществляется по следующим принципам:

- есть идея, - говорю, нет идеи, - не молчу;
- поощряется самое необузданное ассоциирование, чем более дикой покажется идея, тем лучше;
- количество предложенных идей должно быть как можно большим;
- высказанные идеи разрешается заимствовать и как угодно комбинировать, а также видоизменять и улучшать;
- исключается критика, можно высказывать любые мысли без боязни, что их признают плохими, критикующих лишают слова;
- не имеют никакого значения социальные статусы участников; это абсолютная демократия и одновременно авторитаризм сумасшедшей идеи;
- все идеи записываются в протокольный список идей;

• время высказываний - не более 1-2 минут.

Третья фаза представляет собой творческий анализ идей с целью поиска конструктивного решения проблемы по следующим правилам:

- анализировать все идеи без дискриминации какой-либо из них;
- найти место идее в системе и найти систему под идею;
- не умножать сущностей без надобности;
- не должна нарушаться красота и изящество полученного результата;
- должно быть принципиально новое видение;
- ищи «жемчужину в навозе».

В методе мозговая атака применяется при возникновении у группы реальных затруднений в осмыслении ситуации, является средством повышения активности студентов. В этом смысле мозговая атака представляется не как инструмент поиска новых решений, хотя и такая ее роль не исключена, а как своеобразное «подталкивание» к познавательной активности.

Презентация, или представление результатов анализа практико-ориентированного задания, выступает очень важным аспектом метода ***case-study***. Умение публично представить интеллектуальный продукт, хорошо его рекламировать, показать его достоинства и возможные направления эффективного использования, а также выстоять под шквалом критики, является очень ценным интегральным качеством современного специалиста. Презентация оттачивает многие глубинные качества личности: волю, убежденность, целенаправленность, достоинство и т.п.; она вырабатывает навыки публичного общения, формирования своего собственного имиджа.

Публичная (устная) презентация предполагает представление решений практико-ориентированного задания группе, она максимально вырабатывает навыки публичной деятельности и участия в дискуссии. Устная презентация обладает свойством кратковременного воздействия на студентов и, поэтому, трудна для восприятия и запоминания. Степень подготовленности выступающего проявляется в спровоцированной им дискуссии: для этого необязательно делать все заявления очевидными и неопровержимыми. Такая подача материала при анализе практико-ориентированного задания может послужить началом дискуссии. При устной презентации необходимо учитывать эмоциональный настрой выступающего: отношение и эмоции говорящего вносят существенный вклад в сообщение. Одним из преимуществ публичной (устной) презентации является ее гибкость. Оратор может откликаться на изменения окружающей обстановки, адаптировать свой стиль и материал, чувствуя настроение аудитории.

Непубличная презентация менее эффектна, но обучающая роль ее весьма велика. Чаще всего непубличная презентация выступает в виде подготовки отчета по выполнению задания, при этом стимулируются такие качества, как умение подготовить текст, точно и аккуратно составить отчет, не допустить ошибки в расчетах и т.д. Подготовка письменного анализа практико-ориентированного задания аналогична подготовке устного, с той разницей, что письменные отчеты-презентации обычно более структурированы и детализированы. Основное правило письменного анализа практико-ориентированного задания заключается в том, чтобы избегать простого повторения информации из текста, информация должна быть представлена в переработанном виде. Самым важным при этом является собственный анализ представленного материала, его соответствующая интерпретация и сделанные предложения. Письменный отчет - презентация может сдаваться по истечении некоторого времени после устной презентации, что позволяет студентам более тщательно проанализировать всю информацию, полученную в ходе дискуссии.

Как письменная, так и устная презентация результатов анализа практико-ориентированного задания может быть групповая и индивидуальная. Отчет может быть индивидуальным или групповым в зависимости от сложности и объема задания. Индивидуальная презентация формирует ответственность, собранность, волю;

групповая - аналитические способности, умение обобщать материал, системно видеть проект.

Оценивание участников дискуссии является важнейшей проблемой обучения посредством метода практико-ориентированного задания. При этом выделяются следующие требования к оцениванию:

- объективность - создание условий, в которых бы максимально точно выявлялись знания обучаемых, предъявление к ним единых требований, справедливое отношение к каждому;
- обоснованность оценок - их аргументация;
- систематичность - важнейший психологический фактор, организующий и дисциплинирующий студентов, формирующий настойчивость и устремленность в достижении цели;
- всесторонность и оптимальность.

Оценивание участников дискуссии предполагает оценивание не столько набора определенных знаний, сколько умения студентов анализировать конкретную ситуацию, принимать решение, логически мыслить.

Следует отметить, что оценивается содержательная активность студента в дискуссии или публичной (устной) презентации, которая включает в себя следующие составляющие:

- выступление, которое характеризует попытку серьезного предварительного
- анализа (правильность предложений, подготовленность,
- аргументированность и т.д.);
- обращение внимания на определенный круг вопросов, которые требуют углубленного обсуждения;
- владение категориальным аппаратом, стремление давать определения, выявлять содержание понятий;
- демонстрация умения логически мыслить, если точки зрения, высказанные раньше, подытоживаются и приводят к логическим выводам;
- предложение альтернатив, которые раньше оставались без внимания;
- предложение определенного плана действий или плана воплощения решения;
- определение существенных элементов, которые должны учитываться при анализе практико-ориентированного задания;
- заметное участие в обработке количественных данных, проведении расчетов;
- подведение итогов обсуждения.

При оценивании анализа практико-ориентированного задания, данного студентами при непубличной (письменной) презентации учитывается:

- формулировка и анализ большинства проблем, имеющихся в практико-ориентированное задание;
- формулировка собственных выводов на основании информации о практико-ориентированное задание, которые отличаются от выводов других студентов;
- демонстрация адекватных аналитических методов для обработки информации;
- соответствие приведенных в итоге анализа аргументов ранее выявленным проблемам, сделанным выводам, оценкам и использованным аналитическим методам.

5. Методические рекомендации по составлению тестовых заданий

Требования к составлению тестовых заданий

Тестовое задание (ТЗ) - варьирующаяся по элементам содержания и по трудности единица контрольного материала, сформулированная в утвердительной форме предложения с неизвестным. Подстановка правильного ответа вместо неизвестного компонента превращает задание в истинное высказывание, подстановка неправильного ответа приводит к образованию ложного высказывания, что свидетельствует о незнании студентом данного учебного материала.

Для правильного составления ТЗ необходимо выполнить следующие *требования*:

1. Содержание каждого ТЗ должно охватывать какую-либо одну смысловую единицу, то есть должно оценивать что-то одно.
2. Ориентация ТЗ на получение *однозначного* заключения.
3. Формулировка содержания ТЗ в виде свернутых кратких суждений. Рекомендуемое количество слов в задании не более 15. В тексте не должно быть преднамеренных подсказок и сленга, а также оценочных суждений автора ТЗ. Формулировка ТЗ должна быть в повествовательной форме (не в форме вопроса). По возможности, текст ТЗ не должен содержать сложноподчиненные конструкции, повелительного наклонения («выберите», «вычислите», «укажите» и т.д). Специфический признак (ключевое слово) выносится в начало ТЗ. Не рекомендуется начинать ТЗ с предлога, союза, частицы.
4. Соблюдение единого стиля оформления ТЗ.

Требования к формам ТЗ

ТЗ может быть представлено в одной из четырех стандартизованных форм:

- закрытой (с выбором одного или нескольких заключений);
- открытой;
- на установление правильной последовательности;
- на установление соответствия.

Выбор формы ТЗ зависит от того, какой вид знаний следует проверить. Так, для оценки фактологических знаний (знаний конкретных фактов, названий, имён, дат, понятий) лучше использовать тестовые задания закрытой или открытой формы.

Ассоциативных знаний (знаний о взаимосвязи определений и фактов, авторов и их теорий, сущности и явления, о соотношении между различными предметами, законами, датами) - заданий на установление соответствия. Процессуальных знаний (знаний правильной последовательности различных действий, процессов) - заданий на определение правильной последовательности.

Тестовое задание закрытой формы

Если к заданиям даются готовые ответы на выбор (обычно один правильный и остальные неправильные), то такие задания называются заданиями с выбором одного правильного ответа или с единичным выбором.

При использовании этой формы следует руководствоваться правилом: в каждом задании с выбором одного правильного ответа правильный ответ должен быть.

Помимо этого, бывают задания с выбором нескольких правильных ответов или с множественным выбором. Подобная форма заданий не допускает наличия в общем перечне ответов следующих вариантов: «все ответы верны» или «нет правильного ответа».

Вариантов выбора (дистракторов) должно быть не менее 4 и не более 7. Если дистракторов мало, то возрастает вероятность угадывания правильного ответа, если слишком много, то делает задание громоздким. Кроме того, дистракторы в большом количестве часто

бывают неоднородными, и тестируемый сразу исключает их, что также способствует угадыванию.

Дистракторы должны быть приблизительно одной длины. Не допускается наличие повторяющихся фраз (слов) в дистракторах.

Тестовое задание открытой формы

В заданиях открытой формы готовые ответы с выбором не даются. Требуется сформулированное самим тестируемым заключение. Задания открытой формы имеют вид неполного утверждения, в котором отсутствует один или несколько ключевых элементов. В качестве ключевых элементов могут быть: число, буква, слово или словосочетание. При формулировке задания на месте ключевого элемента, необходимо поставить прочерк или многоточие. Утверждение превращается в истинное высказывание, если ответ правильный и в ложное высказывание, если ответ неправильный. Необходимо предусмотреть наличие всех возможных вариантов правильного ответа и отразить их в ключе, поскольку отклонения от эталона (правильного ответа) могут быть зафиксированы проверяющим как неверные.

Тестовые задания на установление правильной последовательности

Такое задание состоит из однородных элементов некоторой группы и четкой формулировки критерия упорядочения этих элементов.

Задание начинается со слова: «Последовательность».

Тестовые задания на установление соответствия

Такое задание состоит из двух групп элементов и четкой формулировки критерия выбора соответствия между ними.

Соответствие устанавливается по принципу 1:1 (одному элементу первой группы соответствует только один элемент второй группы) или 1:М (одному элементу первой группы соответствуют М элементов второй группы). Внутри каждой группы элементы должны быть однородными. Количество элементов второй группы должно превышать количество элементов первой группы. Максимальное количество элементов второй группы должно быть не более 10, первой группы - не менее 2.

Задание начинается со слова: «Соответствие». Номера и буквы используются как идентификаторы (метки) элементов. Арабские цифры являются идентификаторами первой группы, заглавные буквы русского алфавита - второй. Номера и буквы отделяются от содержания столбцов круглой скобкой.

6.Требования к написанию и оформлению доклада

Доклад (или отчёт) – один из видов монологической речи, публичное, развёрнутое, официальное, сообщение по определённому вопросу, основанное на привлечении документальных данных.

Обычно любая научная работа заканчивается докладом на специальном научном семинаре, конференции, где участники собираются, чтобы обсудить научные проблемы. На таких семинарах (конференциях) всегда делается доклад по определённой теме. Доклад содержит все части научного отчёта или статьи. Это ответственный момент для докладчика. Здесь проверяются знание предмета исследования, способности проводить эксперимент и объяснять полученные результаты. С другой стороны, люди собираются, чтобы узнать что-то новое для себя. Они тратят своё время и хотят провести время с пользой и интересом. После выступления докладчика слушатели обязательно задают вопросы по теме выступления, и докладчику необходимо научиться понимать суть различных вопросов. Кроме того, на семинаре задача обсуждается, рассматривается со всех сторон, и бывает, что автор узнаёт о своей работе много нового. Часто возникают интересные идеи и неожиданные направления исследований. Работа становится более содержательной. Следовательно, доклад необходим для развития самой науки и для студентов. В этом состоит главное предназначение доклада.

На студенческом семинаре (конференции) всегда подводится итог, делаются выводы, принимается решение или соответствующее заключение. Преподаватель (жюри) выставляет оценку за выполнение доклада и его предъявление, поскольку в учебном заведении данная форма мероприятия является обучающей. Оценки полезно обсуждать со студентами: это помогает им понять уровень их собственных работ. С лучшими сообщениями, сделанными на семинарах, студенты могут выступать впоследствии на студенческих конференциях. Поэтому каждому студенту необходимо обязательно предварительно готовить доклад и учиться выступать публично.

Непосредственная польза выступления студентов на семинаре (конференции) состоит в следующем.

1. Выступление позволяет осуществлять поиск возможных ошибок в постановке работы, методике исследования, обобщении полученных результатов, их интерпретации. Получается, что студенты помогают друг другу улучшить работу. Что может быть ценнее?
2. Выступление дает возможность учиться излагать содержание работы в короткое время, схватывать суть вопросов и толково объяснять существо. Следовательно, учиться делать доклад полезно для работы в любой области знаний.
3. На семинаре (конференции) докладчику принято задавать вопросы. Студентам следует знать, что в научной среде не принято осуждать коллег за заданные в процессе обсуждения вопросы. Однако вопросы должны быть заданы по существу проблемы, исключать переход на личностные отношения. Публичное выступление позволяет студентам учиться корректно, лаконично и по существу отвечать на вопросы, демонстрировать свои знания.

Требования к подготовке доклада

Доклад может иметь форму публичной лекции, а может содержать в себе основные тезисы более крупной работы (например, реферата, курсовой, дипломной работы, научной статьи). Обычно от доклада требуется, чтобы он был:

- точен в части фактического материала и содержал обоснованные выводы;
- составлен с учетом точки зрения адресата;
- посвящен проблемам, непосредственно относящимся к определенной теме;
- разделен на части, логично построенные;
- достаточно обширен, чтобы исчерпать заявленную тему доклада, но не настолько, чтобы утомлять адресата;

- интересно написан и легко читался (слушался);
- понятен, нагляден и привлекателен по оформлению.

Как правило, доклад содержит две части: текст и иллюстрации. Представление рисунков, таблиц, графиков должно быть сделано с помощью компьютера. Компьютер - идеальный помощник при подготовке выступления на семинаре (конференции). Каждая из частей доклада важна. Хорошо подготовленному тексту всегда сопутствует хорошая презентация. Если докладчик не нашёл времени хорошо подготовить текст, то у него плохо подготовлены и иллюстрации. Это неписаное правило.

Доклад строится по определённой схеме. Только хорошая система изложения даёт возможность логично, взаимосвязано, кратко и убедительно изложить результат. Обычно участники конференции знают, что должно прозвучать в каждой части выступления. В мире ежегодно проходят тысячи семинаров, сотни различных конференций, технология создания докладов совершенствуется. Главное - говорить о природе явления, о процессах, проблемах и причинах Вашего способа их решения, аргументировать каждый Ваш шаг к цели.

На следующие вопросы докладчику полезно ответить самому себе при подготовке выступления, заблаговременно (хуже, если подобные вопросы возникнут у слушателей в процессе доклада). Естественно, отвечать целесообразно честно...

1. Какова цель выступления**?**

Или: «Я, автор доклада, хочу...»:

- информировать слушателей о чем-то;
- объяснить слушателям что-то;
- обсудить что-то (проблему, решение, ситуацию и т.п.) со слушателями;
- спросить у слушателей совета;
- сделать себе PR;
- пожаловаться слушателям на что-то (на жизнь, ситуацию в стране и т.п.).

Т.е. ради чего, собственно, затевается выступление? Если внятного ответа на Вопрос нет, то стоит задуматься, нужно ли такое выступление?

2. Какова аудитория?

На кого рассчитано выступление:

- на студентов;
- на клиента (-ов);
- на коллег-профессионалов;
- на конкурентов;
- на присутствующую в аудитории подругу (друзей)?

3. Каков объект выступления?

О чем собственно доклад, что является его «ядром»:

- одна модель;
- серия моделей;
- динамика изменения модели (-ей);
- условия применения моделей;
- законченная методика;
- типовые ошибки;
- прогнозы;
- обзор, сравнительный анализ;
- постановка проблемы, гипотеза;
- иное?

Естественно, качественный доклад может касаться нескольких пунктов из приведенного списка...

4. Какова актуальность доклада?

Или: почему сегодня нужно говорить именно об этом?

5. В чем заключается новизна темы?

Или: если заменить многоумные и иноязычные термины в тексте доклада на обычные слова, то не станет ли содержание доклада банальностью?

Ссылается ли автор на своих предшественников? Проводит ли сравнение с существующими аналогами?

Стоит заметить, что новизна и актуальность - разные вещи. Новизна характеризует насколько ново содержание выступления по сравнению с существующими аналогами. Актуальность - насколько оно сейчас нужно. Бесспорно, самый выигрышный вариант - и ново, и актуально. Неплохо, если актуально, но не ново. Например, давняя проблема, но так никем и не решенная. Терпимо, если не актуально, но ново - как прогноз. Пример: сделанный Д.И. Менделеевым в XIX веке прогноз, что в будущем дома будут не только обогревать, но и охлаждать (кондиционеров тогда и вправду не знали).

Но если и не ново и не актуально, то нужно ли кому-то такое выступление?

6. Разработан ли автором план (структура и логика) выступления?

Есть ли логичная последовательность авторской мысли? Или же автор планирует свой доклад в стиле: «чего-нибудь наболтаю, а наглядный материал и вопросы слушателей как-нибудь помогут вытянуть выступление...?»

Есть ли выводы с четкой фиксацией главного и нового? Как они подводят итог выступлению?

7. Наглядная иллюстрация материалов

Нужна ли она вообще, и если да, то, что в ней будет содержаться? Отражает ли она логику выступления?

Иллюстрирует ли сложные места доклада?

Важно помнить: иллюстративный материал не должен полностью дублировать текст доклада. Слушатель должен иметь возможность записывать: примеры, дополнения, подробности, свои мысли... А для этого необходимо задействовать как можно больше видов памяти. Гигантской практикой образования доказано: материал усваивается лучше, если зрительная и слуховая память подкрепляются моторной. Т.е. надо дать возможность слушателям записывать, а не только пассивно впитывать материал.

Следует учитывать и отрицательный момент раздаточных материалов: точное повторение рассказа докладчика. Или иначе: если на руках слушателей (в мультимедийной презентации) есть полный письменный текст, зачем им нужен докладчик? К слову сказать, часто красивые слайды не столько иллюстрируют материал, сколько прикрывают бедность содержания...

8. Корректные ссылки

Уже много веков в научной среде считается хорошим тоном указание ссылок на первоисточники, а не утаивание их.

9. Что останется у слушателей:

- раздаточный или наглядный материал: какой и сколько?
- собственные записи: какие и сколько? И что сделано автором по ходу доклада для того, чтобы записи слушателей не искажали авторский смысл?
- в головах слушателей: какие понятия, модели, свойства и условия применения были передам слушателям?

Требования к составлению доклада

Полезно придерживаться следующей схемы составления доклада на семинаре (конференции).

Время Вашего доклада ограничено, обычно на него отводится 5-7 минут. За это время докладчик может успеть зачитать в темпе обычной разговорной речи текст объёмом не более

3-5-и листов формата А4. После доклада - вопросы слушателей и ответы докладчика (до 3 минут). Полное время Вашего выступления - не более 10-и минут.

Сначала должно прозвучать название работы и фамилии авторов. Обычно название доклада и авторов произносит руководитель семинара (председатель конференции). Он представляет доклад, но допустим и такой вариант, при котором докладчик сам произносит название работы и имена участников исследования. Потраченное время - примерно 30 с.

Следует знать, что название - это краткая формулировка цели. Поэтому название должно быть конкретным и ясно указывать, на что направлены усилия автора. Если в названии менее 10-и слов - это хороший тон. Если больше - рекомендуется сократить. Так советуют многие международные журналы. В выступлении можно пояснить название работыдругими словами. Возможно, слушатели лучше Вас поймут, если Вы скажете, какое явление исследуется, что измеряется, что создаётся, разрабатывается или рассчитывается. Максимально ясно покажите, что именно Вас интересует.

Введение (до 1 мин)

В этой части необходимо обосновать необходимость проведения исследования и его актуальность. Другими словами, Вы должны доказать, что доклад достоин того, чтобы его слушали. Объясните, почему важно исследовать данное явление. Расскажите, чем интересен выбранный объект с точки зрения науки, заинтересуйте своих слушателей темой Вашего исследования.

Скажите, кто и где решал подобную задачу. Укажите сильные и слабые стороны известных результатов. Учитывайте то, что студенту необходимо учиться работать с литературой, анализировать известные факты. Назовите источники информации, Ваших предшественников по имени, отчеству и фамилии и кратко, какие ими были получены результаты. Обоснуйте достоинство Вашего способа исследования в сравнении с известными результатами. Учтите, что студенческое исследование может быть и познавательного характера, то есть можно исследовать известный науке факт. Поясните, чем он интересен с Вашей точки зрения. Ещё раз сформулируйте цель работы и покажите, какие задачи необходимо решить, чтобы достигнуть цели. Что нужно сделать, создать, решить, вычислить? Делите целое на части - так будет понятнее и проще.

Методика исследования (до 30 сек.)

Методика, или способ исследования, должна быть обоснована. Поясните, покажите преимущества и возможности выбранной Вами методики при проведении экспериментального исследования.

Теоретическая часть (до 1 мин)

Эта часть обязательна в докладе. Редкий случай, когда можно обойтись без теоретического обоснования предстоящей работы, ведь экспериментальное исследование должно базироваться на теории. Здесь необходимо показать сегодняшний уровень Вашего понимания проблемы и на основании теории попытаться сформулировать постановку задачи. Покажите только основные соотношения и обязательно дайте комментарий. Скажите, что основная часть теории находится в содержании работы (реферате).

Экспериментальная часть (для работ экспериментального типа) (1,5-2 мин.)

Покажите и объясните суть проведённого Вами эксперимента. Остановитесь только на главном, основном. Второстепенное оставьте для вопросов.

Результаты работы (до 1 мин.)

1. Перечислите основные, наиболее важные, на Ваш взгляд, результаты работы.
2. Расскажите, как он был получен, укажите его характерные особенности.
3. Поясните, что Вы считаете самым важным и почему.
4. Следует ли продолжать исследование, и, если да, то в каком направлении?
5. Каким результатом можно было бы гордиться? Остановитесь на нём подробно.

6. Скажите, что следует из представленной вами информации.
7. Покажите, удалось ли разобраться в вопросах, сформулированных при постановке задачи. Обязательно скажите, достигнута ли цель работы. Закончено ли исследование?
8. Какие перспективы?
9. Покажите, что результат Вам нравится.

Выводы (до 1 мин.)

Сжато и чётко сформулируйте выводы. Покажите, что твёрдо установлено в результате проведённого теоретического или экспериментального исследования. Что удалось надёжно выяснить? Какие факты заслуживают доверия?

Завершение доклада

Поблагодарите всех за внимание. Помните: если Вы закончили свой доклад на 15 секунд раньше, все останутся довольны и будут ждать начала вопросов и дискуссию. Если Вы просите дополнительно ещё 3 минуты, Вас смогут потерпеть. Это время могут отнять от времени для вопросов, где Вы могли бы показать себя с хорошей стороны. Поэтому есть смысл предварительно хорошо "вычитать" (почти выучить) доклад. Это лучший способ научиться управлять временем.

Требования к предъявлению доклада во время выступления

Докладчику следует знать следующие приёмы, обеспечивающие эффективность восприятия устного публичного сообщения.

Приемы привлечения внимания

1. Продуманный первый слайд презентации.
2. Обращение.
3. Контакт глаз.
4. Позитивная мимика.
5. Уверенная пантомимика и интонация.
6. Выбор места.

Приемы привлечения интереса

В формулировку актуальности включить информацию о том, в чём может быть личный интерес слушателей, в какой ситуации они могут его использовать?

Приемы поддержания интереса и активной мыслительной деятельности слушателей

1. Презентация (образы, схемы, диаграммы, логика, динамика, юмор, оформление).
2. Соответствующая невербальная коммуникация (все составляющие!!!).
3. Речь логичная, понятная, средний темп, интонационная выразительность.
4. Разговорный стиль.
5. Личностная вовлеченность.
6. Образные примеры.
7. Обращение к личному опыту.
8. Юмор.
9. Цитаты.
10. Временное соответствие.

Приемы завершения выхода из контакта

- обобщение;
- метафора, цитата;
- побуждение к действию.

7. Методические указания по подготовке к опросу

Самостоятельная работа обучающихся включает подготовку к устному или письменному опросу на семинарских занятиях. Для этого обучающийся изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

Письменный опрос

В соответствии с технологической картой письменный опрос является одной из форм текущего контроля успеваемости студента по данной дисциплине. При подготовке к письменному опросу студент должен внимательно изучает лекции, основную и дополнительную литературу, публикации, информацию из Интернет-ресурсов. Темы и вопросы к семинарским занятиям, вопросы для самоконтроля приведены в методических указаниях по разделам и доводятся до обучающихся заранее.

При изучении материала студент должен убедиться, что хорошо понимает основную терминологию темы, умеет ее использовать в нужном контексте. Желательно составить краткий конспект ответа на предполагаемые вопросы письменной работы, чтобы убедиться в том, что студент владеет материалом и может аргументировано, логично и грамотно письменно изложить ответ на вопрос. Следует обратить особое внимание на написание профессиональных терминов, чтобы избегать грамматических ошибок в работе. При изучении новой для студента терминологии рекомендуется изготовить карточки, которые содержат новый термин и его расшифровку, что значительно облегчит работу над материалом.

Устный опрос

Целью устного собеседования являются обобщение и закрепление изученного курса. Студентам предлагаются для освещения сквозные концептуальные проблемы. При подготовке следует использовать лекционный материал и учебную литературу. Для более глубокого постижения курса и более основательной подготовки рекомендуется познакомиться с указанной дополнительной литературой. Готовясь к семинару, студент должен, прежде всего, ознакомиться с общим планом семинарского занятия. Следует внимательно прочесть свой конспект лекции по изучаемой теме и рекомендуемую к теме семинара литературу. С незнакомыми терминами и понятиями следует ознакомиться в предлагаемом глоссарии, словаре или энциклопедии [5].

Критерии качества устного ответа.

1. Правильность ответа по содержанию.
2. Полнота и глубина ответа.
3. Сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала).
4. Логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться профессиональной терминологией).
5. Рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели).
6. Своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе).
7. Использование дополнительного материала (приветствуется, но не обязательно для всех студентов).

---

[5] Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://lesgaft.spb.ru/sites/default/files/u57/metod.rekomendacii_dlya_studentov_21.pdf

8. Рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов)[6].

Ответ на каждый вопрос из плана семинарского занятия должен быть содержательным и аргументированным. Для этого следует использовать документы, монографическую, учебную и справочную литературу.

Для успешной подготовки к устному опросу, студент должен законспектировать рекомендуемую литературу, внимательно осмыслить лекционный материал и сделать выводы. В среднем, подготовка к устному опросу по одному семинарскому занятию занимает от 2 до 4 часов в зависимости от сложности темы и особенностей организации обучающимся своей самостоятельной работы.

8. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

На практических занятиях необходимо стремиться к самостоятельному решению задач, находя для этого более эффективные методы. При этом студентам надо приучить себя доводить решения задач до конечного «идеального» ответа. Это очень важно для будущих

[6]Методические рекомендации для студентов [Электронный ресурс]: http://priab.ru/images/metod_agro/Metod_Inostran_yazyk_35.03.04_Agro_15.01.2016.pdf

специалистов. Практические занятия вырабатывают навыки самостоятельной творческой работы, развивают мыслительные способности.

Практическое занятие – активная форма учебного процесса, дополняющая теоретический курс или лекционную часть учебной дисциплины и призванная помощь обучающимся освоиться в «пространстве» (тематике) дисциплины, самостоятельно прооперировать теоретическими знаниями на конкретном учебном материале.

Продолжительность одного практического занятия – от 2 до 4 академических часов. Общая доля практических занятий в учебном времени на дисциплину – от 10 до 20 процентов (при условии, что все активные формы займут в учебном времени на дисциплину от 40 до 60 процентов).

Для практического занятия в качестве темы выбирается обычно такая учебная задача, которая предполагает не существенные эвристические и аналитические напряжения и продвижения, а потребность обучающегося «потрогать» материал, опознать в конкретном то общее, о чем говорилось в лекции. Например, при рассмотрении вопросов оплаты труда, мотивации труда и проблем безработицы в России имеет смысл провести практические занятия со следующими сюжетами заданий: «Расчет заработной платы работников предприятия». «Разработка механизма мотивации труда на предприятии N». «В чем причины и особенности безработицы в России?». Последняя тема предполагает уже некоторую аналитическую составляющую. Основная задача первой из этих тем - самим посчитать заработную плату для различных групп работников на примере заданных параметров для конкретного предприятия, т. е. сделать расчеты «как на практике»; второй – дать собственный вариант мотивационной политики для предприятия, учитывая особенности данного объекта, отрасли и т.д.; третьей – опираясь на теоретические знания в области проблем занятости и безработицы, а также статистические материалы, сделать авторские выводы о видах безработицы, характерных для России, и их причинах, а также предложить меры по минимизации безработицы.

Перед проведением занятия должен быть подготовлен специальный материал – тот объект, которым обучающиеся станут оперировать, активизируя свои теоретические (общие) знания и тем самым, приобретая навыки выработки уверенных суждений и осуществления конкретных действий.

Дополнительный материал для практического занятия лучше получить у преподавателя заранее, чтобы у студентов была возможность просмотреть его и подготовить вопросы.

Условия должны быть такими, чтобы каждый мог работать самостоятельно от начала до конца. В аудитории должны быть «под рукой» необходимые справочники и тексты законов и нормативных актов по тематике занятия. Чтобы сделать практическое занятие максимально эффективным, надо заранее подготовить и изучить материал по наиболее интересным и практически важным темам.

Особенности практического занятия с использованием компьютера

Для того чтобы повысить эффективность проведения практического занятия, может использоваться компьютер по следующим направлениям:

- поиск информации в Интернете по поставленной проблеме: в этом случае преподаватель представляет обучающимся перечень рекомендуемых для посещения Интернет-сайтов;
- использование прикладных обучающих программ;
- выполнение заданий с использованием обучающимися заранее установленных преподавателем программ;
- использование программного обеспечения при проведении занятий, связанных с моделированием социально-экономических процессов.

9.Методические рекомендации по подготовке семинарским занятиям

Семинар представляет собой комплексную форму и завершающее звено в изучении определенных тем, предусмотренных программой учебной дисциплины. Комплексность данной формы занятий определяется тем, что в ходе её проведения сочетаются выступления обучающихся и преподавателя: рассмотрение обсуждаемой проблемы и анализ различных, часто дискуссионных позиций; обсуждение мнений обучающихся и разъяснение (консультация) преподавателя; углубленное изучение теории и приобретение навыков умения ее использовать в практической работе.

По своему назначению семинар, в процессе которого обсуждается та или иная научная проблема, способствует:

- углубленному изучению определенного раздела учебной дисциплины, закреплению знаний;
- отработке методологии и методических приемов познания;
- выработке аналитических способностей, умения обобщения и формулирования выводов;
- приобретению навыков использования научных знаний в практической деятельности;
- выработке умения кратко, аргументированно и ясно излагать обсуждаемые вопросы;
- осуществлению контроля преподавателя за ходом обучения.

Семинары представляет собой дискуссию в пределах обсуждаемой темы (проблемы). Дискуссия помогает участникам семинара приобрести более совершенные знания, проникнуть в суть изучаемых проблем. Выработать методологию, овладеть методами анализа социально-экономических процессов. Обсуждение должно носить творческий характер с четкой и убедительной аргументацией.

По своей структуре семинар начинается со вступительного слова преподавателя, в котором кратко излагаются место и значение обсуждаемой темы (проблемы) в данной дисциплине, напоминаются порядок и направления ее обсуждения. Конкретизируется ранее известный обучающимся план проведения занятия. После этого начинается процесс обсуждения вопросов обучающимися. Завершается занятие заключительным словом преподавателя.

Проведение семинарских занятий в рамках учебной группы (20 - 25 человек) позволяет обеспечить активное участие в обсуждении проблемы всех присутствующих.

По ходу обсуждения темы помните, что изучение теории должно быть связано с определением (выработкой) средств, путей применения теоретических положений в практической деятельности, например, при выполнении функций государственного служащего. В то же время важно не свести обсуждение научной проблемы только к пересказу случаев из практики работы, к критике имеющих место недостатков. Дискуссии имеютважное значение: учат дисциплине ума, умению выступать по существу, мыслить логически, выделяя главное, критически оценивать выступления участников семинара.

В процессе проведения семинара обучающиеся могут использовать разнообразные по своей форме и характеру пособия (от доски смелом до самых современных технических средств), демонстрируя фактический, в том числе статистический материал, убедительно подтверждающий теоретические выводы и положения. В завершение обсудите результаты работы семинара и сделайте выводы, что хорошо усвоено, а над чем следует дополнительно поработать.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятельная подготовка к их проведению. В начале семестра (учебного года) возьмите в библиотеке необходимые методические материалы для своевременной подготовки к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обращать внимание на то, что необходимо

дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журналах, вновь вышедшие монографии и т.д.).

10.Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзаменов и зачетов

Экзамен - одна из важнейших частей учебного процесса, имеющая огромное значение. Во-первых, готовясь к экзамену, студент приводит в систему знания, полученные на лекциях, семинарах, практических и лабораторных занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. А это чрезвычайно важно для будущего специалиста.

Во-вторых, каждый хочет быть волевым и сообразительным., выдержанным и целеустремленным, иметь хорошую память, научиться быстро находить наиболее рациональное решение в трудных ситуациях. Очевидно, что все эти качества не только украшают человека, но и делают его наиболее действенным членом коллектива. Подготовка и сдача экзамена помогают студенту глубже усвоить изучаемые дисциплины, приобрести навыки и качества, необходимые хорошему специалисту.

Конечно, успех на экзамене во многом обусловлен тем, насколько систематически и глубоко работал студент в течение семестра. Совершенно очевидно, что серьезно продумать и усвоить содержание изучаемых дисциплин за несколько дней подготовки к экзамену просто невозможно даже для очень способного студента. И, кроме того, хорошо известно, что быстро выученные на память разделы учебной дисциплины так же быстро забываются после сдачи экзамена.

При подготовке к экзамену студенты не только повторяют и дорабатывают материал дисциплины, которую они изучали в течение семестра, они обобщают полученные знания, осмысливают методологию предмета, его систему, выделяют в нем основное и главное, воспроизводят общую картину с тем, чтобы яснее понять связь между отдельными элементами дисциплины. Вся эта обобщающая работа проходит в условиях напряжения воли и сознания, при значительном отвлечении от повседневной жизни, т. е. в условиях, благоприятствующих пониманию и запоминанию.

Подготовка к экзаменам состоит в приведении в порядок своих знаний. Даже самые способные студенты не в состоянии в короткий период зачетно-экзаменационной сессии усвоить материал целого семестра, если они над ним не работали в свое время. Для тех, кто мало занимался в семестре, экзамены принесут мало пользы: что быстро пройдено, то быстро и забудется. И хотя в некоторых случаях студент может «проскочить» через экзаменационный барьер, в его подготовке останется серьезный пробел, трудно восполняемый впоследствии.

Определив назначение и роль экзаменов в процессе обучения, попытаемся на этой основе пояснить, как лучше готовиться к ним.

Экзаменам, как правило, предшествует защита курсовых работ (проектов) и сдача зачетов. К экзаменам допускаются только студенты, защитившие все курсовые работы проекты) и сдавшие все зачеты. В вузе сдача зачетов организована так, что при систематической работе в течение семестра, своевременной и успешной сдаче всех текущих работ, предусмотренных графиком учебного процесса, большая часть зачетов не вызывает повышенной трудности у студента. Студенты, работавшие в семестре по плану, подходят к экзаменационной сессии без напряжения, без излишней затраты сил в последнюю, «зачетную» неделю.

Подготовку к экзамену следует начинать с первого дня изучения дисциплины. Как правило, на лекциях подчеркиваются наиболее важные и трудные вопросы или разделы дисциплины, требующие внимательного изучения и обдумывания. Нужно эти вопросы выделить и обязательно постараться разобраться в них, не дожидаясь экзамена, проработать их, готовясь к семинарам, практическим или лабораторным занятиям, попробовать самостоятельно решить несколько типовых задач. И если, несмотря на это, часть материала

осталась неусвоенной, ни в коем случае нельзя успокаиваться, надеясь на то, что это не попадется на экзамене. Факты говорят об обратном; если те или другие вопросы учебной дисциплины не вошли в экзаменационный билет, преподаватель может их задать (и часто задает) в виде дополнительных вопросов.

Точно такое же отношение должно быть выработано к вопросам и задачам, перечисленным в программе учебной дисциплины, выдаваемой студентам в начале семестра. Обычно эти же вопросы и аналогичные задачи содержатся в экзаменационных билетах. Не следует оставлять без внимания ни одного раздела дисциплины: если не удалось в чем-то разобраться самому, нужно обратиться к товарищам; если и это не помогло выяснить какой-либо вопрос до конца, нужно обязательно задать этот вопрос преподавателю на предэкзаменационной консультации. Чрезвычайно важно приучить себя к умению самостоятельно мыслить, учиться думать, понимать суть дела. Очень полезно после проработки каждого раздела восстановить в памяти содержание изученного материала. кратко записав это на листе бумаги. создать карту памяти (умственную карту), изобразить необходимые схемы и чертежи (логико-графические схемы), например, отобразить последовательность вывода теоремы или формулы. Если этого не сделать, то большая часть материала останется не понятой, а лишь формально заученной, и при первом же вопросе экзаменатора студент убедится в том, насколько поверхностно он усвоил материал.

В период экзаменационной сессии происходит резкое изменение режима работы, отсутствует посещение занятий по расписанию. При всяком изменении режима работы очень важно скорее приспособиться к новым условиям. Поэтому нужно сразу выбрать такой режим работы, который сохранился бы в течение всей сессии, т. е. почти на месяц. Необходимо составить для себя новый распорядок дня, чередуя занятия с отдыхом. Для того чтобы сократить потерю времени на включение в работу, рабочие периоды целесообразно делать длительными, разделив день примерно на три части: с утра до обеда, с обеда до ужина и от ужина до сна.

Каждый рабочий период дня надо заканчивать отдыхом. Наилучший отдых в период экзаменационной сессии - прогулка, кратковременная пробежка или какой-либо неутомительный физический труд.

При подготовке к экзаменам основное направление дают программа учебной дисциплины и студенческий конспект, которые указывают, что наиболее важно знать и уметь делать. Основной материал должен прорабатываться по учебнику (если такой имеется) и учебным пособиям, так как конспекта далеко недостаточно для изучения дисциплины, Учебник должен быть изучен в течение семестра, а перед экзаменом сосредоточьте внимание на основных, наиболее сложных разделах. Подготовку по каждому разделу следует заканчивать восстановлением по памяти его краткого содержания в логической последовательности.

За один - два дня до экзамена назначается консультация. Если ее правильно использовать, она принесет большую пользу. Во время консультации студент имеет полную возможность получить ответ на нее ни ясные ему вопросы. А для этого он должен проработать до консультации все темы дисциплины. Кроме того, преподаватель будет отвечать на вопросы других студентов, что будет для вас повторением и закреплением знаний. И еще очень важное обстоятельство: преподаватель на консультации, как правило, обращает внимание на те вопросы, по которым на предыдущих экзаменах ответы были неудовлетворительными, а также фиксирует внимание на наиболее трудных темах дисциплины. Некоторые студенты не приходят на консультации либо потому, что считают, что у них нет вопросов к преподавателю, либо полагают, что у них и так мало времени и лучше самому прочитать материал в конспекте или и учебнике. Это глубокое заблуждение. Никакая другая работа не сможет принести столь значительного эффекта накануне экзамена, как консультация преподавателя.

Но консультация не может возместить отсутствия длительной работы в течение семестра и помочь за несколько часов освоить материал, требующийся к экзамену. На

консультации студент получает ответы на трудные или оставшиеся неясными вопросы и, следовательно, дорабатывается материал. Консультации рекомендуется посещать, подготовив к ним все вопросы, вызывающие сомнения. Если студент придет на консультацию, не проработав всего материала, польза от такой консультации будет невелика.

Очень важным условием для правильного режима работы в период экзаменационной сессии является нормальным сон. Подготовка к экзамену не должна идти в ущерб сну, иначе в день экзамена не будет чувства свежести и бодрости, необходимых для хороших ответов. Вечер накануне экзамена рекомендуем закончить небольшой прогулкой.

Итак, *основные советы* для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов состоят в следующем:

- лучшая подготовка к зачетам и экзаменам - равномерная работа в течение всего семестра;
- используйте программы учебных дисциплин - это организует вашу подготовку к зачетам и экзаменам;
- учитывайте, что для полноценного изучения учебной дисциплины необходимо время;
- составляйте планы работы во времени;
- работайте равномерно и ритмично;
- курсовые работы (проекты) желательно защищать за одну - две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии;
- все зачеты необходимо сдавать до начала экзаменационной сессии;
- помните, что конспект не заменяет учебник и учебные пособия, а помогает выбрать из него основные вопросы и ответы;
- при подготовке наибольшее внимание и время уделяйте трудным и непонятным вопросам учебной дисциплины;
- грамотно используйте консультации;
- соблюдайте правильный режим труда и отдыха во время сессии, это сохранит работоспособность и даст хорошие результаты;
- учитесь владеть собой на зачете и экзамене;
- учитесь точно и кратко передавать свои мысли, поясняя их, если нужно,логико-графическими схемами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы обучающихся являются неотъемлемой частью процесса обучения в вузе. Правильная организация самостоятельной работы позволяет обучающимся развивать умения и навыки в усвоении и систематизации приобретаемых знаний, обеспечивает высокий уровень успеваемости в период обучения, способствует формированию навыков совершенствования профессионального мастерства. Также внеаудиторное время включает в себя подготовку к аудиторным занятиям и изучение отдельных тем, расширяющих и углубляющих представления обучающихся по разделам изучаемой дисциплины.

Таким образом, обучающийся используя методические указания может в достаточном объеме усвоить и успешно реализовать конкретные знания, умения, навыки и получить опыт при выполнении следующих условий:

1) систематическая самостоятельная работа по закреплению полученных знаний и навыков;

2) добросовестное выполнение заданий;

3) выяснение и уточнение отдельных предпосылок, умозаключений и выводов, содержащихся в учебном курсе;

4) сопоставление точек зрения различных авторов по затрагиваемым в учебном курсе проблемам; выявление неточностей и некорректного изложения материала в периодической и специальной литературе;

5) периодическое ознакомление с последними теоретическими и практическими достижениями;

6) проведение собственных научных и практических исследований по одной или нескольким актуальным проблемам;

7) подготовка научных статей для опубликования в периодической печати, выступление на научно-практических конференциях, участие в работе студенческих научных обществ, круглых столах и диспутах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брандес М. П. Немецкий язык. Переводческое реферирование: практикум. М.: КДУ, 2008. – 368 с.

2. Долгоруков А. Метод case-study как современная технология профессионально -ориентированного обучения [Электронный ресурс]. Режим доступа: //http://evolkov.net/case/case.study.html/

3. Методические рекомендации по написанию реферата. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.hse.spb.ru/edu/recommendations/method-referat-2005.phtml

4. Фролова Н. А. Реферирование и аннотирование текстов по специальности (на материале немецкого языка): Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. - С.5.

5. Методические рекомендации по написанию

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Б1.О.25 ХИМИЯ

Направление подготовки
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль) подготовки

Кадастр недвижимости

Одобрено на заседании кафедры	Рассмотрено методической комиссией
Химии	Горно-технологического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Амдур А.М.	Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол №1 от 08.09.2023	Протокол №2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

ВВЕДЕНИЕ

Качественная реакция – химическая реакция, с помощью которой можно определить наличие в растворе того или иного вещества или его фрагмента (катиона, аниона, функциональной группы). Качественная реакция на ионы позволяет обнаружить («открыть») в растворе присутствие соответствующих ионов. При обнаружении открываемого иона обычно фиксируют появление аналитического сигнала — образование осадка, изменение окраски раствора, появление запаха и т. д.

Требования к качественным реакциям

1. Экспрессность (реакция должна протекать быстро).
2. Высокая чувствительность.
3. Селективность или специфичность.
4. Необратимость.

Чувствительность реакции определяется наименьшим количеством искомого вещества, которое может быть обнаружено данным реактивом в капле раствора.

Существенной характеристикой анализа является селективность (избирательность).

По избирательности реагенты можно разделить на три группы:

1. *Специфические реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить только одно вещество (ион),

например: крахмал для обнаружения I_2 (синяя окраска); щёлочь для обнаружения NH^{4+} (запах аммиака).

Специфические реакции – реакции, которые дают возможность открывать одни ионы в присутствии различных других ионов.

2. *Селективные реагенты* – реактивы, с помощью которых в данных условиях можно обнаружить небольшое число веществ. Например, диметилглиоксим в аммиачном буферном растворе реагирует с Fe (II), Co (II), Ni (II), Zr (IV), Th (IV).

3. *Групповые реагенты* – используются в систематическом анализе смеси катионов и взаимодействуют со всеми катионами одной аналитической группы.

Реакции, позволяющие обнаружить искомые ионы в отдельных порциях сложной смеси при условии устранения влияния других ионов, называют **дробными реакциями**, а метод анализа, основанный на применении дробных реакций, называют **дробным анализом.** При этом порядок обнаружения катионов и анионов не имеет особого значения. При **систематическом анализе**, в отличие от дробного, соблюдается определенный порядок разделения и последующего открытия ионов. К обнаружению ионов приступают лишь после удаления из раствора всех других ионов, мешающих открытию. Систематический (групповой) анализ применяют при невозможности использования дробного анализа. На основе растворимости их солей или других соединений ионы делят на аналитические группы, на основании различных классификаций катионов разработаны разные методы систематического анализа катионов.

Методы систематического анализа

1. Сероводородный – основан на разной растворимости сульфидов и хлоридов в зависимости от *pH*-среды.

2. Аммиачно-фосфатный – основан на разной растворимости фосфатов.

3. Кислотно-основной – основан на разной растворимости в кислотах и основаниях гидроксидов и солей (табл. 1).

Таблица 1

Классификация катионов по кислотно-основному методу

Группа	Катионы	Групповой реактив	Характеристика группы
I	Na^+, K^+, NH_4^+	–	Хлориды, сульфаты и гидроксиды растворимы в воде
II	Ag^+, Pb^{2+}, Hg_2^{2+}	2M HCl	Хлориды нерастворимы в воде и разбавленных кислотах
III	Ca^{2+}, Sr^{2+}, Ba^{2+}	2M H_2SO_4	Сульфаты нерастворимы в воде, кислотах и щелочах
IV	$A1^{3+}$, Cr^{3+}, Zn^{2+}, $^*As^{3+}$, $^*As^{5+}$, Sn^{2+}, Sn^{4+}	4M NaOH (избыток)	Гидроксиды амфотерны, растворимы в избытке щелочи
V	Fe^{2+}, Fe^{3+}, Mn^{2+}, Mg^{2+}, Bi^{3+}, Sb^{3+}, Sb^{5+}	2M NaOH (25 % NH_4OH)	Гидроксиды нерастворимы в избытке щелочи и аммиаке
VI	Cu^{2+}, Co^{2+}, Ni^{2+}, Hg^{2+}, Cd^{2+}	25% NH_4OH (избыток)	Гидроксиды растворимы в избытке аммиака с образованием аммиакатов

$^*As^{3+}$ и As^{5+} гидроксидов не образуют.

Лабораторная работа № 1

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на катионы железа, определить наиболее подходящие реактивы для открытия Fe^{3+} и Fe^{2+}.

Для получения аналитического сигнала в качественном анализе используют химические реакции разных типов: реакции ионного обмена (осаждение, нейтрализация), окислительно-восстановительные, комплексообразование. Для обнаружения ионов железа возможно использование всех типов реакций.

Реакции ионного обмена в качественном анализе

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора щёлочи в каждую пробирку. Сравните полученные осадки $Fe(OH)_3$ и $Fe(OH)_2$, составьте уравнения обеих реакций. Растворимы ли полученные гидроксиды железа в избытке щёлочи?

Опыт 2. Действие раствора аммиака на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл разбавленного раствора гидроксида аммония в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с

осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций. Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на оба осадка: образуют ли ионы железа аммиачные комплексы?

Реакции окисления-восстановления

Опыт 3. Действие окислителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

а) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор перманганата калия, в какой из них наблюдается обесцвечивание $KMnO_4$? Запишите уравнение реакции, учитывая, что в кислой среде перманганат-ионы восстанавливаются до ионов Mn^{2+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

б) В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 2 мл раствора серной кислоты. В обе пробирки прилейте раствор бихромата калия, в какой из них наблюдается изменение окраски раствора? Запишите уравнение реакции, учитывая, что бихромат-ионы $Cr_2O_7^{2-}$ восстанавливаются до ионов Cr^{3+}, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

Опыт 4. Действие восстановителей на катионы Fe^{3+} и Fe^{2+}

В две пробирки налейте по 1 мл растворов солей Fe^{2+} и Fe^{3+}, добавьте по 1 мл раствора йодида калия. Какая из солей железа проявила окислительный свойства? Запишите уравнение реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Реакции с участием комплексных ионов

Опыт 5. Реакция ионов железа с роданидом аммония

В две пробирки налейте по 1 мл раствора $FeCl_3$ и $FeSO_4$, добавьте по 1 мл раствора роданида аммония NH_4SCN в каждую пробирку. В какой из пробирок наблюдается образование роданида железа красного цвета? Составьте уравнение реакции.

Опыт 6. Реакция ионов железа с реактивом Чугаева

В две пробирки налейте по 1 мл раствора соли железа (III) и железа (II), добавьте по 1 мл раствора аммиака и по 1 капле раствора диметилглиоксима ($C_4H_8N_2O_2$). Для какого иона железа наблюдается образование окрашенного внутрикомплексного соединения с реактивом Чугаева? Составьте уравнение реакции образования диметилглиоксимата железа [Fe ($C_4H_7O_2N_2)_2$].

Опыт 7. Берлинская лазурь и турнбуллева синь

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора жёлтой кровяной соли (гексацианоферрата (II) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок берлинской лазури имеет состав $Fe_4[Fe(CN)_6]_3$.

На растворы $FeCl_3$ и $FeSO_4$ подействуйте каплей раствора красной кровяной соли (гексацианоферрата (III) калия). В каком случае наблюдается выпадение синего осадка? Запишите уравнение реакции, предполагая, что выпавший осадок турнбуллевой сини

имеет состав Fe_3 [Fe $(CN)_6]_3$. Сделайте вывод, какой кровяной солью можно открыть ион Fe^{2+}, и с помощью какой обнаруживается ион Fe^{3+}.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что произойдет с зеленоватым осадком Fe $(OH)_2$ при добавлении к нему раствора перекиси водорода H_2O_2? Запишите уравнение реакции, уравняйте его методом электронно-ионного баланса.

2. Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeCl_3$ и NaOH, если ПР (Fe $(OH)_3$) = $3{,}8 \cdot 10^{-38}$, а концентрации растворов 0,001 моль/л? Выпадет ли осадок при смешивании равных объемов растворов $FeSO_4$ и NaOH, если ПР (Fe $(OH)_2$) = $4{,}8 \cdot 10^{-16}$, а концентрации обоих растворов 0,001 моль/л?

3. Какой объём соляной кислоты с концентрацией 0,01 моль/л требуется для полного растворения осадка Fe $(OH)_3$ массой 0,5 г?

4. Реакция образования окрашенного роданида железа (опыт 3) является обратимой. Запишите выражение для константы равновесия этой реакции. Какими способами, согласно принципу Ле-Шателье, можно сместить равновесие в сторону образования окрашенного продукта?

5. Запишите уравнения реакций первичной и вторичной диссоциации красной и жёлтой кровяных солей. Почему чаще всего именно цианид-ионы используются для маскирования ионов железа в растворах?

6. Подвергаются ли соли железа гидролизу? Запишите уравнения взаимодействия с водой для $FeCl_3$ и $FeSO_4$, определите тип гидролиза и кислотность среды раствора. Какую окраску приобретёт лакмус в этих растворах?

Лабораторная работа № 2

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы **Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}**, выполняемыми пробирно, капельно, и с использованием экстракции, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Предел обнаружения – минимальная концентрация или минимальное количество вещества, которое может быть обнаружено данным методом допустимой погрешностью. Предел обнаружения в значительной степени зависит от условий протекания реакции. Обычно для обнаружения ионов применяют реакции с пределом обнаружения 10^{-7} г (0,1мкг) в 1 мл раствора.

Приемы для обеспечения низкого предела обнаружения

1. *Капельный анализ* – метод микрохимического анализа, в котором качественную реакцию проводят с использованием капли раствора. Реакции выполняют на стеклянной или фарфоровой пластинке, фильтровавальной бумаге (иногда предварительно пропитанной раствором реагента и высушенной). Пределы обнаружения веществ 0,1–0,001 мкг в капле объемом 50 мм^3. Минимальные пределы обнаружения достигаются при выполнении анализа на фильтровальной бумаге.

2. *Микрокристаллоскопический анализ* – метод анализа, основанный на реакциях образования кристаллических осадков с

характерной формой кристаллов, для рассмотрения которых используется микроскоп.

3. *Экстракция* – процесс переведения вещества из водной фазы в органическую, используется для разделения и концентрирования веществ.

4. *Флотация* – процесс разделения мелких твёрдых частиц в водной суспензии или растворе, основанный на их избирательной адсорбции на границах раздела фаз в соответствии с их смачиваемостью, используется для разделения и концентрирования.

5. *Метод «умножающихся реакций»* – ряд последовательных реакций, в результате которых получается новое вещество в количестве, во много раз превышающем первоначальное количество обнаруживаемого вещества.

6. *Каталитические реакции*.

Реакции в пробирке (в растворе)

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку. Составьте уравнения реакций образования синего CoOHCl, голубого CuOHCl и зелёного NiOHCl. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком концентрированной щёлочи, составьте уравнения реакций образования гидроксидов кобальта (II), никеля (II) и меди (II).

Опыт 2. Действие раствора аммиака на Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки, запишите уравнения реакций, учитывая, что в аммиачных комплексах кобальта и никеля координационное число комплексообразователя равно шести, а медь удерживает только четыре лиганда.

Разрушаются ли полученные аммиакаты раствором кислоты?

Опыт 3. Реакции с желтой кровяной солью

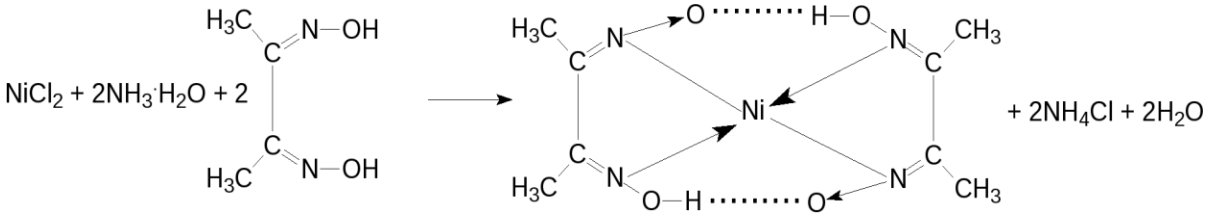
В три пробирки налейте по 1 мл растворов солей Co^{2+}, Ni^{2+} и Cu^{2+}, добавьте по 1 мл разбавленного раствора гексацианоферрата (II) калия в каждую пробирку. Что наблюдается? Составьте уравнения реакций, учитывая, что все осадки получены в результате полного ионного обмена.

Капельные реакции на фильтровальной бумаге

Опыт 4. Реакция катионов Ni^{2+} с реактивом Чугаева

На сухую фильтровальную бумагу поместите несколько капель раствора соли никеля (II), добавьте каплю раствора аммиака и каплю раствора диметилглиоксима $C_4H_8N_2O_2$ (реактив Чугаева). Сравните наблюдаемый аналитический сигнал с реакцией образования

диметилглиоксимата железа (II), выполненной в предыдущей работе. Запишите уравнение реакции



Проведите аналогичную реакцию с растворами меди (II) и кобальта (II). Какой из этих ионов может мешать определению ионов никеля и почему?

Опыт 5. Капельная реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите на сухую фильтровальную бумагу несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли NH_4SCN, при необходимости добавьте ещё одну каплю раствора. Как изменилась окраска кристаллов? Составьте уравнение реакции образования комплексного соединения $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$.

Обнаружение катионов с использованием экстракции

Опыт 6. Реакция ионов Co^{2+} с роданидом аммония

Поместите в пробирку несколько капель раствора хлорида кобальта (II), добавьте кристаллы сухой соли тиоцианата (роданида) аммония. Как изменилась окраска раствора?

Чувствительность этой реакции можно повысить с помощью экстракции окрашенного комплекса $(NH_4)_2[Co(SCN)_4]$ органическим растворителем. Добавьте к полученному раствору несколько капель изоамилового спирта, взболтайте. Дождитесь разделения в пробирке водной и спиртовой фаз. Что при этом наблюдается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения реакций первичной и вторичной диссоциаций гексаамминкобальта (II), гексаамминникеля (II), тетраамминмеди (II). Запишите формулы для константы нестойкости.

2. Для открытия ионов Ni^{2+} с помощью диметилглиоксима при реакции на капельной пластинке предел обнаружения Ni^{2+} – 0,16 мкг; в пробирке можно обнаружить 1,4 мкг Ni^{2+} в 1 мл. Предел обнаружения можно уменьшить до 0,015 мкг, если каплю анализируемого раствора нанести на фильтровальную бумагу, пропитанную диметилглиоксимом. Если осадок диметилглиоксимата никеля (II) флотируется на границе раздела фаз «вода – изоамиловый спирт», то предел обнаружения ионов Ni^{2+} понижается до 0,002 мкг. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Ni^{2+}, открываемых каждым из способов.

3. Окисление тиосульфат-ионов ионами железа (III) ускоряется в присутствии ионов меди (каталитическая реакция). Время обесцвечивания тиоцианата железа (III) тиосульфатом натрия в отсутствие меди около двух минут. В присутствии ионов Cu^{2+} раствор тиоцианата железа (III) обесцвечивается мгновенно. Предел обнаружения меди – 0,02мкг в 1 мл. Определите минимальную молярную концентрацию ионов Cu^{2+}, соответствующую этому пределу обнаружения.

Лабораторная работа № 3

КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ $A1^{3+}$, Cr^{3+}, Zn^{2+}

Цель работы: познакомиться с качественными реакциями на ионы **$A1^{3+}$, Cr^{3+}** и **Zn^{2+}**, научиться использовать амфотерность их гидроксидов в химическом анализе, определить наиболее подходящие реакции для открытия каждого иона.

Для проведения каждой качественной реакции необходимо соблюдать определенные условия, основные из которых: *pH*-среды; температура; концентрации реагентов; присутствие определенных веществ; отсутствие мешающих ионов или веществ. Для протекания многих реакций необходима среда с определенным значением *pH* водного раствора. Значение *pH* можно контролировать с помощью индикаторов или прибора *pH*-метра. Для поддержания нужного значения *pH* при необходимости используют соответствующие буферные растворы.

Буферные растворы — это растворы, способные сохранять постоянное значение *pH* при разбавлении водой или добавлении к ним определенного количества сильных кислот или оснований. В состав буферной смеси входят в определенном количественном соотношении слабые кислоты и их соли с сильными основаниями или слабые основания и их соли с сильными кислотами.

Амфотерность гидроксидов алюминия, цинка и хрома (III) позволяет отделять их от остальных катионов действием растворов щелочей различной концентрации.

Опыт 1. Действие щелочей на катионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по несколько капель очень разбавленного раствора щёлочи в каждую пробирку до образования нерастворимых гидроксидов. Составьте уравнения реакций. Подействуйте на каждый полученный осадок избытком щёлочи до полного растворения, составьте уравнения реакций образования тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

Опыт 2. Действие раствора аммиака на ионы Al^{3+}, Cr^{3+}, Zn^{2+}

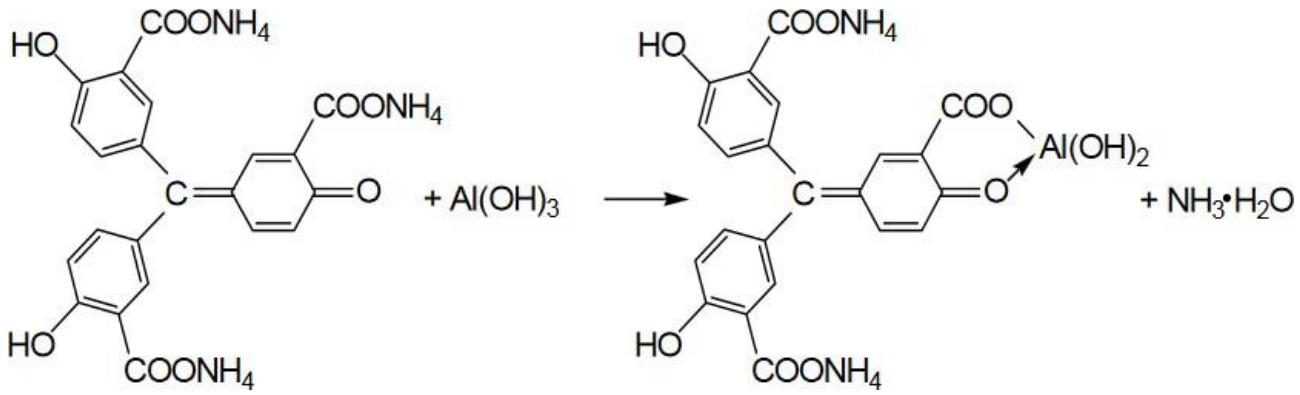
В три пробирки налейте по 1 мл растворов хлоридов алюминия, хрома и цинка, добавьте по 1 мл разбавленного раствора аммиака в каждую пробирку. Сравните полученные осадки с осадками из первого опыта. Составьте уравнения реакций образования соответствующих гидроксидов.

Проверьте действие избытка концентрированного гидроксида аммония на полученные осадки. Какие гидроксиды растворяются частично или полностью? Составьте реакцию комплексообразования, учитывая, что в образующихся аммиакатных комплексах координационное число каждого комплексообразователя вдвое больше, чем модуль его степени окисления.

Опыт 3. Реакция ионов алюминия с алюминоном

В пробирку поместите 3–4 капли раствора соли алюминия, при необходимости 2–3 капли раствора уксусной кислоты и 3–5 капель 0,01 % раствора алюминона ($C_{21}H_{11}O_9(NH_4)_3$). Смесь нагрейте на

водяной бане, добавьте несколько капель раствора аммиака до щелочной реакции и выпадения красного хлопьевидного осадка алюминиевого лака.



Опыт 4. Реакция ионов цинка с желтой кровяной солью

В пробирке к 1 мл раствора $ZnCl_2$ добавьте 1 мл раствора гексацианоферрата (II) калия. Наблюдайте выпадение белого осадка $K_2Zn_3[Fe(CN)_6]_2$. Составьте уравнение этой реакции ионного обмена.

Опыт 5. Восстановительные свойства ионов хрома (III)

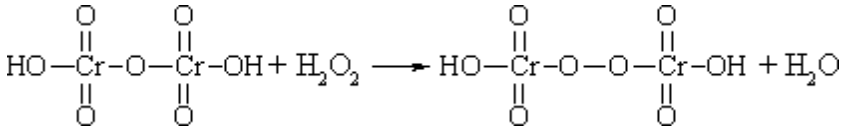
В пробирку поместите 2–3 капли раствора соли хрома(III), прибавьте 4–5 капель 2 моль/л раствора щёлочи NaOH до растворения осадка, и 2–3 капли 3 % раствора перекиси водорода H_2O_2. Нагревайте до изменения зеленой окраски раствора на желтую (цвет хромат-ионов CrO_4^{2-}). Составьте уравнение окислительно- восстановительной реакции, расставьте коэффициенты методом электронно-ионного баланса.

Опыт 6. Образование надхромовой кислоты

К жёлтому раствору хромата натрия, полученному в предыдущем опыте, прибавьте 5 капель пероксида водорода H_2O_2,

~0,5 мл изоамилового спирта, тщательно перемешайте и прибавьте по каплям раствор серной кислоты (1 моль/л). Верхний органический слой окрашивается в интенсивно синий цвет за счёт экстракции образовавшейся надхромовой кислоты H_2CrO_6. Запишите уравнение реакции, протекающее через образование дихромовой кислоты и её последующее окисление перекисью водорода:

$$2Na_2CrO_4+2H_2SO_4 \rightarrow H_2Cr_2O_7+2Na_2SO_4+H_2O$$



$$H_2Cr_2O_8 + 3\ H_2O_2 \leftrightarrow 2\ H_2CrO_6 + 2\ H_2O$$

Составьте электронно-ионный баланс для этой реакции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Составьте уравнения первичной и вторичной диссоциации солей, полученных в первом опыте: тетрагидроксоалюмината, тетрагидроксоцинката и гексагидроскохромата натрия.

2. Напишите выражение константы нестойкости для комплексных ионов тетраамминцинка и гексаамминхрома, полученных во втором опыте.

3. Напишите уравнения диссоциаций хромовой, дихромовой и надхромовой кислот.

Лабораторная работа № 4

РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^+, Pb^{2+}, Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ

Цель работы: познакомиться с разделением и идентификацией катионов методом бумажной хроматографии

Хроматография – физико–химический метод разделения веществ, основанный на использовании сорбционных процессов в динамических условиях.

Анализируемые компоненты распределяются между подвижной и неподвижной фазами. Неподвижной фазой служит твердое вещество – сорбент. Подвижной фазой является жидкость или газ, протекающий через неподвижную фазу – элюент. Элюент в процессе хроматографирования перемещается вдоль сорбента, так что частицы анализируемых веществ могут многократно переходить из подвижной фазы в неподвижную и наоборот. Разделение веществ с помощью хроматографии основано на различном сродстве разделяемых компонентов к подвижной и неподвижной фазам.

Бумажная хроматография – вид хроматографии, в котором носителем неподвижного растворителя служит очищенная от примесей фильтровальная бумага. Подвижная фаза продвигается вдоль листа бумаги, главным образом за счет капиллярных сил. Бумажная хроматография отличается простотой, экспрессностью, наглядностью разделения, высокой чувствительностью (можно определить 10–20 мкг вещества с точностью 5–7 %).

Опыт 1. Подготовка фильтровальной бумаги

Два фильтра «синяя лента» диаметром 45 мм смочите 5 %-м раствором йодида калия, опуская фильтры в раствор пинцетом. Высушите фильтры на воздухе в чашке Петри.

Опыт 2. Получение первичной осадочной хроматограммы

В центр каждого высушенного фильтра нанесите пипеткой каплю анализируемой смеси катионов Ag^+, Hg^{2+} и Pb^{2+}, после её полного впитывания нанесите еще одну, дайте ей впитаться. Катионы анализируемой смеси вступают в реакцию с KI, которым пропитан фильтр, образуя осадочную хроматограмму, зоны которой имеют цвета осадков AgJ (жёлтый), HgJ_2 (оранжевый), PbJ_2 (ярко-желтый).

Полученные хроматограммы необходимо промыть дистиллированной водой. Для промывания хроматограмм нанесите на фильтры 2–3 капли дистиллированной воды, внося каждую последующую каплю после впитывания предыдущей до увеличения размера зон в два–три раза. Высушите обе осадочные хроматограммы, заполните табл. 1, составьте уравнения реакций образования осадков.

Таблица 1

Первичная хроматограмма смеси катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (края фильтра)		

Опыт 3. Получение проявленной осадочной хроматограммы

Анализируя первичную хроматограмму, легко определить катионы Hg^{2+} (оранжевая зона в центре) и Pb^{2+} (ярко-желтая зона по периферии). Бледно-желтая окраска AgJ либо видна плохо (из-за маскировки оранжевым HgJ_2 и ярко-желтым PbJ_2), либо не видна совсем. Для того, чтобы явно видеть зону серебра, первичную хроматограмму на одном из фильтров необходимо проявить.

Для проявления хроматограммы внесите в центр фильтра каплю раствора NaOH. При этом йодид свинца растворится в NaOH с образованием бесцветного плюмбита натрия Na_2PbO_2, йодид ртути останется неизменным, бледно-жёлтое пятно йодида серебра постепенно почернеет вследствие превращения гидроксида серебра (I) в оксид серебра (I), который затем разложится до свободного серебра.

Заполните табл. 2, составьте уравнения всех протекающих при проявке первичной хроматограммы реакций.

Таблица 2

Вторичная хроматограмма смеси катионов Ag^+, Hg^{2+}, Pb^{2+}

Зона адсорбции	Цвет зоны	Ион
1. Первая – хорошая адсорбция (в центре фильтра)		
2. Вторая – средняя адсорбция		
3. Третья – плохая адсорбция (край фильтра)		

По результатам работы сделайте вывод об эффективности метода бумажной хроматографии для дробного открытия катионов Ag^{+}, Hg^{2+}, Pb^{2+} при их совместном присутствии.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие процессы лежат в основе хроматографического анализа?

2. Вычислите ПР йодида свинца (II), если известно, что растворимость его равна 0,03 г на 0,1 кг воды.

3. Выпадет ли осадок при взаимодействии равных объемов растворов $AgNO_3$ и KI, если концентрации обоих растворов 0,001 моль/л, а произведение растворимости йодида серебра ПР (AgI) $=8{,}3\cdot10^{-17}$.

4. В избытке йодида калия осадок йодида ртути (II) растворяется без изменения степеней окисления элементов с образованием комплексного соединения тетрайодомеркурата калия. Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

5. Оксид серебра (I) неустойчив на воздухе, поэтому он используется не в чистом виде, а в аммиачном растворе (реактив Толленса). При взаимодействии гидроксида аммония и оксида серебра (I) образуется гидроксид диамминсеребра (I). Составьте уравнение этой реакции, а также уравнения первичной и вторичной диссоциаций полученного соединения, запишите выражение для константы нестойкости комплексного иона.

6. Дайте определения терминам «элюент», «сорбент», «элюат», «подвижная фаза», «неподвижная фаза», «собрция», «десорбция».

Лабораторная работа № 5

ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ

Цель работы: с помощью качественных реакций определить, какая соль находится в каждой пробирке.

Ход работы

В двенадцати пронумерованных пробирках находятся следующие растворы соли:

Раствор бесцветный	**Раствор может быть окрашенным**
Хлорид аммония	Сульфат меди (II)
Хлорид кальция	Хлорид кобальта (II)
Сульфат марганца (II)	Хлорид никеля (II)
Сульфат железа (II)	Хлорид хрома (III)
Хлорид цинка	Хлорид железа (III)
Хлорид алюминия	
Нитрат свинца (II)	

После получения у преподавателя нескольких пробирок (по вариантам 3–6 шт.,) составьте в тетради таблицу для записи результатов анализа:

Качественный анализ растворов, номер (№) (запишите номера пробирок)

Испытуемый раствор	Добавленный реагент	Наблюдение	Предполагаемый состав	Вывод
Опыт № 1 «Открытие окрашенных ионов»				
№ 13	отсуствует	Раствор розовый	Ионы Co^{2+}	
№ 13	NaOH	Выпал синий осадок, при добавлении избытка щёлочи стал розовым	CoOHCl $Co(OH)_2$	В пробирке был $CoCl_2$
Опыт № 2 «Действие щелочей»				
№ 14				

Опыт 1. Открытие окрашенных ионов

Опишите внешний вид растворов, сделайте предположения, какие растворы могут быть в каждой из пробирок, занесите их в таблицу. Наиболее вероятные предположения (для окрашенных растворов) проверьте с помощью соответствующих качественных реакций, взяв для анализа небольшую порцию испытуемого раствора. Составьте уравнения реакций, сделайте выводы.

Опыт 2. Действие щелочей на испытуемые растворы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором щёлочи, добавляя его по каплям. Занесите в таблицу аналитический сигнал: выделился запах аммиака, выпал неизменяющийся осадок, выпал осадок, растворимый в избытке щёлочи или темнеющий на воздухе. Обратите внимание, что гидроксид свинца $Pb(OH)_2$ проявляет амфотерные свойства, растворяясь в избытке щелочи с образованием плюмбита Na_2PbO_2, а светло-бежевый гидроксид марганца $Mn(OH)_2$ постепенно окисляется кислородом воздуха, что выглядит как потемнение раствора на границе с воздухом:

$$2\ Mn(OH)_2 + O_2 \rightarrow 2\ MnO_2\downarrow + 2\ H_2O.$$

Эту реакцию можно сделать более наглядной, ускорив процесс окисления с помощью перекиси водорода:

$$Mn(OH)_2 + H_2O_2 \rightarrow MnO_2\downarrow + 2\ H_2O.$$

Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций, для ионов Mn^{2+} кроме реакции с H_2O_2 можно использовать

ОВР с окислением марганца до розовых перманганат-ионов висмутатом натрия в сильнокислой среде:

$$2MnSO_4+5NaBiO_3+16HNO_3 \rightarrow$$

$$2HMnO_4+5Bi(NO_3)_3+NaNO_3+2Na_2SO_4+7H_2O.$$

Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 3. Действие раствора аммиака на испытуемые пробы

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), подействуйте на них разбавленным раствором аммиака. Занесите в таблицу аналитический сигнал. Сделайте предположения о том, какие катионы находятся в пробирках. Проверьте предположения с помощью качественных реакций. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

Опыт 4. Открытие неокрашенных ионов

Взяв пробы оставшихся исследуемых растворов (по 0,5 мл), проведите качественный анализ на катионы, которые остались не открытыми. Сделайте выводы, запишите уравнения выполненных реакций.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ»

1. Две соли окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Одна из них бесцветна, и при лёгком нагревании её с концентрированной серной кислотой отгоняется жидкость, в которой растворяется медь; последнее превращение сопровождается выделением бурого газа. При добавлении к раствору второй соли раствора серной кислоты жёлтая окраска раствора изменяется на оранжевую, а при нейтрализации полученного раствора щёлочью восстанавливается первоначальный цвет. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

2. В двух сосудах находятся растворы неизвестных веществ. При добавлении к раствору первого вещества хлорида бария выпадает осадок белого цвета, нерастворимый в воде и кислотах. Осадок белого цвета выпадает также и при добавлении раствора нитрата серебра к пробе, отобранной из второго сосуда. При нагревании пробы первого раствора с гидроксидом натрия выделяется газ с резким запахом. При взаимодействии второго раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Напишите уравнения описанных реакций.

3. Действием концентрированной серной кислоты на белые кристаллы при нагревании получен газ. При пропускании этого газа через раствор нитрата серебра выпал белый творожистый осадок. Кристаллы окрашивают пламя спиртовки в жёлтый цвет. Какая соль была взята для реакции? Приведите её формулу и название. Запишите уравнения реакций, описанных в тексте.

4. Порошкообразное вещество белого цвета окрашивает пламя горелки в оранжево-красный цвет. При действии соляной кислоты «вскипает» с выделением тяжёлого газа без цвета и запаха. Это вещество способно растворяться в воде при одновременном пропускании избытка углекислого газа. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

5. Некоторое кристаллическое вещество, окрашивающее пламя в жёлтый цвет, хорошо растворяется в воде. При добавлении к этому раствору нитрата серебра выпадает жёлтый осадок, не растворимый в разбавленной азотной кислоте. При действии на исходный раствор бромной воды образуется коричневое окрашивание. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

6. Для определения качественного состава белый, нерастворимый в воде порошок с зеленоватым оттенком подвергли

термическому разложению, в результате которого образовалось два оксида. Один из них — порошок чёрного цвета, при добавлении к которому раствора серной кислоты и последующем нагревании образовался раствор голубого цвета. Про другой известно, что это газ тяжелее воздуха, без цвета и запаха, играющий важную роль в процессе фотосинтеза. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

7. Для проведения исследования бесцветные кристаллы соли, которые при непродолжительном нахождении на воздухе приобрели голубой цвет, нагрели до выделение бурого газа и образование чёрного порошка. При пропускании над нагретым полученным порошком водорода наблюдалось появление красного налёта простого вещества — металла. Известно, что металл, образующий катион, входит в состав многих сплавов, например бронзы. Запишите химическую формулу и название исследованной соли. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования его свойств.

8. Для изучения состава соли был взят раствор, который разделили на две части. К первой части этого раствора добавили хлорид натрия, в результате чего выпал белый осадок. При добавлении ко второй части раствора цинковой стружки образовались серые хлопья металла, катионы которого обладают дезинфицирующим свойством. Известно, что выданная соль

используется для изготовления зеркал и в фотографии, а её анион является составной частью многих минеральных удобрений. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

9. Для изучения состава соли были взяты белые кристаллы хорошо растворимого в воде вещества, которое используется в хлебопечении и кондитерской промышленности в качестве разрыхлителя теста. В результате процесса термического разложения выданной соли образовались три вещества, два из которых при обычных условиях являются газами. При нагревании соли с гидроксидом натрия образуется газ, водный раствор которого используется в медицине под названием нашатырный спирт. Запишите химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

10. Для установления качественного состава была изучена соль тяжёлого металла, оксид которого используется в производстве хрустального стекла. При термическом разложении соли образуется оксид этого металла и два газообразных вещества: одно из них — газ бурого цвета, а другое — важнейший компонент воздуха. При приливании к раствору выданной соли раствора йодида калия выпадает осадок ярко-жёлтого цвета. Запишите

химическую формулу и название вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе исследования.

11. Для определения качественного состава неизвестной соли азотной кислоты исследовали белое кристаллическое вещество. Это вещество при нагревании полностью разлагается без образования сухого остатка. При действии горячего раствора гидроксида натрия выделяется бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

12. В химической лаборатории хранится склянка с кристаллическим веществом белого цвета. При действии на него гидроксида натрия выделяется лёгкий, бесцветный газ с резким запахом, вызывающий посинение лакмусовой бумаги. При действии на него сильной кислоты выделяется бесцветный газ без запаха, вызывающий покраснение раствора лакмуса. При приливании к раствору этого вещества раствора гидроксида кальция выделяется нерастворимый в воде осадок. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

13. Кристаллическое вещество оранжевого цвета при нагревании значительно увеличивается в объёме за счёт выделения бесцветного газа и образует твёрдое вещество тёмно-зелёного

цвета. Выделившийся газ взаимодействует с литием даже при комнатной температуре. Продукт этой реакции гидролизуется водой с образованием газа с резким запахом, способного восстановить медь из её оксида. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

14. Для исследования свойств неизвестного вещества его концентрированный раствор разделили на две части. В пробирку с одной частью раствора поместили медную проволоку. При этом наблюдалось выделение бурого газа и растворение меди. При добавлении к другой части раствора силиката натрия наблюдалось образование бесцветного студенистого осадка. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

15. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали раствор голубого цвета. При добавлении горячего раствора сильной кислоты выделился газ с резким запахом жжёной резины, окрашивающий лакмус в красный цвет. При добавлении раствора аммиака сначала выпал голубой осадок, который затем растворился в избытке аммиака с образованием фиолетового раствора. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

16. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её раствор желтоватого цвета. При добавлении раствора сильной кислоты появился резкий запах уксуса. При добавлении роданида аммония раствор приобрёл кроваво-красную окраску. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

17. Для определения качественного состава неизвестной соли исследовали её бесцветный раствор. При добавлении раствора разбавленной серной кислоты выделился газ с запахом тухлых яиц и выпал белый осадок, не растворимый в кислотах. При взаимодействии порции исходного раствора с хроматом натрия выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

18. Для определения качественного состава было выдано кристаллическое вещество — средняя соль многоосновной кислоты, катион которой не является ионом металла. При взаимодействии данного вещества с гидроксидом натрия выделяется газ с резким раздражающим запахом, а при приливании к раствору выданного вещества раствора нитрата серебра выпадает осадок жёлтого цвета. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

19. Для определения качественного состава студентам было выдано бесцветное кристаллическое вещество — соль. К одной части раствора исследуемой соли прилили раствор нитрата серебра, в результате чего выпал осадок жёлтого цвета. А при добавлении к другой части раствора карбоната натрия выпал белый осадок. Известно, что катион этой соли образован щёлочно-земельным металлом, входящим в состав костной ткани человека. Анион этой соли состоит из атомов химического элемента, образующего простое вещество, спиртовой раствор которого используется в качестве дезинфицирующего средства. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

20. При определении качественного состава неизвестного кристаллического вещества белого цвета было установлено, что его раствор взаимодействует с раствором гидроксида калия с образованием осадка. А при добавлении к раствору исследуемого вещества раствора нитрата бария выпадает осадок белого цвета, не растворимый в кислотах. Известно, что катион металла, входящий в состав данного соединения, входит в состав хлорофилла. Этот металл ранее применялся также в фотографии для получения вспышки. Запишите формулу и название этого вещества. Составьте уравнения реакций, которые были проведены в процессе его распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В. Н. Качественный химический полумикроанализ. М.: Химия. 1973. 584 с.

Глинка Н. Л. Общая химия: учебник / под ред. В. А. Попкова, А. В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Гринвуд Н., Эршно А. Химия элементов (в 2 томах): учебник. Изд-во «Бином. Лаборатория знаний», 2015. 1280 с.

Карапетьянц М. Х., Дракин С. И. Общая и неорганическая химия: учебник. 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Крешков А. П. Основы аналитической химии. Ч. 1. Теоретические основы. Качественный анализ. М.: Химия. 1970. 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
Лабораторная работа № 1. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА КАТИОНЫ ЖЕЛЕЗА 6
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ 9
Лабораторная работа № 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ Co^{2+}, Ni^{2+} И Cu^{2+} 10
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ 14
Лабораторная работа № 3. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ НА ИОНЫ $A1^{3+}$, Cr^{3+}, Zn^{2+} 15
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ 18
Лабораторная работа № 4. РАЗДЕЛЕНИЕ И ОБНАРУЖЕНИЕ КАТИОНОВ Ag^{+}, Pb^{2+}, Hg^{2+} МЕТОДОМ ОСАДОЧНОЙ БУМАЖНОЙ ХРОМАТОГРАФИИ 19
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ 22
Лабораторная работа № 5. ДРОБНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КАТИОНОВ 23
ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕАКЦИИ В НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ» 26
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 34

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу
_____ С.А.Упоров

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Б1.О.25 ХИМИЯ

Направление подготовки
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль) подготовки

Кадастр недвижимости

Одобрено на заседании кафедры	Рассмотрено методической комиссией
Химии	Горно-технологического
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав.кафедрой _____	Председатель _____
(подпись)	*(подпись)*
Амдур А.М.	Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол №1 от 08.09.2023	Протокол №2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Введение.

Раствором называется гомогенная система, состоящая из двух или более компонентов. Различают растворы жидкие (например, растворы солей), газообразные (воздух, смесь газов), твердые (сплавы).

В отличие от химических соединений, растворы имеют переменный состав, т.е. их состав может изменяться в широких пределах, не нарушая однородности.

Если рассмотреть бинарные или двухкомпонентные растворы, то они состоят из растворителя (или среды) и растворяемого вещества. Эти понятия условны. Однако, обычно растворителем считают жидкий компонент или тот компонент, которого в растворе больше.

Растворимость – это свойства вещества растворяться в воде или другом растворителе. Существует эмпирическое правило: «подобное растворяется в подобном». Большинство неорганических соединений являются соединениями со связью ковалентного полярного или ионного типа. Для такого рода соединений наилучшим растворителем является один из наиболее полярных растворителей - вода.

Водные растворы электролитов широко применяются в технике, в том числе и горном деле, и в быту, поэтому знание свойств растворов и умение производить несложные расчеты являются составной частью курса «Химия», разработанной для студентов УГГУ.

Глава 1. Способы выражения концентрации раствора

Концентрация раствора – количество растворенного вещества, содержащегося в определенном количестве раствора или растворителя. В зависимости от того, в каких единицах выражается количество растворенного вещества и количество растворителя или раствора, существуют различные способы выражения концентрации растворов.

Основные способы выражения концентрации растворов:

1. Массовая доля вещества, выраженная в процентах (или ***процентная концентрация***) – масса растворенного вещества, содержащегося в 100 г раствора.

15% -й раствор NaOH – это значит, что 15 г NaOH содержится в 100 г раствора, т.е. раствор состоит из 15 г NaOH 85 г H_2O .

$$\omega = \frac{m_{\text{р-го в-ва}}}{m_{\text{р-а}}} (\times 100\%), \ \%$$

1. ***Молярная концентрация*** – число молей растворенного вещества, содержащегося в 1 литре раствора.

$$C = \frac{n_{\text{р-го в-ва}}}{V_{\text{р-а}}}, \text{ моль/л (М)}$$

n – число молей растворенного вещества

V – объем раствора (л)

1 М HNO_3 – одномолярный раствор HNO_3 , 1 л такого раствора содержит 1 моль HNO_3 или (1+14+48) = 63 г.

3. ***Мольная доля*** – отношение числа молей данного вещества к общему числу молей всех веществ, имеющихся в растворе.

Для бинарного раствора : N_1 – раствор

N_2 – растворимое вещества

$$N_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \qquad N_1 + N_2 = 1$$

4. ***Нормальная концентрация (нормальность)*** или эквивалентная концентрация, – число эквивалентов растворенного вещества, содержащихся в 1 л раствора.

$$C_Э = \frac{n_{Э\ р\text{-}го\ в\text{-}ва}}{V_{р\text{-}а}},\ г\text{-}экв/л\ (н)$$

$n_Э$ – число эквивалентов растворенного вещества

V – объем раствора (л)

1 н H_2SO_4 – однонормальный раствор H_2SO_4 , 1 л такого раствора содержит 1 г-эквивалент H_2SO_4 или (2+32+64)/ 2 = 49 г.

5. ***Моляльная концентрация*** – число молей растворенного вещества, содержащегося в 1000 г растворителя.

$$C_m = \frac{n_{р\text{-}го\ в\text{-}ва}}{m_{р\text{-}ля}},\ моль/кг$$

n – число молей растворенного вещества

m – масса раствора (кг или г)

1 М HNO_3 – одномоляльный раствор HNO_3 , для приготовления такого раствора в 1 кг воды растворяют 1 моль HNO_3 или (1+14+48) = 63 г.

Примеры решения задач

Задача. Рассчитать массовую долю вещества при растворении 4 г его в 30 мл воды.

Решение. Плотность воды ρ = 1 г/мл, следовательно, масса раствора будет составлять 30 + 4 =34 г. Массовая доля ω = (4/34) × 100% = 11,76 %

Задача. Сколько граммов соли и воды содержится в 600 г 9 %-го раствора ?

Решение. В 100 г 9 %-го раствора содержится 9 г соли. В 600 г раствора количество соли составляет (600/100) ×9 = 36 г. Количество воды : 600 – 36 = 564 г.

Задача. Сколько граммов вещества нужно растворить в 320 мл воды, чтобы получить 15 %-ный раствор ?

Решение. Плотность воды ρ = 1 г/мл, следовательно, масса воды будет составлять 320 г. Если количество вещества – *x*, то количество раствора составит (320 + *x*). Подставляем данные значения в формулу для расчета массовой доли и решаем полученное уравнение, определяя *x*.

15 = 100 × *x* / (320 + *x*). Количество вещества (*x*) составит 56,47 г.

Задача. Чему равна массовая доля соли в растворе, полученном при смешении 250 раствора 8% - ной концентрации и 750 г 4% - го раствора?

Решение. При смешении общее количество раствора будет составлять 250 + 750 = 1000 г. В первом растворе содержалось (250/100) ×8 = 20 г соли. Во втором растворе содержалось (750/100) ×4 = 30 г соли. В смешенном растворе содержится 20 = 30 = 50 г соли. Подставляем полученные значения в формулу для расчета массовой доли полученного раствора: ω = (50/1000) × 100% = 5 %.

Задача. Вычислить молярную концентрацию 20%-ного раствора сульфата железа (II) (ρ = 1,21 г/мл).

Решение. 20% - ная концентрация означает, что в 100 г раствора или в 100/ ρ = 100/1,21 = 82,64 мл раствора содержится 20 г $FeSO_4$.. Молярная масса $FeSO_4$. Составляет 56 + 32 + 4×16 = 152 г. Следовательно, в 84,64 мл раствора содержится 20/152 = 0,13 молей $FeSO_4$. .Подставляем полученные значения в уравнение для молярной концентрации, объем выражаем в л : C = $0,13/82,64\times10^{-3}$ = 1,59 г-моль/л.

Задача. К 1 л 6%-ного раствора фосфорной кислоты (ρ = 1,031 г/мл) прилили 1 л воды. Какова молярная концентрация раствора ?

Решение. Молярная концентрация –это число молей растворенного вещества, содержащегося в 1 литре раствора. Следовательно, нужно определить число молей фосфорной кислоты (H_3PO_4), содержащихся в 1 л 6%-ного раствора и разделить на объем полученного раствора. Объем полученного раствора составляет 1+ 1 = 2 л. 6% - ная концентрация означает, что в 100 г раствора или в 100/ ρ = 100/1,031 =96,99 мл раствора содержится 6 г H_3PO_4.. В 1000 мл (1л) содержится (1000/96,99) × 6 = 61,86 г H_3PO_4.. Молярная масса фосфорной кислоты равна 1×3 + 31 + 16×4= 98 г. Таким образом, в полученном растворе содержится 61,86/98 = 0,63 моля кислоты, что соответствует молярной концентрации C = 0,63/2 = 0,315 г-моль/л .

Задача. Сколько мл 38 %-ной соляной кислоты (ρ = 1,19 г/мл) нужно взять для приготовления 1 л 2 М раствора ?

Решение. В 1 л 2 М раствора соляной кислоты (HCl) должно содержаться 2 моля кислоты, т.е. 2 ×36,5 = 71 г HCl, где 1 + 35,5 = 36,5 г молярная масса хлористого водорода. Составляем пропорцию: 38 г HCl содержится в 100/ρ мл 38% р-ра.71 г HCl будет содержаться в *x* мл этого р-ра.

x = 71 × 100/ 1,19×38 = 157 мл. Для приготовления потребуется 157 мл 38 %-ной соляной кислоты .

Задачи для самостоятельного решения

1.Определите молярность соляной кислоты (ρ = 1,18 г/мл), содержащей 36,5 % хлористого водорода.

2.Сколько граммов $AgNO_3$ и воды надо взять для приготовления 200 мл 0,1 н раствора ?

3. В 300 мл раствора содержится 25 г $AlCl_3$. Вычислить молярную концентрацию раствора.

4. Вычислить молярную концентрацию 5%-ного раствора хлорида кальция (ρ = 1 г/мл).

5. Сколько граммов карбоната натрия содержится в 15 мл 0,1 М раствора ?

6. Для зарядки кислотного аккумулятора потребовалось 5л 20% раствора серной кислоты (ρ = 1,14г/мл). Определите молярность этого раствора и рассчитайте, какой объем 95% раствора серной кислоты (ρ = 1,83г/мл) необходим для его приготовления.

Глава 2. Растворы электролитов

Электролитами называются вещества, растворы и расплавы которых проводят электрический ток.

С.Аррениус предложил для этих веществ теорию электролитической диссоциации. Согласно этой теории электролиты при растворении в воде распадаются (диссоциируют на ионы положительные и отрицательные). Под

действием электрического тока ионы приобретают направленное движение. При этом положительно заряженные ионы движутся к катоду, поэтому называются *катионами*, отрицательно заряженные – к аноду и называются *анионами*. Д.И. Менделеев создал химическую теорию растворов и показал, что образование растворов происходит вследствие химического взаимодействия меду растворителем и растворенным веществом.

Диссоциации подвергаются соединения с ионной и ковалентной полярной связями под действием полярных (ионизирующих) растворителей, молекулы которых являются диполями. Мерой полярности растворителя может служить величина электропроицаемости - ε.Наиболее полярные растворители: вода (ε = 80), уксусная кислота (ε = 57), этанол (ε = 25). Неполярными растворителями являются углеводороды (например, бензол).

Количественным критерием процесса диссоциации является степень диссоциации.

Степень диссоциации α – это отношение числа молекул, диссоциированных на ионы (или распавшихся на ионы) к общему числу молекул, растворенного электролита.

α выражается в долях единиц (0 – 1) или процентах (0 – 100 %).

Величина α зависит*:*

- от природы электролита;
- от концентрации электролита (с уменьшением концентрации, т.е. при разбавлении раствора, степень диссоциации всегда увеличивается;
- от температуры (с увеличением температуры степень диссоциации возрастает) .

По величине степени диссоциации все электролиты можно разделить на три группы.

Сильные электролиты **$\alpha \approx 1$ (100%):**

1. Почти все растворимые соли: (соли, растворимые в воде).

2. Кислоты: HNO_3 , H_2SO_4 , HCl , HBr, HJ , $HClO_4$.

3. Гидроксиды щелочных и щелочноземельных металлов: NaOH, KOH, Ca(OH), $Ba(OH)_2$

Электролиты средней силы $\alpha \approx 0{,}03 - 0{,}3$ (3 - 30%): H_3PO_4, $Mg(OH)_2$

Слабые электролиты $\alpha << 1$ (<<100%)

1. Ряд кислот: H_2CO_3 , H_2SO_3 , H_2S , HCN , H_2SiO_3, HCN, все органические кислоты, CH_3COOH.
2. Нерастворимые основания p- , d- , f-элемен-тов: $Al(OH)_3$, $Fe(OH)_3$, а также NH_4OH –гидроксид аммония.
3. Нерастворимые соли.
4. Некоторые растворимые соли ($Fe(SCN)_3$, $HgCl_2$)/
5. Вода – H_2O.

Сильные электролиты диссоциируют на ионы нацело, т.е. процесс диссоциации является необратимым.

$$HCl = H^+ + Cl^-$$

$$H_2SO_4 = 2H^+ + SO_4^{-2}$$

Слабые электролиты диссоциируют лишь частично, т.е. этот процесс является обратимым. Поэтому во времени устанавливается состояние химического равновесия:

$$CH_3COOH \rightleftarrows H^+ + CH_3COO^-$$

Состояние равновесия можно охарактеризовать с помощью константы равновесия

$$K_Д = \frac{[CH_3COO^-]\,[H^+]}{[CH_3COOH]}$$

Константу равновесия для процесса диссоциации называют ***константой диссоциации***, т.е. константа диссоциации – это константа равновесия процесса электролитической диссоциации..

Константа диссоциации зависит от:

- природы растворителя;
- природы электролита;
- температуры , т.е. $K_Д \neq f$ (C), и не зависит от концентрации электролита.

Закон разбавления Оствальда устанавливает взаимосвязь между $К_Д$ и α для слабых электролитов.

Рассмотрим диссоциацию слабого электролита – уксусной кислоты:

$$CH_3COOH \rightleftharpoons H^+ + CH_3COO^-$$

$$C(1 - \alpha) \qquad C\alpha \qquad C\alpha$$

C – исходная молярная концентрация;

α – степень диссоциации;

$C(1 - \alpha)$ – концентрация недиссоциированных молекул;

$C\alpha$ – концентрация каждого из ионов.

$$К_Д = \frac{C\alpha \cdot C\alpha}{C(1 - \alpha)} = \frac{C\alpha^2}{1 - \alpha}$$

Для растворов, где $\alpha << 1$, это выражение упрощается, т.к. $(1 - \alpha) \to 1$.

$К_Д \approx C\alpha^2$ и $\alpha = \sqrt{\frac{K_Д}{C}}$

Это уравнение показывает, что степень диссоциации возрастает при уменьшении концентрации раствора, т.е. при его разбавлении.

Другой особенностью слабых электролитов является то, что они диссоциируют ступенчато:

I ступень : $H_2CO_3 \rightleftharpoons H^+ + HCO_3$ (на 90%) $\qquad К_{Д1} = \frac{[HCO_3^-]\,[H^+]}{[HCO_3^-]}$

II ступень: $HCO_3^- \rightleftharpoons H^+ + CO_3^{-2}$ $\qquad К_{Д2} = \frac{[H^+]\,[CO_3^{-2}]}{[HCO_3^-]}$

$$Cu(OH)_2 \rightleftharpoons CuOH^+ + OH^-$$

$$CuOH^+ \rightleftharpoons Cu^{+2} + OH^-$$

$К_1 > К_2 > К_3 > \ldots$ – общее соотношение, независимо от природы электролита, т.к. для отрыва одного иона от нейтральной молекулы затрачивается минимальная энергия.

Диссоциация воды. Водородный показатель.

Вода слабый электролит, но тем не менее диссоциирует на ионы

$$H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^- \text{ (гидроксид-ион)}$$

$$K_Д = \frac{[H^+][OH^-]}{[H_2O]}$$

Это уравнение можно представить в ином виде:

$$K_Д [H_2O] = [H^+][OH^-]$$

Поскольку α_{H_2O} очень мала, то можно считать, что число нераспавшихся молекул воды равно общей концентрации воды.

$$K_Д [H_2O] = K_W \text{ (ионное произведение воды)} .$$

$$K_W = [H^+][OH^-]$$

При 25^0C , $K_W = 10^{-14}$; следовательно, $K_W = 10^{-7} \times 10^{-7}$; т.е.

$$[H^+] = [OH^-] = 10^{-7} \text{ моль/л} .$$

Концентрацию ионов H^+ и OH^- можно варьировать при добавлении либо кислот, либо оснований.

$H_2O + HCl \rightarrow \uparrow[H^+]$ и $\downarrow[OH^-]$

$H_2O + KOH \rightarrow \uparrow [OH^-]$ и $\downarrow[H^+]$

т.е. $[H^+]$ и $[OH^-]$ - взаимосвязаны .

Для определения кислотности раствора используют водородный показатель:

$$pH = -\lg[H^+]$$

Водородный показатель – десятичный логарифм концентрации водородных ионов, взятый с обратным знаком.

1) среда нейтральная, $pH = -\lg 10^{-7} = 7$ $[H^+] = 10^{-7}$ моль/л .

2) среда кислая, $pH < 7$, $1 < pH < 14$, $[H^+] > 10^{-7}$ моль/л .

3) среда щелочная, $pH > 7$, $7 < pH < 14$, $[H^+] < 10^{-7}$ моль/л .

Аналогично водородному показателю можно определить величину $pOH = -\lg [OH^-]$. $pH + pOH = 14$

Примеры решения задач

Задача. Чему равна концентрация азотной кислоты, если pH раствора равен 1?

Решение. Азотная кислота (HNO_3) является сильным электролитом, т.е. диссоциирует на 100%, поэтому ее концентрация равна концентрации ионов

водорода. Если pH = $-lg[H^+]$ = 1, то $[H^+]$ = 0,1 г-ион/л, соответственно молярная концентрация кислоты С = 0,1 моль/л.

Задача. Чему равна концентрация гидроксида калия, если pH раствора равен 11?

Решение. Гидроксид калия (КОН) является сильным электролитом, т.е. диссоциирует на 100%, поэтому его концентрация равна концентрации гидроксид - ионов . Если pH = 11, то pOH = $-lg[OH^-]$ = 14 – 11 = 3. Следовательно, $[OH^-]$ = 0,001 г-ион/л, соответственно молярная концентрация гидроксида С = 0,001 моль/л.

Задача. Вычислить pH раствора, содержащего 0,112 г КОН в 1 л раствора.

Решение. Определим, чему равна молярная концентрация данного раствора. Молярная масса КОН равна 39 + 16 +1 = 56 г. Следовательно, молярная концентрация раствора 0,112/56 = 0,002 моль/л. Гидроксид калия (КОН) является сильным электролитом, т.е. диссоциирует на 100%, поэтому его концентрация равна концентрации гидроксид - ионов . В этом случае pOH = $-lg[0.002]$ = 2,7. Следовательно, значение pH данного раствора 14,0-2,7 = 11,3.

Задача. Вычислить концентрацию протона в 0,02М растворе H_2SO_3, учитывая только первую ступень диссоциации, для которой константа диссоциации равна $1,7*10^{-2}$.

Решение. Воспользуемся законом разбавления Оствальда и определим степень диссоциации кислоты. $\alpha = \sqrt{1,7*10^{-2}}/0,02 = \sqrt{0,85} = 0,92$. $[H^+] = C\alpha = 0,92\times 0,02 =$ 0,0184 г-ион/л

Задача. Константа диссоциации азотистой кислоты равна $5,1\cdot10^{-4}$. Вычислите степень диссоциации HNO_2 в ее 0,01 М растворе, концентрацию H^+ и водородный показатель (pH).

Решение. Воспользуемся законом разбавления Оствальда и определим степень диссоциации кислоты. $\alpha = \sqrt{5,1\cdot10^{-4}}/0,01 = \sqrt{5,1\cdot10^{-2}} = 0,226$. $[H^+] = C\alpha = 0,226 \times 0,01$ = 0,00226 г-ион/л. $pH = -\lg[H^+] = -\lg[0,00226] = 2,65$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить концентрации протона и гидроксил-иона в растворе, pH которого равен 8.

2. Какова $[OH^-]$ в 0,01 М растворе гидроксиламина NH_2OH , если константа ионизации его $1{,}21*10^{-8}$?

3. Вычислить pH в 0,02 М растворе $Ca(OH)_2$.

4. Найти степень диссоциации HCOOH в 0,2 н растворе , если константа диссоциации её равна $1{,}8*10^{-4}$.

5. Вычислить pH 0,025 М раствора NaOH.

6. Раствор гидроксида натрия имеет pH = 12. Чему равна концентрация основания?

7. При растворении NaCl в каком из растворителей концентрация ионов натрия будет наибольшей: бензол, ацетон, вода, этанол?

Глава 3. Реакции ионного обмена (РИО)

Согласно теории электролитической диссоциации все реакции в водных растворах являются реакциями между ионами. В отличие от молекулярных уравнений, ионные уравнения показывают истинных участников реакции.

Реакции ионного обмена (РИО) – это реакции, протекающие в растворах электролитов без изменения степеней окисления атомов, входящих в состав ионов. РИО – это необратимые реакции. Условием их необратимости является образование в результате обмена ионами малодиссоциированного соединения (слабого электролита:, т.е. нерастворимого соединения; газообразного вещества или соединения, разлагающегося с выделением газа; растворимого слабого электролита.

Примеры условий необратимого протекания реакций ионного обмена (РИО)

1. Образование труднорастворимого вещества, которое выделяется из раствора в виде осадка:

молекулярное уравнение

$$FeCl_3 + 3NaOH = Fe(OH)_3\downarrow + 3NaCl$$

полное ионное уравнение

$$Fe^{+3} + 3Cl^- + 3Na^+ + 3OH^- = Fe(OH)_3\downarrow + 3Na^- + 3Cl^-$$

сокращенное ионное уравнение

$$Fe^{+3} + 3OH^- = Fe(OH)_3\downarrow$$

(т.е. истинные участники реакции Fe^{+3} и OH^-).

Труднорастворимые соединения всегда записываются в молекулярном виде.

2. Образование газообразного вещества

молекулярное уравнение

$$K_2S + 2HCl = 2KCl + H_2S\uparrow$$

полное ионное уравнение

$$2K^+ + S^{-2} + 2H^+ + 2Cl^- = 2K^+ + 2Cl^- + H_2S\uparrow$$

сокращенное ионное уравнение

$$S^{-2} + 2H^+ = H_2S\uparrow$$

Газообразное вещество всегда записывается в молекулярной форме.

3. Образование малодиссоциирующих веществ

молекулярное уравнение

$$2KOH + H_2SO_4 = K_2SO_4 + 2H_2O$$

полное ионное уравнение

$$2K^+ + 2OH^- + 2H^+ + SO_4^{-2} = 2K^+ + SO_4^{-2} + 2H_2O$$

сокращенное ионное уравнение

$$2H^+ + 2OH^- = 2H_2O \text{ или } H^+ + OH^- = H_2O$$

Слабый электролит (малодиссоциирующее соединение) в РИО всегда записываются в молекулярном виде.

Если в полном ионном уравнении все участники сокращаются, то реакция обратима и РИО не протекает. Например,

$$KCl + NaNO_3 \rightleftharpoons KNO_3 + NaCl$$

Для правильного написания уравнений РИО необходимы сведения о том, сильными или слабыми электролитом являются соединения, входящие в уравнения, (см. главу 3) и сведения об их растворимости (см. таблицу растворимости).

Необходимо также знать, как диссоциируют соединения различных классов.

Примеры диссоциации различных соединений

1. Диссоциация кислот – сильных электролитов:

$$HNO_3 = H^+ + NO_3^-$$

Кислоты-электролиты, при диссоциации которых образуются ионы водорода.

2. Диссоциация оснований – сильных электролитов:

$$Ca(OH)_2 = Ca^{+} + 2OH^{-}$$

Основания – электролиты, диссоциирующие с образованием гидроксид-ионов.

3. Диссоциация солей:

а) нормальные (средние) растворимые соли

$$NaNO_3 = Na^{+} + NO_3^{-}$$

$$CuSO_4 = Cu^{+2} + SO_4^{-2}$$

б) кислые соли, образованные слабыми кислотами

$$Ca(HCO_3)_2 = Ca^{2+} + 2HCO_3^{-}$$

$$KHCO_3 = K^{+} + HCO_3^{-}$$

в) основные соли слабых оснований

$$(CuOH)_2SO_4 = 2CuOH^{+} + SO_4^{-2}$$

Примеры написания уравнений реакций ионного обмена (РИО)

Задачи. Напишите молекулярное, полное ионное и сокращенное ионное уравнения данной реакции и установите, будет ли протекать РИО.

1. $H_2CO_3 + KOH$

Напишем молекулярное уравнение, обменивая ионы с учетом их зарядов и подбирая стехиометрические коэффициенты.

$$H_2CO_3 + 2KOH = K_2CO_3 + 2HOH$$

Запишем полное ионное уравнение, учитывая, что угольная кислота и вода являются слабыми электролитами.

$$H_2CO_3 + 2K^{+} + 2OH^{-} = 2K^{+} + CO_3^{2-} + 2HOH$$

После сокращения краткое ионное уравнение имеет вид:

$$H_2CO_3 + 2OH^{-} = CO_3^{2-} + 2HOH$$

РИО между кислотой и основанием (реакция нейтрализации) протекают и в случае нерастворимых реагентов, если один из участников является сильным электролитом, т.к. в результате образуется слабый электролит – вода.

2. $Bi(OH)_3 + HNO_3$

Аналогично задаче 1, напишем молекулярное и полное ионное уравнение, проверив по таблице растворимость гидроксида висмута.

$\downarrow Bi(OH)_3 + 3HNO_3 = Bi(NO_3)_3 + 3HOH$

$\downarrow Bi(OH)_3 + 3H^+ + 3NO_3^- = Bi^{3+} + 3NO_3^- + 3HOH$

Сокращенное ионное уравнение имеет вид:

$\downarrow Bi(OH)_3 + 3H^+ = Bi^{3+} + 3HOH$

3. $Sn(OH)_2 + Ba(OH)_2$

Реакция между двумя основаниями возможна в том случае, если одно из оснований является амфотерным. Гидроксид олова – это нерастворимое амфотерное основание, и в данной РИО проявляет свойства кислоты H_2SnO_2. При взаимодействии с основанием образуется растворимая соль с кислотным остатком, представляющим собой комплексный анион.

$\downarrow Sn(OH)_2 + Ba(OH)_2 = Ba[Sn(OH)_4]$.

$\downarrow Sn(OH)_2 + Ba^{2+} + 2OH^- = Ba^{2+} + [Sn(OH)_4]^{2-}$.

$\downarrow Sn(OH)_2 + 2OH^- = [Sn(OH)_4]^{2-}$.

4. $ZnOHCl + HCl$

Основные соли взаимодействуют с кислотами, в результате РИО получаются средние (нормальные) соли и вода. Большинство основных солей слабых оснований являются нерастворимыми соединениями. В случае растворимых соединений уравнения РИО будут иметь следующий вид:

$ZnOHCl + HCl = ZnCl_2 + HOH$

$ZnOH^+ + Cl^- + H^+ + Cl^- = Zn^{2+} + 2Cl^- + HOH$

$ZnOH^+ + H^+ = Zn^{2+} + HOH$

5. $NaHCO_3 + NaOH$

Кислые соли взаимодействуют с основаниями, в результате РИО получаются средние (нормальные) соли и вода.

$NaHCO_3 + NaOH = Na_2CO_3 + HOH$

$Na^+ + HCO_3^- + Na^+ + OH^- = 2Na^+ + CO_3^{2-} + HOH$

$HCO_3^- + OH^- = CO_3^{2-} + HOH$

6. $NaNO_2 + HBr$

$NaNO_2 + HBr = NaBr + HNO_2$

$Na^+ + NO_2^- + H^+ + Br^- = Na^+ + Br^- + HNO_2$

$NO_2^- + H^+ = HNO_2$

Азотистая кислота – слабый электролит. Сильная кислота «вытесняет» слабую из ее солей.

7. $NH_4NO_3 + Ca(OH)_2$

   $2NH_4NO_3 + Ca(OH)_2 = 2NH_4OH + Ca(NO_3)_2$

   $2NH_4^+ + 2NO_3^- + Ca^{2+} + 2OH^- = 2NH_4OH + Ca^{2+} + 2NO_3^-$

   $2NH_4^+ + 2OH^- = 2NH_4OH$

   $NH_4^+ + OH^- = NH_4OH$

8. $CuSO_4 + K_2S$

   $CuSO_4 + K_2S = \downarrow CuS + K_2SO_4$

   $Cu^{2+} + SO_4^{2-} + 2K^+ + S^{2-} = \downarrow CuS + 2K^+ + SO_4^{2-}$

   $Cu^{2+} + S^{2-} = \downarrow CuS$

9. $NiS + K_2SO_4$

   $\downarrow NiS + K_2SO_4 \neq$

РИО не протекает, так как исходная соль нерастворима.

10. $MnCl_2 + NH_4NO_3$

    $MnCl_2 + 2NH_4NO_3 \neq Mn(NO_3)_2 + 2NH_4Cl$

    $Mn^{2+} + 2Cl^- + 2NH_4^+ + 2NO_3^- = Mn^{2+} + 2NO_3^- + 2NH_4^+ + 2Cl^-$

    Условия протекания РИО не выполнены.

Задачи для самостоятельного решения

1. $Ba(HCO_3)_2 + Ba(OH)_2$
2. $Al(OH)_2Cl + HCl$
3. $Na_3PO_3 + H_2SO_4$
4. $Pb(OH)_2 + NaOH$
5. $MgCl_2 + Fe(NO_3)_2$
6. $ZnS + K_2SiO_3$
7. $AlCl_3 + Ca(OH)_2$
8. $Hg(NO_3)_2 + K_3PO_4$
9. $CuCl_2 + K_2SO_3$
10. $NH_4OH + HCl$

Глава 4. Гидролиз солей

Соль – это продукт взаимодействия кислоты и основания.

Гидролиз солей – реакция ионного обмена между водой и растворенными в ней солями. Частный случай реакции ионного обмена**.** Гидролиз солей можно представить, как взаимодействие ионов и их гидратной оболочки.

Характеризовать гидролиз количественно позволяют такие величины, как с**тепень гидролиза и константа гидролиза**. *Степень гидролиза* ($h_{гидр}$) — это соотношение количества подвергающейся гидролизу соли $n_{гидр}$ и общего количества растворенной соли $n_{общ}$.

$$h_{гидр} = (n_{идр}/n_{общ})\cdot 100\ \%$$

Степень гидролиза зависит от

- природы соли;
- концентрации соли (увеличивается с разбавлением раствора);
- от температуры (при нагревании гидролиз усиливается, так как реакция эндотермическая).

Представим в общем виде процесс гидролиза соли, в котором в роли соли выступает – МА, а НА и МОН — соответственно, кислота и основание, которые образуют данную соль:

$$MA + H_2O \leftrightarrow HA + MOH$$

константу, соответствующую этому равновесию:

$$K = [HA]\cdot[MOH]/[MA]\cdot[H_2O]$$

Известно, что концентрация воды в разбавленных растворах, имеет практически постоянное значение, поэтому ее можно включить в константу

$$K\cdot[H_2O]= K_г,$$

тогда для константы гидролиза соли $K_г$ будет иметь такой вид:

$$K_г = [HA]\cdot[MOH]/[MA]$$

Константа и степень гидролиза связаны соотношением:

$$K_г = C\cdot h^2/(1-h),\ моль/л$$

Где С – концентрация соли в растворе, *h*-степень гидролиза

Это выражение можно упростить, т.к. обычно $h<<1$, тогда

$$K_г = C \cdot h^2$$

Зная, константу гидролиза, можно определить pH среды**:**

$$K_г = [HA] \cdot [MOH]/[MA]$$

Концентрация образовавшейся кислоты равна концентрации гидроксид ионов, тогда

$$K_г = [OH^—]^2/[MA]$$

Используя это выражение можно вычислить pH раствора

$$[OH^—] = \sqrt{(K_г \cdot [MA])} \text{ (моль/л)}$$

$$[H^+] = 10^{-14}/[OH^—] \text{ моль/л}$$

Возможны 4 случая протекания гидролиза:

1.Соли, образованные сильным основанием и сильной кислотой

Соли, образованные сильным основанием и сильной кислотой не подвергаются гидролизу. pH среды не изменяется (pH ≈ 7 как в воде):

$$NaCl \leftrightarrow Na^+ + Cl^—$$

$$Na^+ + HOH \leftrightarrow \text{реакция практически не протекает}$$

$$Cl^— + HOH \leftrightarrow \text{реакция практически не протекает}$$

2. Соли, образованные слабым основанием и сильной кислотой

Такое соединение, при диссоциации, образует катионы, способные к присоединению гидроксид-иона из воды, входящей в гидратную оболочку. Тогда гидролиз проходит по катиону**,** при этом среда носит кислый характер, т.е. pH < 7**:**

$$NH_4Cl \leftrightarrow NH_4^+ + Cl^—$$

$$NH_4^+ + HOH \leftrightarrow NH_4OH + H^+$$

$$NH_4Cl + HOH \leftrightarrow NH_4OH + HCl$$

Для солей, образованных слабым основанием и сильной кислотой, константа гидролиза и константа диссоциации основания связаны соотношением:

$$K_г = K_w / K_{осн}$$

Если соль образованна *слабым многокислотным основанием,* то ее гидролиз обычно протекает по первой ступени.

$$FeCl_2 \leftrightarrow Fe^{2+} + 2Cl^—$$

$$Fe^{2+} + HOH \leftrightarrow (FeOH)^+ + H^+$$

3. Соли, образованные сильным основанием и слабой кислотой.

Такие соединения в растворе образуют анионы, способные к присоединению протона из воды, входящей в гидратную оболочку.. Гидролиз протекает по аниону**,** и в его результате создается щелочная среда, pH > 7**:**

$$NaCN \leftrightarrow Na^+ + CN^-$$

$$CN^- + HOH \leftrightarrow HCN + OH^-$$

$$NaCN + HOH \leftrightarrow HCN + NaOH$$

Константа гидролиза и константа диссоциации слабой кислоты связаны зависимостью:

$$K_г = K_w/K_{к\text{-}ты}$$

Если соль образована слабой многоосновной кислотой, то гидролиз протекает преимущественно по 1-й ступени

$$Na_2SO_3 \leftrightarrow 2Na^+ + SO_3^{2-}$$

$$SO_3^{2-} + HOH \leftrightarrow HSO_3^- + OH^- + NaOH$$

4. Соли, образованные слабым основанием и слабой кислотой. Такие соли в растворе не существуют, так как при попытке их получить путем реакции ионного обмена происходит совместный (полный, необратимый) гидролиз.

$$Cr_2(CO_3)_3 + 3HOH = 2Cr(OH)_3 + 3CO_2$$

Примеры решения задач

Задача. Составьте молекулярные и ионные уравнения гидролиза солей $Cr_2(SO_4)_3$ и Na_2SiO_3. Какое значение pH (pH ≤ 7, pH ≥ 7) имеют растворы этих солей? Что произойдет при смешении растворов этих солей?

Решение. Сульфат хрома является солью слабого нерастворимого основания и сильной серной кислоты. Такие соли гидролизуются по катиону

$$Cr_2(SO_4)_3 \leftrightarrow 2Cr^{3+} + 3SO_4^2$$

$$Cr^{3+} + HOH \leftrightarrow (CrOH)^{2+} + H^+, \text{ pH}<7$$

$$Cr_2(SO_4)_3 + 2HOH \leftrightarrow 2(CrOH)SO_4 + H_2SO_4$$

Гидролиз преимущественно протекает по первой ступени.

Силикат натрия – соль, образованная сильным основанием и слабой кремниевой кислотой. Такие соли гидролизуются по аниону

$$Na_2SiO_3 \leftrightarrow 2Na^+ + SiO_3^{2-}$$

$$SiO_3^{2-} + HOH = HSiO_3^- + OH^-, \text{ pH} > 7$$

$$Na_2SiO_3 + HOH = NaHSiO_3 + NaOH$$

Гидролиз преимущественно протекает по первой ступени.

При смешении растворов этих солей произойдет совместный необратимый гидролиз.

$$Cr_2(SO_4)_3 + 3Na_2SiO_3 + 6HOH = 2Cr(OH)_3\downarrow + 3H_2SiO_3\downarrow + 3Na_2SO_4$$

Задача. Составьте молекулярные и ионные уравнения гидролиза солей Li_3PO_4, KCl, $CuCl_2$. Какое значение pH имеют растворы этих солей?

Решение. Li_3PO_4 – соль, образованная сильным основанием и слабой кислотой, гидролиз по аниону.

I ступень

$$Li_3PO_4 \leftrightarrow 3Li^+ + PO_4^{3-}$$

$$PO_4^{3-} + HOH = HPO_4^{2-} + OH^-, \; pH > 7$$

$$Li_3PO_4 + HOH = Li_2HPO_4 + LiOH$$

KCl – соль, образованная сильным основанием и сильной кислотой, гидролизу не подвергается**,** pH ≈ 7

$CuCl_2$ — соль, образованная слабым основанием и сильной кислотой, гидролиз по катиону.

$$CuCl_2 \leftrightarrow Cu^{2+} + 2Cl^-$$

I ступень

$$Cu^{2+} + HOH \leftrightarrow (CuOH)^+ + H^+, \; pH<7$$

$$CuCl_2 + HOH \leftrightarrow (CuOH)Cl + HCl$$

Задача. Чему равна сумма стехиометрических коэффициентов уравнения взаимодействия водных растворов сульфата алюминия и карбоната натрия?

Решение. Сульфат алюминия $Al_2(SO_4)_3$ - соль, образованная слабым основанием и сильной кислотой, следовательно, гидролизуется по катиону**.**

Карбонат натрия Na_2CO_3– соль, образованная сильным основанием и слабой кислотой, следовательно, гидролизуется по аниону. При смешении водных растворов этих солей будет наблюдаться полный гидролиз **с**ульфата алюминия до гидроксида алюминия, карбоната натрия до угольной кислоты, которая разлагается на воду и двуокись углерода. Уравнение имеет вид

$$Al_2(SO_4)_3 + 3Na_2CO_3 + 3HOH = 2Al(OH)_3\downarrow + 3CO_2\uparrow + 3Na_2SO_4$$

Сумма стехиометрических коэффициентов – 15.

Задача. Определите степень гидролиза и pH 0,005 н. KCN, $K_{HCN} = 4{,}9 \cdot 10^{-10}$

Решение. Цианид калия соль слабой циановодородной кислоты, гидролизуется по аниону.

$$KCN \leftrightarrow K^+ + CN^-$$

$$CN^- + HOH \leftrightarrow HCN + OH^-$$

$$KCN + HOH \leftrightarrow HCN + KOH$$

Константа и степень гидролиза связаны соотношением:

$\mathbf{K_г = C \cdot} h^2$, отсюда $h = \sqrt{(K_г/C)}$

Сначала найдем константу гидролиза KCN:

$K_г = K_w / K_{к\text{-}ты}$

$K_г = 10^{-14}/4{,}9 \cdot 10^{-10} = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$

$h = \sqrt{(0{,}2 \cdot 10^{-4}/0{,}005)} = 0{,}063$

$K_г = [HCN] \cdot [KOH]/[KCN]$

Концентрация образовавшейся кислоты равна концентрации гидроксид ионов, тогда $K_г = [OH^-]^2/[KCN]$

Используя это выражение можно вычислить pH раствора**:**

$[OH^-] = \sqrt{(K_г \cdot [KCN])}$

$[OH^-] = \sqrt{(0{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}005)} = 3{,}16 \cdot 10^{-4}$ моль/л

$[H^+] = 10^{-14}/3{,}16 \cdot 10^{-4} = 0{,}32 \cdot 10^{-10}$ моль/л

$pH = -\lg[H^+] = -\lg 0{,}32 \cdot 10^{-10} = 10{,}5$

Задачи для самостоятельной работы

1. Кремниевая кислота слабее угольной. Запишите уравнения гидролиза карбоната и силиката натрия и возможные значения pH среды при равных исходных концентрациях солей и одинаковой температуре растворов.

2. Сравните степень гидролиза соли и pH среды в 0,1 М и 0,001 М растворах цианида калия.

3. Как уменьшить степень гидролиза соли?

4. Вычислите константу гидролиза хлорида аммонии. Каковы степень гидролиза соли в О,1 М растворе и pH раствора? Константа диссоциации основания K_{NH4OH} равна $1{,}81 \times 10^{-5}$.

Глава 5. Произведение растворимости

Растворимость – это свойства вещества растворяться в воде или другом растворителе. Некоторые вещества неограниченно растворимы в воде: серная кислота, этиловый спирт. Но большинство неорганических соединений ограниченно растворимы в воде.

Растворимость выражается концентрацией растворённого вещества в его насыщенном растворе либо в процентах, либо в весовых или объёмных единицах, отнесённых к 100 г или 100 см³ (мл) растворителя (г/100 г или см³/100 см³). Насыщенный раствор – это раствор, находящийся в равновесии с осадком растворяемого вещества.

Абсолютно нерастворимых веществ нет. При добавлении воды к труднорастворимой соли, например, AgCl ионы Ag^+ и Cl^-, испытывая притяжение со стороны окружающих диполей воды, постепенно отрываются от кристаллов и переходят в раствор. Сталкиваясь в растворе, ионы Ag^+ и Cl^- образуют молекулы AgCl и осаждаются на поверхности кристаллов. Таким образом, в системе происходят два взаимно противоположных процесса, что приводит к динамическому равновесию, когда в единицу времени в раствор переходит столько же ионов Ag^+ и Cl^-, сколько их осаждается. Накопление ионов Ag^+ и Cl^- в растворе прекращается, получается насыщенный раствор.

$$AgCl \rightleftharpoons Ag^+ + Cl^-$$

$$\rightarrow \quad \leftarrow$$

$$v = v$$

Данное равновесие можно охарактеризовать константой равновесия:

$$K_{равн.} = \frac{[Ag^+][Cl^-]}{[AgCl]}$$

Концентрация твердого вещества величина постоянная. [AgCl] = const. При переносе постоянных величин в левую часть получим новую константу, называемую произведением растворимости (ПР).

$$ПР_{AgCl} = [Ag^+] \cdot [Cl^-].$$

Таким образом, произведение концентраций ионов в насыщенном растворе труднорастворимого электролита при постоянной температуре является

постоянной величиной. В тех случаях, когда электролит содержит два или несколько одинаковых ионов, концентрация этих ионов, при вычислении произведения растворимости должна быть возведена в соответствующую степень.

Например, $ПР(Ag_2S) = [Ag^+]^2[S^{2-}]$; $ПР(PbI_2) = [Pb^{2+}]\,[I^-]^2$

В общем случае выражение произведения растворимости для электролита

$$A_mB_n \rightleftharpoons mA^{n+} + mB^{m+}$$

$$ПР_{AmBn} = [A]^m\,[B]^n$$

Значения произведения растворимости для разных веществ различны.

Например, $ПРCaCO_3 = 4{,}810^{-9}$; $ПРAgCl = 1{,}56\ 10^{-10}$.

ПР легко вычислить, зная растворимость соединения при данной t°.

Образование осадков. Осадок образуется в том случае, когда произведение концентраций ионов малорастворимого электролита превысит величину его произведения растворимости при данной температуре. Когда ионное произведение станет равным величине ПР, выпадение осадка прекращается. Зная объем и концентрацию смешиваемых растворов, можно рассчитать, будет ли выпадать осадок образующейся соли.

То есть, если $[Ag^+][Cl^-] < ПР_{AgCl}$, то раствор не насыщен.

Для насыщенного раствора $[Ag^+]\,[Cl^-] = ПР_{AgCl}$.

В том случае, когда $[Ag^+]\,[Cl^-] > ПР_{AgCl}$, то раствор перенасыщен, и из него начнет выпадать осадок малорастворимого электролита.

Труднорастворимый электролит с достаточно большой величиной ПР нельзя осадить из разбавленных растворов. Для возможно более полного осаждения иона, образующего малорастворимый электролит путем РИО, употребляют *избыток осадителя* (другого участника РИО). Например, осаждаем соль $BaCO_3$:

$$BaCl_2 + Na_2CO_3 = BaCO_3 + 2NaCl.$$

После прибавления эквивалентного количества Na_2CO_3 в растворе остаются ионы Ba^{2+}, концентрация которых обусловлена величиной ПР. Повышение концентрации ионов CO_3^{2-}, вызванное прибавлением избытка осадителя (Na_2CO_3), повлечет за собой соответственное уменьшение концентрации ионов Ba^{2+} в растворе, т.е. увеличит полноту осаждения этого иона.

Растворимость труднорастворимых электролитов понижается в присутствии других *сильных электролитов, имеющих одноименные ионы*. Если к ненасыщенному раствору $BaSO_4$ понемногу прибавлять раствор Na_2SO_4, то ионное произведение, которое было сначала меньше $ПР_{BaSO4}$ ($1{,}1 \cdot 10^{-10}$), постепенно достигнет ПР и превысит его. Начнется выпадение осадка.

Влияние температуры. ПР является постоянной величиной при постоянной температуре. С увеличением температуры ПР возрастает, поэтому осаждение лучше проводить из охлажденных растворов.

Растворение осадков. Правило произведения растворимости важно для переведения труднорастворимых осадков в раствор. Растворение осадка начинается тогда, когда по какой-либо причине ионное произведение малорастворимого электролита становится меньше величины ПР. Для того, чтобы растворить осадок, в раствор вводят такой электролит, ионы которого могут образовывать малодиссоциированное соединение с одним из ионов труднорастворимого электролита.

Предположим, что надо растворить осадок $BaCO_3$. Раствор, соприкасающийся с этим осадком, насыщен относительно $BaCO_3$. Это означает, что $[Ba^{2+}]\ [CO_3^{2-}] = ПР_{BaCO3}$. Если добавить в раствор кислоту, то ионы H^+ свяжут имеющиеся в растворе ионы CO_3^{2-} в молекулы малодиссоциированной угольной кислоты, разлагающейся с выделением диоксида углерода:

$$2H^+ + CO_3^{2-} = H_2CO_3 = H_2O + CO_2$$

Вследствие этого резко снизится концентрация иона CO_3^{2-}, ионное произведение станет меньше величины $ПР_{BaCO3}$. Раствор окажется ненасыщенным относительно $BaCO_3$, и часть осадка $BaCO_3$ перейдет в раствор. При добавлении достаточного количества кислоты можно весь осадок перевести в раствор. Этим же объясняется растворение труднорастворимых гидроксидов в кислотах.

$$Fe(OH)_3 \downarrow + 3HCl = FeCl_3 + 3H_2O$$

Ионы OH^- связываются в малодиссоциированные молекулы H_2O.

Растворение осадка может произойти и в том случае, если один из ионов будет связываться в комплексный ион.

$$AgCl\downarrow + 2NH_4OH \rightleftharpoons [Ag(NH_3)_2]^+ + Cl^- + 2H_2O$$

Примеры решения задач

Задача. Произведение растворимости $ПР_{PbSO4} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}$г/л. Чему равна растворимость $PbSO_4$?

Решение. Обозначим растворимость $PbSO_4$ через X моль/л. Перейдя в раствор, X молей $PbSO_4$ дадут X ионов Pb^{2+} и X ионов SO_4^{2-}, т.е.:

$$[Pb^{2+}] = [SO_4^{2-}] = X$$

$$ПР_{PbSO4} = [Pb^{2+}] \cdot [SO_4^{2-}] = X^2$$

$$X = \sqrt{(ПР_{PbSO4})} = \sqrt{(2{,}2 10^{-8})} = 1{,}5\ 10^{-4} \text{ моль/л.}$$

Чтобы перейти к растворимости, выраженной в г/л, найденную величину умножим на молекулярную массу, после чего получим:

$$1{,}5 10^{-4} \cdot 303{,}2 = 4{,}5\ 10^{-2} \text{ г/л.}$$

Задача. Растворимость $CaCO_3$ равна $6{,}9 \cdot 10^{-3}$г/л. Найти $ПР_{CaCO3}$.

Решение. Молярная масса $M(CaCO_3) = 100{,}9$

Выразим растворимость (S) в молях: $S(CaCO_3) = (6{,}9 \cdot 10^{-3}) / 100{,}09 = 6{,}9 \cdot 10^{-5}$ моль/л

Так как каждая молекула $CaCO_3$ дает при растворении по одному иону Ca^{2+} и CO_3^{2-}, то $[Ca^{2+}] = [CO_3^{2-}] = 6{,}9 10^{-5}$ моль/л, следовательно,

$$ПР_{CaCO3} = [Ca^{2+}] \cdot [CO_3^{2-}] = 6{,}9\ 10^{-5} \cdot 6{,}9\ 10^{-5} = 4{,}8\ 10^{-9}$$

Задача. Произведение растворимости хлорида свинца $PbCl_2$ при 25 °С составляет $1{,}6 \cdot 10^{-5}$. Как изменится растворимость этой соли в 1 М растворе HCl по сравнению с чистой водой?

Решение. $PbCl_2 = Pb^{2+} + 2Cl^-$, из одной молекулы при диссоциации получается один катион свинца и 2 хлорид - аниона . Следовательно, если растворимость хлорида свинца - (S), то произведение растворимости

$$ПР_{PbCl2} = [Pb^{2+}] \cdot [Cl^-]^2 = S \cdot (2S)^2 = 4S^3$$

Концентрация насыщенного раствора хлорида свинца в воде составит:

$$S = \sqrt[3]{\frac{ПР}{4}} = 1{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ моль/л.}$$

При расчете растворимости в соляной кислоте следует учесть, что в этом случае концентрация хлорид-ионов определяется не только концентрацией соли, но и концентрацией кислоты, причем концентрацией хлорид – ионов, образующейся из малорастворимого соединения можно пренебречь:

$$[Cl^-] = C_{HCl}$$

$$ПР_{PbCl2} = [Pb^{2+}] \cdot [Cl^-]^2 = S \cdot C_{HCl}{}^2$$

Следовательно, $S = 1{,}6 \cdot 10^{-5} / 1^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$

Растворимость по сравнению с чистой водой уменьшилась в 1000 раз.

Задача. Выпадает ли осадок при смешении равных объемов 0,2 М растворов $Pb(NO_3)_2$ и NaCl.

$ПР_{PbCl2} = 1{,}6\ 10^{-5}$.

Решение. При смешении объем раствора возрастает вдвое и концентрация каждого из веществ уменьшится вдвое, т.е. станет 0,1 М или $1 \cdot 10^{-1}$ моль/л. Таковы же будут концентрации Pb^{2+} и Cl^-. Следовательно,

$[Pb^{2+}] \cdot [Cl^-]^2 = 1\ 10^{-1}(1\ 10^{-1})^2 = 1\ 10^{-3}$. Полученная величина превышает $ПР_{PbCl2}$ ($1{,}6\ 10^{-5}$). Поэтому часть соли $PbCl_2$ выпадает в осадок.

Задачи для самостоятельного решения

1. К 10 мл 0,01 М раствора $CaCl_2$ прибавили 10 мл 0,01 М раствора K_2SO_4. Выпадет ли осадок, если $ПР(CaSO_4) = 4*10^{-5}$?
2. $ПР(MgCO_3) = 1{,}0*10^{-5}$. Вычислить $[Mg^{2+}]$ в моль/л и г/л.
3. $ПР(PbJ_2) = 8{,}7*10^{-9}$. Выпадет ли осадок, если смешать равные объёмы 0,002н раствора $Pb(NO_3)_2$ и 0,001 М раствора KJ ?
4. Растворимость $PbBr_2$ равна $2{,}7*10^{-2}$ моль/л. Вычислить ПР $PbBr_2$.
5. Концентрация $[F^-]$ в насыщенном растворе CaF_2 равна $2*10^{-4}$. Найти $ПР(CaF_2)$.

6. ПРBaF_2 при 18 ºС равно 1.7 х 10^{-6}. Вычислить концентрациюионов Ba^{2+} и F^- в насыщенном растворе BaF_2.

7. Определить, образуется ли осадок хлорида свинца $PbCl_2$ при смешивании 0,05М раствора $Pb(NO_3)_2$ с равным объемом

а) 0,05 М раствора KCl

б) 0,5 М раствора KCl

Глава 6. **Оксилительно-восстановительные реакции**

Окислительно-восстановительными реакциями (ОВР) называют реакции, протекающие с изменением степени окисления элементов.

Степени окисления элементов. Окислители и восстановители.

Степень окисления – условный заряд атома, рассчитанный из предположения, что все связи в соединении ионные.

Правила вычисления степени окисления:

1. Сумма степеней окисления всех атомов, входящих в молекулу равно нулю, а всех атомов, составляющих сложный ион – заряду иона.

2. Степень окисления атома в простом веществе равна нулю.

3. Некоторые элементы имеют в соединениях постоянную степень окисления:

Фтор – только –1

Щелочные металлы (Na, K, Li, Rb, Cs) – только +1

Щелочноземельные металлы (Ca, Sr, Ba), Zn, Mg, Be - только +2

Алюминий – только +3.

4. Водород почти во всех соединениях имеет степень окисления +1. Исключение составляют гидриды металлов (NaH, CaH_2 и др.), где степень окисления водорода отрицательна (–1). Кислород почти во всех соединениях имеет степень окисления –2. Исключение составляют фторид кислорода OF_2, (степень окисления кислорода +1) и пероксиды H_2O_2, Na_2O_2 и т.д. (степень окисления кислорода –1).

5. Максимальная положительная степень окисления элемента обычно совпадает с номером его группы в периодической системе. Максимальная отрицательная степень окисления элемента равна максимальной положительной степени окисления минус восемь. Исключение составляют фтор, кислород, железо: их высшая степень окисления выражается числом, значение которого ниже, чем номер группы, к которой они относятся. У элементов подгруппы меди, наоборот, высшая степень окисления больше единицы, хотя они и относятся к I группе.

Во время ОВР происходит обмен электронами: окислитель присоединяет электроны (сам при этом восстанавливается), восстановитель отдает электроны (сам при этом окисляется). Окисление всегда сопровождается восстановлением и наоборот. Число электронов, отдаваемых восстановителем, всегда равно числу электронов, принимаемых окислителем.

Важнейшими окислителями и восстановителями могут быть как простые, так и сложные вещества. Так как окислитель содержит в своем составе элемент, понижающий степень окисления, а восстановитель содержит элемент, степень окисления которого повышается в ходе реакции, окислителями могут быть прежде всего соединения высших ступеней окисления, а восстановителями - низших степеней окисления, присущих данному элементу.

Из простых веществ сильными окислителями являются неметаллы верхней части VI и VII групп периодической системы, за счёт высокой электроотрицательности их атомов. Сильнее всего окислительные свойства выражены у фтора F_2, но в практике чаще пользуются в качестве окислителей кислородом O_2, озоном O_3, хлором Cl_2 и бромом Br_2. К простым веществам – восстановителям относятся водород H_2, углерод С и металлы, из которых на практике чаще применяют алюминий, магний, натрий и цинк.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие окислители: перманганат калия $KMnO_4$; дихромат калия $K_2Cr_2O_7$; растворы азотной кислоты HNO_3 различных концентраций; концентрированная серная кислота H_2SO_4; пероксид (перекись) водорода; оксиды марганца (IV) MnO_2, и свинца (IV) PbO_2; смесь концентрированных азотной и соляной кислот (1:3, «царская водка), хлорная кислота $HClO_4$.

Из сложных веществ в лабораторной практике наиболее часто используются следующие восстановители: иодид калия KI; сульфит натрия Na_2SO_3; сульфид натрия Na_2S и сероводород H_2S; хлорид олова $SnCl_2$, монооксид углерода (угарный газ) аммиак NH_3.

Некоторые из этих веществ проявляют как окислительные, так и восстановительные свойства в зависимости от ОВР: CO, H_2O_2, MnO_2, так как содержат элемент в промежуточной степени окисления.

Вопросы для самостоятельной работы

1. Определите степени окисления всех элементов, входящих в состав следующих веществ:

Номер варианта	Вещества	Номер варианта	Вещества
1	MnO_2, CH_4 , Cl_2, $KMnO_4$	11	HF, Zn, H_3PO_4, NH_4Cl
2	H_2O_2, H_2SO_4, I_2, $K_2Cr_2O_7$	12	H_2SO_3, NaH_2SbO_3, Au, $ZnCl_2$
3	NaH, F_2, K_2HPO_4, N_2H_4	13	NH_4HS, P, C_6H_6, $Ba(ClO_4)_2$
4	OF_2, C_2H_6, O_2, K_2MnO_4	14	$NaNO_2$, $Ca(HS)_2$, Ag, PH_3
5	CaH_2, C_2H_4, Br_2, $Fe_2(SO_4)_3$	15	$BaCO_3$, AsH_3, Ca, Na_3SbO_4
6	PbO_2, C_2H_2, O_3, $MnOHNO_3$	16	HNO_3, Xe, $KClO_4$, NH_4OH
7	Na_2O_2, N_2, H_2O, K_2SiO_3	17	$Sn(OH)_2$, $CuCl_2$, K_2S, Mn
8	H_2S, Mg, Na_3SbO_3, $Cr(OH)_3$	18	Al_2S_3, Na_2SO_3,NaClO, Se
9	Na_2S, NH_3, H_2, $KHCO_3$	19	$NaClO_2$, Al_4C_3, He, $Bi(NO_3)_3$,
10	AlP, CO, HCl, NH_4NO_3	20	$NaHSO_3$, Si, Na_3AsO_3, $Cr(OH)_3$

2. В каких из перечисленных соединений хлор может проявлять только окислительные свойства: NaCl, NaClO, HCl, $KClO_3$, $NaClO_4$, Cl_2O_7, $HClO_2$?

3. В каких из перечисленных соединений азот может проявлять только восстановительные свойства: $NaNO_2$, NO, N_2O_3, N_2H_4, N_2O, HNO_3, N_2O_5, NH_4NO_3, NH_3, NH_4Cl?

4. В каких из перечисленных соединений сера может быть как окислителем, так и восстановителем: H_2SO_4, $Ca(HS)_2$, H_2S, Na_2SO_3, Na_2S, SO_2, $Na_2S_2O_3$, SO_3, SO?

Классификация окислительно–восстановительных реакций

Окислительно-восстановительные реакции обычно разделяют на три типа: межмолекулярные, внутримолекулярные и реакции диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления). Иногда в эту классификацию добавляют четрветрый тип – реакции конпропорционирования.

1) Межмолекулярные реакции протекают с изменением степени окисления атомов, которые находятся в различных молекулах. Например:

$$2\ Al + Fe_2O_3 \xrightarrow{t^o} Al_2O_3 + 2\ Fe,$$

$$C + 4\ HNO_{3(конц)} = CO_2 \uparrow + 4\ NO_2\uparrow + 2\ H_2O.$$

2) К внутримолекулярным реакциям относятся такие реакции, в которых окислитель и восстановитель входят в состав одной и той же молекулы, например:

$$2Cu(NO_3)_2 \xrightarrow{t^o} 2CuO + 4NO_2 + O_2\uparrow$$

$$2\ KNO_3 \xrightarrow{t^o} 2\ KNO_2 + O_2\uparrow.$$

3) В реакциях диспропорционирования (самоокисления-самовосстановления) один и тот же элемент является и окислителем, и восстановителем:

$$Cl_2 + 2\ KOH \xrightarrow{\text{на холоду}} KCl + KClO + H_2O,$$

$$2\ NO_2 + 2\ NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O.$$

4) В реакциях конпропорционирования один и тот же химический элемент, имеющий разные степени окисления, в результате приводится к единой степени окисления:

$$NH_4NO_3 \rightarrow N_2O + 2H_2O$$

$$NH_4NO_2 \rightarrow N_2 + 2H_2O$$

Вопросы для самостоятельной работы

1. Какие из перечисленных веществ могут вступать в реакции диспропорционирования: HNO_3, HNO_2, H_2SO_4, NH_4NO_3, Br_2, H_2O_2, CaH_2?

2. Является ли реакция разложения перманганата калия реакцией диспропорционирования? $2\ KMnO_4 \xrightarrow{t^o} K_2MnO_4 + MnO_2 + 2O_2\uparrow$

Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронного баланса

Для составления уравнений ОВР используются два метода: метод электронного баланса и метод полуреакций (электронно-ионного баланса). При

использовании любого из этих методов прежде всего необходимо определить окислитель и восстановитель, рассчитав степени окисления всех элементов в левой и правой частях уравнения. Затем записать отдельно процесс окисления и процесс восстановления, соблюдая принцип электронного баланса: число электронов, отданных восстановителем, должно быть равно числу электронов, принятых окислителем.

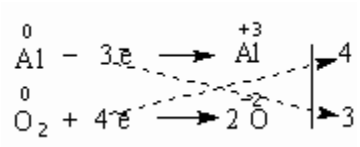
Метод электронного баланса универсален, он позволяет определить коэффициенты реакциях, протекающих как в растворах, так и без растворителя, в веществах в любых агрегатных состояниях. Он удобен для написания реакций термического разложения, взаимодействия двух простых веществ

Пример 1. $Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$

Определим степени окисления:

$$\overset{0}{Al} + \overset{0}{O_2} = \overset{+3\ -2}{Al_2O_3}$$

Алюминий отдает электроны (приобретает положительную степень окисления), а кислород – принимает электроны (приобретает отрицательную степень окисления). Чтобы получить степень окисления +3, атом алюминия должен отдать 3 электрона. Молекула кислорода, чтобы превратиться в кислородные атомы со степенью окисления –2, должна принять 4 электрона:



Чтобы количество отданных и принятых электронов выровнялось, первое уравнение надо умножить на 4, а второе – на 3. Для этого достаточно переместить числа отданных и принятых электронов против верхней и нижней строчки так, как показано на схеме вверху.

Если теперь в уравнении перед восстановителем (Al) мы поставим найденный нами коэффициент 4, а перед окислителем (O_2) – найденный нами коэффициент 3, то количество отданных и принятых электронов выравнивается и становится равным 12. Электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции Al_2O_3 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение

окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$4Al + 3O_2 = 2Al_2O_3$$

Пример 2. $(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^o} N_2 + Cr_2O_3 + H_2O$

Определим степени окисления:

$$\overset{-3+1}{(NH_4)_2}\ \overset{+6}{Cr_2}\ \overset{-2}{O_7} = \overset{0}{N_2} + \overset{+3}{Cr_2}\overset{-2}{O_3} + \overset{+1}{H_2}\overset{-2}{O}$$

Азот отдаёт электроны, хром получает.

$$2N^{-3} - 6\bar{e} = N_2^0$$
$$2Cr^{+6} + 6\bar{e} = 2\ Cr^{+3}$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции H_2O необходим коэффициент 4. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$(NH_4)_2Cr_2O_7 \xrightarrow{t^o} N_2\uparrow + Cr_2O_3 + 4\ H_2O$$

Пример 3. $Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + NO_2 + O_2$

Определим степени окисления:

$$\overset{+2}{Hg}\ \overset{+5}{(N}\ \overset{-2}{O_3)_2} = \overset{0}{Hg} + \overset{+4}{N}\overset{-2}{O_2} + \overset{0}{O_2}$$

Кислород отдаёт электроны, ртуть и азот получают, здесь вместо привычных двух участников обмена электронами их сразу три:

$$2O^{-2} - 4\bar{e} = O_2^0$$
$$2N^{+5} + 1\ \bar{e} = 2\ N^{+4}$$
$$Hg^{+2} + 2\ \bar{e} = Hg^0$$

Число электронов отданных и принятых одинаково, электронный баланс достигнут. Видно, что перед продуктом реакции NO_2 необходим коэффициент 2. Теперь уравнение окислительно-восстановительной реакции уравнено:

$$Hg(NO_3)_2 \rightarrow Hg + 2NO_2 + O_2$$

Задания для самостоятельной работы

1. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций разложения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Mn(NO_3)_2 \rightarrow MnO_2 + NO_2$	11	$BaO_2 \rightarrow BaO + O_2$
2	$K_2MnO_4 \rightarrow K_3MnO_4\ MnO_2 + O_2$	12	$AgNO_3 \rightarrow Ag + NO_2 + O_2$
3	$Zn(NO_3)_2 \rightarrow ZnO + NO_2 + O_2$	13	$FeSO_4 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2 + SO_3$
4	$K_2Cr_2O_7 \rightarrow O_2 + Cr_2O_3 + K_2CrO_4$	14	$KClO_4 \rightarrow KCl + O_2$
5	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	15	$CdSO_3 \rightarrow CdSO_4 + CdS$
6	$KMnO_4 \rightarrow K_2MnO_4 + MnO_2 + O_2$	16	$HNO_3 \rightarrow H_2O + NO_2 + O_2$
7	$Fe(NO_3)_2 \rightarrow Fe_2O_3 + NO_2 + O_2$	17	$NaClO_2 \rightarrow NaClO_3 + NaCl$
8	$HNO_2 \rightarrow NO + NO_2 + H_2O$	18	$KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$
9	$Co(NO_3)_2 \rightarrow CoO + NO_2 + O_2$	19	$SnSO_4 \rightarrow SnO_2 + SO_2$
10	$LiNO_3 \rightarrow Li_2O + NO_2 + O_2$	20	$Ni(NO_3)_2 \rightarrow Ni(NO_2)_2 + O_2$

2. Расставьте коэффициенты уравнениях реакций замещения методом электронного баланса (по вариантам). Укажите окислитель и восстановитель:

Номер варианта	Схема реакции	Номер варианта	Схема реакции
1	$Fe_2O_3 + C \rightarrow CO_2 + Fe$	11	$Zn + AgNO_3 \rightarrow Zn(NO_3)_2 + Ag$
2	$KBr + Cl_2 \rightarrow KCl + Br_2$	12	$Al_2O_3 + Mg \rightarrow MgO + Al$
3	$Fe_2O_3 + H_2 \rightarrow H_2O + Fe$	13	$MnO_2 + Al \rightarrow Al_2O_3 + Mn$
4	$Al + H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2$	14	$H_2S + Br_2 \rightarrow S + HBr$
5	$O_2 + HI \rightarrow H_2O + I_2$	15	$CuCl_2 + Cr \rightarrow Cu + CrCl_3$
6	$Al + CuSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Cu$	16	$Mg + SiO_2 \rightarrow MgO + Si$
7	$Ca + H_2O \rightarrow H_2 + Ca(OH)$	17	$NaI + Cl_2 \rightarrow NaCl + I_2$
8	$TiO_2 + Mg \rightarrow MgO + Ti$	18	$Na + H_2O \rightarrow H_2 + NaOH$
9	$Al + FeO \rightarrow Al_2O_3 + Fe$	19	$KClO_3 + I_2 \rightarrow KIO_3 + Cl_2$
10	$KI + Br_2 \rightarrow KBr + I_2$	20	$Al + H_2O \rightarrow Al(OH)_3 + H_2$

Составление уравнений окислительно-восстановительных реакций. Метод электронно - ионного баланса (метод полуреакций).

Метод полуреакций применим преимущественно для реакций в растворах, зато он позволяет определить коэффициенты не только у окислителя и восстановителя, но и вещества, определяющего среду раствора (кислота, щёлочь, вода), и более удобен для тех реакций, где участвуют органические молекулы. От метода электронного баланса он отличается тем, что окисление и восстановление записывают не для отдельных атомов, а для частиц, реально присуствующих в растворе: катионов, анионов, молекул. Сильные электролиты записываются в виде ионов, слабые электролиты, газы, нерастворимые вещества – в виде молекул. Для материального баланса по кислороду и водороду используются ионы H^+ или OH^- и молекулы воды. При использовании этого метода, кроме алгоритма составления полуреакций, необходимо придерживаться нескольких правил:

1. В кислой среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов OH^- . Уравнивание осуществляется за счет ионов H^+ и молекул воды.
2. В щелочной среде ни в левой, ни в правой части не должно быть ионов H^+. Уравнивание осуществляется за счет ионов OH^- и молекул воды.
3. В нейтральной среде ни ионов H^+, ни OH^-в левой части быть не должно. Однако в правой части среди продуктов реакции они могут появиться.

Алгоритм подбора коэффициентов в уравнениях ОВР методом ионно-электронного баланса:

1. Составить молекулярную схему реакции с указанием исходных веществ и продуктов реакции.

2. Составить полную ионно-молекулярную схему реакции, записывая слабые электролиты, малорастворимые, нерастворимые и газообразные вещества в молекулярном виде, а сильные электролиты – в ионном.

3. Исключив из ионно-молекулярной схемы ионы, не изменяющиеся в результате реакции (без учета их количества), переписать схему в кратком ионно-молекулярном виде.

4. Отметить элементы, изменяющие в результате реакции степень окисления; найти окислитель, восстановитель, продукты восстановления, окисления.

5. Составить схемы полуреакций окисления и восстановления, для этого:

а) указать восстановитель и продукт окисления, окислитель и продукт восстановления;

б) уравнять число атомов каждого элемента в левой и правой частях полуреакций (выполнить баланс по элементам) в последовательности: элемент, изменяющий степень окисления, кислород, другие элементы; при этом следует помнить, что в водных растворах в реакциях могут участвовать молекулы H_2O, ионы H^+ или OH^- в зависимости от характера среды:

Процесс	Кислая среда	Нейтральная среда	Щелочная среда
Связывание избытка кислорода	$O^{-2}+2H^+ =H_2O$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$	$O^{-2}+H_2O=2OH^-$
Восполнение недостатка кислорода	$H_2O= O^{-2}+2H^+$	$H_2O = O^{-2}+2H^+$	$2OH^-=O^{-2}+H_2O$

в) уравнять суммарное число зарядов в обеих частях полуреакций; для этого прибавить или отнять в левой части полуреакций необходимое число электронов (баланс по зарядам).

6. Найти наименьшее общее кратное (НОК) для числа отданных и полученных электронов.

7. Найти основные коэффициенты при каждой полуреакции. Для этого полученное в п.6 число (НОК) разделить на число электронов, фигурирующих в данной полуреакции.

8. Умножить полуреакции на полученные основные коэффициенты, сложить их между собой: левую часть с левой, правую – с правой (получить ионно-молекулярное уравнение реакции). При необходимости “привести подобные” ионы с учетом взаимодействия между ионами водорода и гидроксид-ионами: $H^+ + OH^- = H_2O$.

9. Расставить коэффициенты в молекулярном уравнении реакции.

10. Провести проверку по частицам, не участвующим в ОВР, исключенным из полной ионно-молекулярной схемы (п.3). При необходимости коэффициенты для них находят подбором.

11. Провести окончательную проверку по кислороду.

Пример 3. В кислой среде:

$K_2Cr_2O_7 + KJ + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + J_2 + H_2O + K_2SO_4$

3 $2J^- - 2\bar{e} = J_2$

1 $Cr_2O_7^{2-} + 6\bar{e} + 14H^+ = 2Cr^{+3} + 7H_2O$

Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$K_2Cr_2O_7 + 6KJ + 7H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + 3J_2 + 7H_2O + 4K_2SO_4$

Пример 4. В щелочной среде:

$KCrO_2 + KClO_4 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KCl + H_2O$

8 $CrO_2^- - 3\bar{e} + 4OH^- \rightarrow CrO_4^{2-} + 2H_2O$

3 $ClO_4^- + 8\bar{e} + 4H_2O \rightarrow Cl^- + 8OH^-$

Суммарное молекулярное уравнение реакции

$8KCrO_2 + 3KClO_4 + 8KOH \rightarrow 8K_2CrO_4 + 3KCl + 4H_2O$

Пример 5. В нейтральной среде:

$KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$

3 $Mn - 2\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4H^+$

2 $MnO_4 + 3\bar{e} + 2H_2O = MnO_2 + 4OH^-$

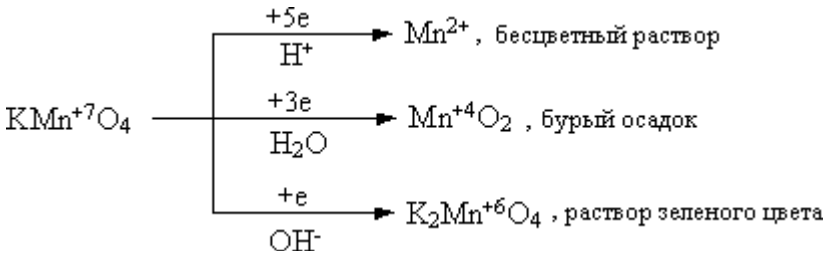
Суммарное молекулярное уравнение реакции:

$2KMnO_4 + 3MnSO_4 + 2H_2O = 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$

Примеры некоторых часто используемых ОВР:

1) Окислительно-восстановительные реакции с участием перманганата калия

В зависимости от среды (кислая, нейтральная, щелочная) перманганат калия, выступая в качестве окислителя, дает различные продукты восстановления:



Ниже приведены реакции $KMnO_4$ с сульфидом калия в качестве восстановителя в различных средах В этих реакциях продуктом окисления сульфид-иона является свободная сера. В щелочной среде молекулы КОН не принимают участие в реакции, а лишь определяют продукт восстановления перманганата калия.

$$5\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 8\ H_2SO_4 = 5\ S\downarrow + 2\ MnSO_4 + 6\ K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$3\ K_2S + 2\ KMnO_4 + 4\ H_2O \rightarrow 2\ MnO_2\downarrow + 3\ S\downarrow + 8\ KOH,$$

$$K_2S + 2\ KMnO_4 \xrightarrow{-(KOH)} 2\ K_2MnO_4 + S\downarrow.$$

2) Окислительно-восстановительные реакции с участием дихромата калия

В кислой среде дихромат калия является сильным окислителем. Смесь $K_2Cr_2O_7$ и концентрированной H_2SO_4 (хромпик, хромовая смесь) широко используется в лабораторной практике в качестве окислителя. Взаимодействуя с восстановителем одна молекула дихромата калия принимает шесть электронов, образуя соединения трехвалентного хрома:

$$6\ FeSO_4 + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ Fe_2(SO_4)_3 + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7\ H_2O;$$

$$6\ KI + K_2Cr_2O_7 + 7\ H_2SO_4 = 3\ I_2\downarrow + Cr_2(SO_4)_3 + 4\ K_2SO_4 + 7\ H_2O.$$

3) Окислительно-восстановительные реакции с участием пероксида водорода

Пероксид водорода и нитрит калия проявляют преимущественно окислительные свойства:

$$H_2S + H_2O_2 = S\downarrow + 2\ H_2O,$$

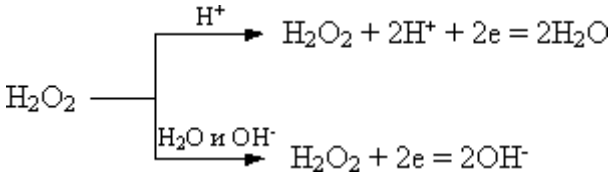
$$2\ KI + 2\ KNO_2 + 2\ H_2SO_4 = I_2\downarrow + 2\ K_2SO_4 + H_2O,$$

Однако, при взаимодействии с сильными окислителями (такими как, например, $KMnO_4$), пероксид водорода и нитрит калия выступают в качестве восстановитеей:

$$5\ H_2O_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ O_2 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 8\ H_2O,$$

$$5\ KNO_2 + 2\ KMnO_4 + 3\ H_2SO_4 = 5\ KNO_3 + 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 3\ H_2O.$$

Пероксид водорода в зависимости от среды восстанавливается по-разному:



При этом в результате реакций образуется вода или гидроксид-ионы:

$$2\ FeSO_4 + H_2O_2 + H_2SO_4 = Fe_2(SO_4)_3 + 2\ H_2O,$$

$$2\ KI + H_2O_2 = I_2\downarrow + 2\ KOH.$$

Задания для самостоятельной работы

Расставьте коэффициенты уравнениях методом полуреакций. Укажите окислитель и восстановитель.

Вариант 1.

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $Br_2 + KOH \rightarrow KBr + KBrO_3 + H_2O$

3) $K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 + H_2O_2 \rightarrow O_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_3H_6 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_2H_6(OH)_2 + KOH$

Вариант 2

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + S\downarrow + H_2O$

2) $S + KOH \rightarrow K_2S + K_2SO_3 + H_2O.$

3) $BaS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + S\downarrow + NO_2\uparrow + H_2O$

4) $CH_2{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 3

1) $Zn + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow ZnSO_4 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $NO_2 + NaOH \rightarrow NaNO_2 + NaNO_3 + H_2O$

3) $CrCl_3 + Cl_2 + H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + HCl$

4) $CH_3C{=}C(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3(CO)CH_3 + H_2O + CH_3COOH$

Вариант 4

1) $Al + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2S\uparrow + H_2O$

2) $AuCl_3 + H_2O_2 + KOH \rightarrow Au + H_2O + O_2\uparrow + KCl$

3) $KMnO_4 + Fe(OH)_2 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + Fe(OH)_3\downarrow + KOH$

4) $C_5H_{10} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH + CH_3COOH$

Вариант 5

1) $Ag + H_2SO_{4(конц., гор.)} \rightarrow Ag_2SO_4\downarrow + SO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $NH_4HS + HNO_{3(конц.)} \rightarrow S\downarrow + 2NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + 2H_2O$

3) $MnSO_4 + H_2O_2 + KOH \rightarrow MnO_2\downarrow + K_2SO_4 + H_2O$

4) $C_6H_{12} + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 6

1) $Bi + H_2SO_4 \rightarrow Bi_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $CuS + HNO_3 \rightarrow NO_2\uparrow + CuSO_4 + H_2O$

3) $C + H_2SO_{4(конц.)} + K_2Cr_2O_{7(конц.)} \rightarrow CO_2\uparrow + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$

4) $HCOH + NaOH + I_2 \rightarrow HCOONa + NaI + H_2O$

Вариант 7

1) $Ag + HNO_{3(разб.)} \rightarrow AgNO_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $Cr_2(SO_4)_3 + Br_2 + KOH \rightarrow K_2CrO_4 + KBr + K_2SO_4 + H_2O$

3) $Br_2 + S + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HBr$

4) $CH_3C{\equiv}CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O$

Вариант 8

1) $Ba + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $MnO_2 + HCl \rightarrow MnCl_2 + H_2O + Cl_2\uparrow$

3) $As_2O_3 + NaOH + NaNO_3 \rightarrow Na_3AsO_4 + NaNO_2 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + KOH + MnO_2\downarrow + H_2O$

Вариант -9

1) $Be + HNO_{3(разб., гор.)} \rightarrow Be(NO_3)_2 + NO\uparrow + H_2O$

2) $P + H_2SO_4 \rightarrow H_3PO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $Bi(NO_3)_3 + NaClO + NaOH_{(конц.)} \rightarrow NaBiO_3\downarrow + NaNO_3 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}C_2H_5 + KMnO_4 \rightarrow C_6H_5COOK + K_2CO_3 + MnO_2 + H_2O$

Вариант 10

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + 2H_2O$

2) $AlBr_{3(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AsH_3 + NaOH_{(разб.)} + NaClO \rightarrow Na_3AsO_4 + NaCl + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 11

1) $Ca + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Ca(NO_3)_2 + N_2O\uparrow + H_2O$

2) $NH_4I_{(тверд.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow I_2\downarrow + H_2S\uparrow + H_2O + NH_4HSO_4$

3) $Bi(OH)_3 + KOH_{(конц.)} + KMnO_4 \rightarrow KBiO_3\downarrow + K_2MnO_4 + H_2O$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O + CO_2\uparrow$

Вариант 12

1) $Ba + HNO_{3(оч.\ разб.)} \rightarrow Ba(NO_3)_2 + NH_4NO_3 + H_2O$

2) $Au_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $HBrO_3 + H_2O + S \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_6H_5\text{-}CH_3 + K_2Cr_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + C_6H_5\text{-}COOH + H_2O$

Вариант 13

1) $Bi + HNO_{3(разб.)} \rightarrow Bi(NO_3)_3 + NO\uparrow + H_2O$

2) $PbO_2 + HCl \rightarrow PbCl_2 + Cl_2 + H_2O$

3) $AsH_3 + H_2O + AgNO_3 \rightarrow As_2O_3\downarrow + Ag\downarrow + HNO_3$

4) $CH_3{\equiv}CCH_3 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_3COOH + H_2O + CO_2$

Вариант 14

1) $Cd + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Cd(NO_3)_2 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $C_2N_2 + KOH \rightarrow KCN + KCNO + H_2O$

3) $H_2SO_3 + I_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + HI$

4) $C_4H_8 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O + C_2H_5COOH$

Вариант 15

1) $Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $AlP + HNO_{3(конц.,\ гор.)} \rightarrow Al(NO_3)_3 + H_3PO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $Br_2 + SO_2 + H_2O \rightarrow HBr + H_2SO_4$

4) $C_2H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 16

1) $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + NO + H_2O$

2) $H_2Cr_2O_7 + H_2O_2 \rightarrow H_2CrO_6 + H_2O.$

3) $Si + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_2H_2 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CO_2\uparrow + H_2O$

Вариант 17

1) $As + H_2SO_{4(конц.,\ гор.)} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $B_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow H_3BO_3\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

3) $SiH_4 + NaOH + H_2O \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2\uparrow$

4) $C_6H_5\text{-}CH(CH_3)_2 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2\downarrow + C_6H_5COOK + K_2CO_3 + KOH$

Вариант 18

1) $Fe + H_2SO_{4(конц.)} \overset{\circ}{\rightarrow} Fe_2(SO_4)_3 + SO_2\uparrow + H_2O$

2) $I_2 + H_2O_2 \rightarrow HIO_3 + H_2O$

3) $B + KOH + H_2O \rightarrow KBO_2 + H_2\uparrow$

4) $C_3H_4 + KMnO_4 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + K_2SO_4 + CH_2(COOH)_2 + H_2O$

Вариант 19

1) $As + HNO_{3(конц.)} \rightarrow H_3AsO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $K_2C_2O_4 + H_2SO_4 \rightarrow KHSO_4 + CO\uparrow + CO_2\uparrow + H_2O$

3) $Pb(CH_3COOH)_2 + CaOCl_2 + H_2O \rightarrow PbO_2\downarrow + CaCl_2 + CH_3COOH$

4) $CH_3COCH_3 + I_2 + NaOH \rightarrow CHI_3 + CH_3COONa + NaI + H_2O$

Вариант 20

1) $C + HNO_{3(конц., гор.)} \rightarrow CO_2\uparrow + NO_2\uparrow + H_2O$

2) $HBr_{(конц.)} + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow Br_2 + SO_2\uparrow + H_2O$

3) $AgNO_3 + NaOH + H_2O_2 \rightarrow Ag\downarrow + NaNO_3 + H_2O + O_2\uparrow$

4) $KMnO_4 + (COOH)_2 + H_2SO_4 \rightarrow MnSO_4 + CO_2\uparrow + K_2SO_4 + H_2O$

Дополнительные уравнения

1. $Au_2S_3 + HNO_{3(конц.)} \rightarrow Au\downarrow + H_2SO_4 + NO_2\uparrow + H_2O$
2. $As_2S_3 + H_2SO_{4(конц.)} \rightarrow As_2O_3\downarrow + SO_2\uparrow + H_2O$
3. $HNO_3 + Cu_2S \rightarrow NO_2\uparrow + H_2O + CuSO_4 + Cu(NO_3)_2$
4. $SiC + NaOH + O_2 \rightarrow Na_2SiO_3 + H_2O + Na_2CO_3$
5. $Bi(NO_3)_3 + Na_2O_2 + NaOH \rightarrow NaBiO_3 + NaNO_2 + H_2O + O_2$
6. $AgCN + HNO_{3(конц., гор.)} \rightarrow AgNO_3 + NO_2\uparrow + NH_4NO_3 + CO_2\uparrow$
7. $Al + NaOH + 6H_2O \rightarrow Na[Al(OH)_4] + H_2$
8. $Au + HCl + HNO_3 \rightarrow H[AuCl_4] + NO + H_2O$
9. $[Co(H_2O)_6]^{2+} + NH_3 + O_2 + H^+ \rightarrow [Co(NH_3)_6]^{3+} + H_2O.$
10. $Au + NaCN + H_2O + O_2 \rightarrow Na[Au(CN)_2] + NaOH$
11. $Pt + HNO_3 + HCl \rightarrow H_2[PtCl_6] + NO + H_2O$
12. $Na[Au(CN)_2] + Zn \rightarrow Na_2[Zn(CN)_4] + Au$
13. $Fe + C_6H_5COONa + H_2O + O_2 \rightarrow [Fe(C_6H_5COOH)_6](OH)_3 + NaOH$

Направление протекания окислительно-восстановительных реакций

Направление протекания ОВР в водном растворе устанавливается в стандартных условиях по значениям **стандартных потенциалов** φ° полуреакций восстановления:

Окисленная форма + ne^- → Восстановленная форма

Окислительно-восстановительные реакции протекают самопроизвольно, если разность стандартных электродных потенциалов окислителя и восстановителя, или э.д.с. окислительно-восстановительной реакции $\Delta E > 0$.

Стандартные условия протекания реакции: температура 298,15 К, давление в системе при отсутствии газообразных реагентов или продуктов 1 атмосфера (101325 Па), парциальное давление каждого газообразного реагента или продукта при их наличии 1 атмосфера. Стандартная концентрация каждой окисленной и восстановленной формы в растворе 1 моль/л. Стандартные потенциалы измеряют по отношению к стандартному водородному электроду, потенциал которого условно принят равным нулю.

Если значение φ° для окислительно-восстановительной пары, отрицательное, например

$Zn^{2+} + 2\ e^- \rightarrow Zn$; φ° = – 0,763 В

то реакция, в которой Zn^{2+} – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется отрицательным значением разности стандартных потенциалов соответствующих пар.

$Zn^{2+} + H_{2(г)} \rightarrow Zn + 2\ H^+_{(р)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = -0{,}763 - (0) = -0{,}763$ В.

Направление ОВР определяет окислитель, у которого значение электродного потенциала больше. На практике самопроизвольно осуществляется обратный процесс: $Zn + 2\ H^+_{(р)} \rightarrow Zn^{2+} + H_{2(г)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = 0 - (-0{,}763) = +0{,}763$ В

Для положительных значений φ°, например пары Cu^{2+} / Cu

$Cu^{2+} + 2\ e^- = Cu$; φ° = + 0,338 В

реакция

$Cu^{2+} + H_{2(г)} = Cu + 2\ H^+_{(р)}$ $\varphi^\circ_{Ок} - \varphi^\circ_{Вс} = +0{,}338 - (0) = +0{,}338$ В

где 2 H^+ – окислитель и H_2 – восстановитель, характеризуется положительным значением разности потенциалов, и может протекать самопроизвольно.

Пример 1. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$2NaCl + Fe_2(SO_4)_3 \leftrightarrow 2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4$

Запишем уравнения электронного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции :

$Cl_2 + 2e^- = 2Cl^-$, $\varphi_1^o = 1{,}36$ В;

$Fe^{3+} + e^- = Fe^{2+}$, $\varphi_2^o = 0{,}77$ В .

Поскольку $\varphi_1^o > \varphi_2^o$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем - ион Fe^{2+}; рассматриваемая реакция будет протекать так:

$2FeSO_4 + Cl_2 + Na_2SO_4 \rightarrow 2NaCl + Fe_2(SO_4)_3$

Пример 2. Установить, в каком направлении возможно самопроизвольное протекание реакции

$K_2Cr_2O_7 + 14HCl \leftrightarrow 2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O$

Запишем уравнения электронно-ионного баланса и стандартные электродные потенциалы электрохимических систем, участвующих в реакции:

$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$ $\varphi^o_1 = +1{,}33$ В

$Cl_2 + 2e = 2Cl^-$ $\varphi^o_2 = +1{,}36$ В

Поскольку $\varphi_2^o > \varphi_1^o$, то окислителем будет служить хлор, а восстановителем – бихромат-ион; рассматриваемая реакция будет протекать так::

$2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + 14HCl$

В примере 1 стандартные электродные потенциалы взаимодействующих электрохимических систем существенно различались, так что направление протекания процесса однозначно определялось значениями φ^o при любых концентрациях реагирующих веществ. В тех случаях, когда сравниваемые

значения φº близки (разность не более 0,3 В), направление протекания процесса может изменяться в зависимости от концентраций участников реакции (пример 2).

Величина окислительно-восстановительного потенциала в условиях, отличающихся от стандартных, определяется уравнением Нернста:

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{RT}{nF} \cdot \ln \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\, d]},$$

где φ – окислительно-восстановительный потенциал в данных условиях, В;

φ^0 – стандартный окислительно-восстановительный потенциал, В;

R – универсальная газовая постоянная (8.314 Дж/(моль·К));

T – абсолютная температура, *K*;

n – число электронов, принимающих участие в потенциалопределяющей полуреакции;

F – постоянная Фарадея (*F* = 96484.56 Кл/моль);

[Ox]– концентрация окисленной формы ионов;

[Red]– концентрация восстановленной формы ионов.

Концентрация твердой фазы принимается за единицу.

Для стандартной температуры 298 К и с переходом от натурального логарифма к десятичному уравнение Нернста будет иметь вид

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0{,}059}{n} \cdot \lg \frac{[Ox]}{[\mathrm{Re}\, d]},$$

Пример 3. Определить направление возможного самопроизвольного протекания реакции

$$2Hg + 2Ag^+ \leftrightarrow 2Ag + Hg_2^{2+}$$

при стандартной температуре и следующих концентрациях ионов:

а) $[Ag^+] = 10^{-4}$ моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-1}$моль/л;

б) $[Ag^+] = 10^{-1}$моль/л , $[Hg_2^{2+}] = 10^{-4}$моль/л.

Выпишем значения стандартных электродных потенциалов взаимодействующих электрохимических систем:

$Hg_2^{2+} + 2e^- = 2Hg$, $\varphi_1^o = 0{,}79$ В;

$Ag^+ + e^- = Ag$, $\varphi_2^o = 0{,}80$ В.

По уравнению Нернста вычислим значения электродных потенциалов при указанных в условиях задачи концентрациях.

а) $\varphi_1 = \varphi_1^o + 0{,}059/2 \cdot \lg [Hg_2^{2+}] = 0{,}79 + 0{,}030 \lg 10^{-1} = 0{,}79 - 0{,}03 = 0{,}76$ В;

$\varphi_2 = \varphi_2^o + 0{,}059 \cdot \lg [Ag^+] = 0{,}80 + 0{,}059 \lg 10^{-4} = 0{,}80 - 0{,}24 = 0{,}56$ В.

В данном случае $\varphi_1 > \varphi_2$, реакция будет протекать справа налево.

б) $\varphi_1 = 0{,}79 + 0{,}030 \cdot \lg 10^{-4} = 0{,}79 - 0{,}12 = 0{,}67$ В;

$$\varphi_2 = 0{,}80 + 0{,}059 \cdot \lg 10^{-1} = 0{,}80 - 0{,}06 = 0{,}74 \text{ В}.$$

Теперь $\varphi_1 < \varphi_2$, и реакция протекает слева направо.

Зависимость окислительной способности некоторых веществ от кислотности среды так же определяется уравнением Нернста. Например, для полуреакции

$$MnO_4^- + 8H^+ + 5e \rightarrow Mn^{2+} + 4\,H_2O$$

окислительно-восстановительный потенциал можно вычислить по формуле

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{0{,}059}{5} \cdot \lg \frac{[MnO^-] \cdot [H^+]^8}{\left[Mn^{2+}\right]^4}, \text{ или}$$

$$\varphi = 1{,}507 + 0{,}012 \cdot \lg \frac{[MnO^-]}{\left[Mn^{2+}\right]^4} - 0{,}095pH$$

Потенциалы процесса зависит от pH среды и будет тем больше, чем кислее раствор. Зависимость окислительного потенциала $KMnO_4$ от концентрации ионов водорода пользуются для фракционного окисления анионов галогенидов до свободных галогенов. При pH от 5 до 6 перманганат окисляет только йодиды до йода (не действуя на бромиды и хлориды), при pH = 3 окисляются бромиды, и только при значительно более высокой кислотности окисляются хлориды.

Задания для самостоятельной работы

Обоснуйте возможность самопроизвольного протекания реакций №1 вашего варианта на стр. 16-19, используя Приложение.

Глава 7. Электролиз водных растворов солей

Электролиз – химическая реакция под действием электрического тока.

Устройство, в котором осуществляют электролиз, называется электролизером. Простейший лабораторный электролизер представляет собой U- образную стеклянную трубку, в которую наливают раствор соли, а в колена помещают электроды, присоединенные к источнику постоянного тока. Таким способом достигается частичное разделение катодного и анодного пространства.

На характер и течение электродных процессов при электролизе большое влияние оказывают состав электролита, растворитель, материал электродов и режим электролиза (напряжение, плотность тока, температура и др.). Прежде всего, надо различать электролиз расплавленных электролитов и их растворов. В последнем случае в электродных процессах будут принимать участие молекулы растворителя – воды.

Электрод, присоединенный к отрицательному полюсу внешнего источника постоянного тока (отрицательно заряженный электрод), называется **катодом.** При электролизе к нему будут двигаться положительно заряженные ионы – **катионы.** На катоде происходит процесс присоединения электронов катионами (или атомами, молекулами), то есть **восстановление.**

Положительно заряженный электрод называется **анодом,** к нему движутся отрицательно заряженные частицы – **анионы**, на нем происходит процесс отдачи электронов, то есть **окисление.**

Следует обратить внимание на название электродов: в **гальваническом элементе** отрицательный электрод – анод, а положительный – катод; в **электролизере**, наоборот, отрицательный электрод – катод, а положительный – анод.

Принципиальное различие между реакциями в гальваническом элементе и электролизере заключается только в их направлении и самопроизвольности. В замкнутой цепи гальванического элемента окислительно-восстановительная реакция протекает самопроизвольно, а в электролизере – только под воздействием электрического тока внешнего источника. Общее в этих процессах состоит в том, что как в гальваническом элементе, так и в электролизере на отрицательном

электроде создается избыток электронов, а на положительном – их недостаток. На катоде ионы (или молекулы) восстанавливаются под действием электронов, а на аноде частицы окисляются, отдавая свои электроны электроду.

Используемые электроды могут быть нерастворимыми (инертными, пассивными). К ним относятся угольные или графитовые электроды, а также электроды, изготовленные из металлов, покрытых прочной оксидной пленкой или образующие в данном растворе труднорастворимые соли (платина, титан, иридий, тантал, золото). Растворимые (активные) аноды изготовляются из цинка, кадмия, никеля, олова, свинца, сурьмы, меди, серебра. Они принимают участие в электродных процессах.

Особенности катодных процессов в водных растворах

Рассмотрим процессы, которые могут протекать на катоде при электролизе водных растворов солей:

1. При электролизе к катоду будут двигаться катионы металла, которые могут разряжаться, принимая электроны и восстанавливаясь до металла, осаждающегося на электроде.

$$Me^{n+} + n\,e = Me^0$$

Для этого нужно приложить потенциал, соответствующий стандартному электродному потенциалу этого металла $E^0_{Me^0/Me^{n+}}$ (см. приложение I, табл. 1).

2. Под действием электрического тока молекулы воды, имеющие дипольное строение, будут ориентироваться положительно заряженным концом диполя у катода. При этом они могут восстанавливаться по уравнению:

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH$$

На электроде будет выделяться водород, а в прикатодном пространстве появятся гидроксид-ионы. Значение стандартного окислительно-восстановительного потенциала этого процесса $E^0_{H_2/\,2H_2O^-} = 0{,}41$ В при pH=7. Однако, выделение на катоде газообразного водорода затрудняется из-за *перенапряжения* (см. приложение II) и требует большего потенциала: 0,83 В.

Следует иметь в виду, что из двух возможных катодных процессов наиболее вероятно будет протекать тот, который требует наименьшей затраты энергии, то есть тот процесс, у которого алгебраическая величина стандартного электродного потенциала больше.

Руководствуясь рядом значений стандартных электродных потенциалов, можно указать три случая:

1. Катионы металлов, имеющих малую алгебраическую величину стандартного электродного потенциала (от Li^+ до Mn^{2+} включительно, $E^0_{Me^0/Me^{n+}} \leq \leq E^0_{Mn^0/Mn^{2+}} = 1{,}05$ В), обладают меньшей окислительной способностью, чем молекулы воды. Поэтому они не восстанавливаются на катоде, а вместо них восстанавливаются молекулы воды:

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-.$$

2. Катионы металлов, имеющих стандартный потенциал меньший, чем у водорода ($E^0_{H_2/2H^+} = 0$ при pH=0), но больший, чем у марганца ($E^0_{Me^0/Me^{n+}} > > E^0_{Mn^0/Mn^{2+}} = 1{,}05$ В) при электролизе восстанавливаются на катоде. И эти металлы могут быть получены электролизом водных растворов их солей. Однако, при этом возможно одновременное восстановление молекул воды:

$$Me^{n+} + n\,e = Me^0$$

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-.$$

3. Катионы металлов, имеющие высокие значения электродных потенциалов ($E^0_{Me^0/Me^{n+}} > 0$, от Sb^{3+} до Au^{3+}), при электролизе практически полностью восстанавливаются на катоде:

$$Me^{n+} + n\,e = Me^0.$$

Если к раствору, содержащему катионы различных металлов, приложить постепенно возрастающее напряжение, то электролиз начинается тогда, когда достигается *потенциал осаждения* катиона с самым высоким электродным потенциалом (наиболее положительным). После восстановления этих катионов на катоде начнется выделение катионов другого металла в порядке уменьшения алгебраической величины стандартного электродного потенциала. Таким образом,

при электролизе возможно последовательное выделение металлов из раствора, содержащего смесь катионов различных металлов.

Особенности анодных процессов в водных растворах

Характер реакций, протекающих на аноде, зависит не только от природы электролита, присутствия молекул воды, но и от природы вещества, из которого сделан анод.

В случае ***нерастворимого анода*** возможно протекание следующих процессов:

1. Диполи воды, ориентируясь отрицательно заряженной стороной к аноду, могут окисляться по уравнению:

$$2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+.$$

Стандартный окислительно-восстановительный потенциал этого процесса $E^0_{2H_2O/O_2} = +1{,}23$ В, но выделение кислорода происходит с перенапряжением при более высоких значениях потенциала (+1,8 В).

2. Может происходить окисление анионов кислотных остатков, которые под действием приложенного напряжения будут двигаться к аноду. Причем окисление будет происходить тем легче, чем меньше алгебраическая величина окислительно-восстановительного потенциала аниона (см. приложение III, табл. 2).

Анионы бескислородных кислот, за исключением фторид-ионов, при их достаточной концентрации окисляются довольно легко, значения их окислительно-восстановительных потенциалов меньше +1,8 В (см. приложение III, табл. 2). Например, $2Br^- \; 2e = Br_2$ ($E^0_{Br^-/Br_2} = +1{,}09$ В). Большинство **анионов кислородсодержащих кислот** (например, SO_4^{2-}, NO_3^-, CO_3^{2-}, PO_4^{3-}), кроме ацетат-иона, в водном растворе не разряжаются. Вместо них в нейтральных и кислых растворах происходит разложение воды: $2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+$, а в щелочных растворах окисление гидроксид-ионов $4OH^- - 4e = O_2 + 2H_2O$.

В том случае, когда при электролизе используют металлический **растворимый анод,** наиболее легко будет протекать процесс окисления (растворения) самого анода (см. значения электродных потенциалов металлов, табл. 1): $Me^0 - ne = Me^{n+}$. Одновременно на катоде будет происходить процесс

восстановления ионов металлов. Таким образом, электролиз с растворимым анодом сводится к переносу металла с анода на катод. Этот процесс применяется для очистки металлов (*электрорафинирование*).

Таким образом, при рассмотрении электролиза водных растворов солей, необходимо учитывать, что в процессе может принимать участие как электролит, так и молекулы растворителя. Продукты восстановления и окисления будут **основными** или **первичными** продуктами электролиза, а в прикатодном и прианодном пространствах будут накапливаться **побочные** или **вторичные** продукты. В том случае, когда при электролизе раствора соли в электродных процессах принимает участие только вода, в прикатодном пространстве накапливается щелочь, а в прианодном пространстве – кислота. Если электролиз проводится в химическом стакане или другом подобном сосуде, растворы кислоты и щелочи смешиваются и электролиз сводится к образованию водорода и кислорода за счет разложения воды. Если же катодное и анодное пространства разделить перегородкой – *диафрагмой,* пропускающей ионы-переносчики тока, но препятствующей смешению приэлектродных растворов, то в качестве вторичных продуктов электролиза можно получить растворы кислоты и щелочи.

Примеры решения задач

Рассмотрим несколько примеров электролиза водных растворов солей.

П р и м е р 1. Как протекает электролиз водного раствора хлорида меди (II) с инертными угольными электродами?

1. Рассмотрим состав электролита. Для этого запишем уравнение процесса электролитической диссоциации:

$$CuCl_2 = Cu^{2+} + 2Cl^-.$$

2. Определим, какие частицы будут участвовать в **катодном** процессе.

На катоде возможно восстановление ионов меди. Запишем уравнение реакции восстановления и выпишем значение стандартного электродного потенциала (см. приложение I, табл. 1):

$$Cu^{2+} + 2e = Cu^0, \quad E^0_{Cu^0/\,Cu^{2+}} = +0{,}34\ \text{В}. \qquad (1.1)$$

Поскольку электролизу подвергается **раствор** электролита, на катоде также возможно восстановление молекул воды:

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-, \quad E^0_{H_2/2H_2O} = 0{,}41 \div 0{,}83 \text{ В}. \qquad (1.2)$$

Большей окислительной способностью обладают ионы меди (значение стандартного электродного потенциала более положительное), поэтому на катоде будет протекать процесс (1.1).

3. Определим, какие частицы будут участвовать в **анодном** процессе.

На инертном аноде возможно окисление хлорид-ионов и окисление молекул воды. Запишем уравнения соответствующих реакций окисления и выпишем значения их окислительно-восстановительных потенциалов (см. приложение III, табл. 2):

$$2Cl^- \; 2e = Cl_2, \quad E^0_{2Cl^-/Cl_2} = 1{,}36 \text{ В} \qquad (1.3)$$

$$2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+, \quad E^0_{2H_2O/O_2} = +1{,}23 \ldots + 1{,}8 \text{ В}. \qquad (1.4)$$

Так как перенапряжение выделения кислорода велико, окисление хлорид-ионов происходит легче (сравните электродные потенциалы: $E^0_{2Cl^-/Cl_2} = 1{,}36$ В $<<$ $E_{2H_2O/O_2} = +1{,}8$ В, потенциала разряжения молекул воды). Следовательно, на аноде будет выделяться хлор (процесс (1.3)).

4. Составим суммарное ионное уравнение и от него перейдем к молекулярному уравнению окислительно-восстановительной реакции, протекающей при электролизе раствора хлорида меди.

Катод (): $Cu^{2+} + 2e = Cu^0$

Анод (+): $2Cl^- \; 2e = Cl_2$

$$Cu^{2+} + 2Cl^- = Cu^0 + Cl_2$$

$$CuCl_2 \xrightarrow{\text{Электролиз}} Cu^0 + Cl_2\uparrow$$

Таким образом, из этого уравнения следует, что в процессе электролиза водного раствора хлорида меди принимает участие только электролит.

П р и м е р 2. Как протекает электролиз водного раствора нитрата цинка с инертными графитовыми электродами?

1. Рассмотрим состав электролита:

$$Zn(NO_3)_2 = Zn^{2+} + 2NO_3^-.$$

2. Определим, какие частицы будут участвовать в **катодном** процессе.

На катоде возможно восстановление ионов цинка и восстановление молекул воды. Для выбора процесса выпишем из таблицы значение стандартного электродного потенциала: $E^0_{Zn^0/\ Zn^{2+}}$ = 0,76 В. По величине E^0 цинк относится к группе металлов, катионы которых участвуют в катодном процессе: $E^0 > 1{,}05$В (потенциала выделения марганца). Одновременно будет происходить восстановление молекул воды. Изменяя условия протекания электролиза, можно добиться преимущественного осаждения металла.

Катод (): $Zn^{2+} + 2\,e = Zn^0$ или только $Zn^{2+} + 2\,e = Zn^0$

$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$

3. Определим **анодный** процесс. Электроды – инертные, следовательно, на аноде будет протекать окисление анионов кислотных остатков или молекул воды. Ион NO_3^- является анионом кислородсодержащей кислоты. Такие анионы не принимают участие в анодных процессах. Следовательно, на аноде будет протекать окисление молекул воды:

Анод (+): $2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+$.

4. Запишем суммарное уравнение электролиза нитрата цинка.

Катод () $Zn^{2+} + 2\,e = Zn^0$

$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$

Анод (+): $2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+$

$$Zn^{2+} + 4\,H_2O = Zn^0 + H_2\uparrow + O_2\uparrow + (2H^+ + 2OH^- = 2H_2O) + 2H^+$$

$$Zn^{2+} + 2\,H_2O = Zn^0 + H_2\uparrow + O_2\uparrow + 2H^+$$

$$Zn(NO_3)_2 + 2\,H_2O \xrightarrow{\text{электролиз}} Zn^0 + H_2\uparrow + O_2\uparrow + 2HNO_3$$

или

Катод (-): $Zn^{2+} + 2\,e = Zn^0 \mid 2$

Анод (+): $2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+ \mid 1$

$$2Zn^{2+} + 2\,H_2O = 2Zn^0 + O_2\uparrow + 4H^+$$

$$2Zn(NO_3)_2 + 2\,H_2O \xrightarrow{\text{электролиз}} 2Zn^0 + O_2\uparrow + 4HNO_3$$

Таким образом, путем электролиза раствора нитрата цинка можно получить цинк, кислород и вторичный продукт электролиза – азотную кислоту, которая накапливается в прианодном пространстве.

П р и м е р 3. Как протекает электролиз водного раствора сульфата калия с платиновыми электродами?

1. Рассмотрим состав электролита. Для этого запишем уравнение процесса электролитической диссоциации:

$$K_2SO_4 = 2K^+ + SO_4^{2-}.$$

2. Определим, какие частицы будут участвовать в **катодном** процессе.

На катоде возможно протекание следующих процессов: восстановления ионов калия и восстановления молекул воды. Запишем уравнения реакции восстановления и выпишем значение стандартного электродного потенциала (см. приложение I, табл. 1)

$$K^+ + e = K^0, \qquad E^0_{K^0/K^+} = 2{,}92\ \text{В} \qquad (3.1)$$

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-, \quad E^0_{H_2/2H_2O} = 0{,}41 \ldots 0{,}83\text{В} \qquad (3.2)$$

Так как $E^0_{K^0/K^+} < E^0_{H_2/2H_2O}$, следовательно, ионы калия более слабые окислители, поэтому на катоде будет протекать процесс (3.2).

3. Определим, какие частицы будут участвовать в **анодном** процессе.

Так как анионы кислородсодержащих кислот не принимают участие в электродном процессе, на инертном платиновом аноде будет происходить окисление молекул воды.

$$2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+$$

4. Составим суммарное ионное уравнение и от него перейдем к молекулярному уравнению окислительно-восстановительной реакции, протекающей при электролизе раствора сульфата калия.

Катод (-): $2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^- \mid 2$

Анод (+): $2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+ \mid 1$

$$6H_2O = 2H_2 + 4OH^- + O_2 + 4H^+$$

Если катодное и анодное пространства не разделены диафрагмой, то при перемешивании ионы H^+ и OH^- взаимодействуют и образуют воду. Поэтому окончательное уравнение будет иметь вид:

$$2\ H_2O \text{ ======== } 2H_2\uparrow + O_2\uparrow$$

Таким образом, из этого уравнения следует, что процесс электролиза водного раствора сульфата калия сводится к электролизу воды, а количество растворенной соли остается неизменным, ее роль сводится лишь к созданию токопроводящей среды.

П р и м е р 4. Как протекает электролиз водного раствора бромида натрия с инертными иридиевыми электродами?

1. Рассмотрим состав электролита. Для этого запишем уравнение процесса электролитической диссоциации:

$$NaBr = Na^+ + Br$$

2. Определим, какие частицы будут участвовать в **катодном** процессе.

На катоде возможно протекание следующих процессов: восстановления ионов натрия и восстановления молекул воды. Запишем уравнения реакции восстановления и выпишем значение стандартного электродного потенциала (см. приложение I, табл. 1).

$$Na^+ + e = Na^0, \quad E^0_{Na^0/Na^+} = 2{,}71 \text{ В} \qquad (4.1)$$

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-, \; E^0\ H_2/\ 2H_2O = 0{,}41 \ldots 0{,}83 \text{ В} \qquad (4.2)$$

Так как $E^0_{Na^0/\ Na^+} < E^0_{\ H_2/\ 2H_2O}$, следовательно, ионы натрия более слабые окислители, поэтому на катоде будет протекать процесс (4.2).

3. Определим, какие частицы будут участвовать в **анодном** процессе.

На инертном аноде возможно окисление бромид-ионов и окисление молекул воды. Запишем уравнения соответствующих реакций окисления и выпишем значения их окислительно-восстановительных потенциалов (см. приложение III, табл. 2).

$$2Br^- \ 2e = Br_2 \qquad E^0_{\ 2Br^-/Br_2} = 1{,}36 \text{ В}$$

$$2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+, \quad E^0_{2H_2O/O_2} = +1{,}23 \quad + 1{,}8 \text{ В}$$

Окисление бромид-ионов протекает легче, так как $E^0_{\ 2Br^-/Br_2} < E^0_{2H_2O/O_2}$, следовательно, на аноде будет выделяться бром.

4. Составим суммарное ионное уравнение и от него перейдем к молекулярному уравнению окислительно-восстановительной реакции, протекающей при электролизе раствора бромида калия.

Катод (-): $2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$

Анод (+): $2Br^- - 2e = Br_2$

$$2H_2O + 2Br^- = H_2 + 2OH^- + Br_2$$

$$2NaBr + 2H_2O \xrightarrow{\text{Электролиз}} H_2\uparrow + Br_2 + 2NaOH$$

Таким образом, при электролизе водного раствора бромида натрия образуется водород, бром и побочный продукт электролиза – щелочь (NaOH).

П р и м е р 5. Как протекает электролиз водного раствора нитрата кадмия $Cd(NO_3)_2$ с анодом из кадмия?

1. Рассмотрим состав электролита. Для этого запишем уравнение процесса электролитической диссоциации:

$$Cd(NO_3)_2 = Cd^{2+} + 2NO_3^-$$

2. Определим, какие частицы будут участвовать в **катодном** процессе.

На катоде возможно восстановление ионов кадмия. Запишем уравнение реакции восстановления и выпишем значение стандартного электродного потенциала (см. приложение I, табл.1)

$$Cd^{2+} + 2e = Cd^0, \quad E^0_{Cd^0/Cd^{2+}} = 0{,}40\ В \qquad (5.1)$$

Поскольку электролизу подвергается раствор электролита, на катоде также возможно восстановление молекул воды

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-, \quad E^0_{H_2/2H_2O} = 0{,}41 \quad 0{,}83В \qquad (5.2)$$

Большей окислительной способностью обладают ионы кадмия (значение стандартного электродного потенциала более положительное), поэтому на катоде будет протекать процесс (5.1).

3. Определим, какие частицы будут участвовать в **анодном** процессе, принимая во внимание, что анод сделан из кадмия. Анионы кислородсодержащих кислот не принимают участие в анодных процессах. Поэтому на аноде возможно окисление молекул воды и окисление материала анода – кадмия. Последний процесс требует меньше энергии: сравните стандартные электродные потенциалы

$E^0_{Cd^0/\ Cd^{2+}}$ = 0,40 В < $E^0_{2H_2O/O_2}$ = +1,23 В. Следовательно, при электролизе будет происходить анодное растворение металла.

4. Запишем уравнения катодного и анодного процессов:

Катод (-): $Cd^{2+} + 2e = Cd^0$

Анод (+): $Cd^0 - 2e = Cd^{2+}$

$0 = 0$

При суммировании этих процессов не получается общее уравнение электролиза. Это говорит о том, что в данном случае процесс сводится к анодному окислению кадмия и катодному восстановлению его ионов, то есть переносу кадмия с анода на катод.

П р и м е р 6. В какой последовательности будут восстанавливаться ионы металлов при пропускании электрического тока через раствор, содержащий нитраты серебра, алюминия, хрома (III) и меди (II)?

Раствор этих солей содержит катионы Ag^+, Al^{3+}, Cr^{3+} и Cu^{2+}, образовавшиеся в результате электролитической диссоциации. Эти ионы должны восстанавливаться на катоде в порядке уменьшения их окислительной активности. Количественной характеристикой окислительно-восстановительной активности вещества является величина стандартного электродного потенциала. Окислительная активность катионов будет уменьшаться в порядке уменьшения алгебраической величины их стандартных электродных потенциалов.

1. Выпишем из таблицы значения $E^0_{Me^0/Me^{n+}}$ (см. приложение I, табл. 1).

$E^0_{Ag^0/Ag^+}$ = +0,80 В; $E^0_{Al^0/Al^{3+}}$ = 1,67 В; $E^0_{Cr^0/Cr^{3+}}$ = 0,71 В; $E^0_{Cu^0/Cu^{2+}}$ = +0,34 В.

2. Сравним эти величины: $E^0_{Ag^0/Ag^+} > E^0_{Cu^0/Cu^{2+}} > E^0_{Cr^0/Cr^{3+}} > E^0_{Al^0/Al^{3+}}$, следовательно, легче всего будут восстанавливаться катионы серебра, затем ионы меди и хрома:

$$Ag^+ + e = Ag^0$$

$$Cu^{2+} + 2e = Cu^0$$

$$Cr^{3+} + 3e = Cr^0$$

Катионы алюминия никогда не будут восстанавливаться на **катоде** при электролизе водных растворов, так как $E^0_{Al^0/Al^{3+}}$ < 0,83 В – потенциала, при котором восстанавливаются молекулы воды:.

$$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-.$$

П р и м е р 7. При электролизе водного раствора соли значение pH в приэлектродном пространстве одного из электродов возросло. Раствор какой соли при этом подвергался электролизу: а) KCl; б) $Cu(NO_3)_2$?

Рассмотрим электролиз растворов этих солей, то есть определим, какие частицы будут участвовать в катодном и анодном процессах, и составим суммарное уравнение соответствующей окислительно-восстановительной реакции, протекающей при электролизе.

а) соль KCl

Уравнение диссоциации соли: $KCl = K^+ + Cl^-$

При электролизе раствора этой соли на катоде будет происходить восстановление молекул воды (см. выбор катодного процесса в примере 3), а на аноде – окисление хлорид-ионов (см. выбор анодного процесса в примере 1).

Катод (): $2H_2O + 2e = H_2 + 2OH$

Анод (+): $2Cl^- \ 2e = Cl_2$

$$2H_2O + 2Cl^- = Cl_2\uparrow + H_2\uparrow + 2OH^-$$

$$2H_2O + 2KCl \xrightarrow{\text{электролиз}} Cl_2\uparrow + H_2\uparrow + 2KOH$$

б) соль $Cu(NO_3)_2$

Уравнение диссоциации соли $Cu(NO_3)_2 = Cu^{2+} + 2NO_3^-$

При электролизе раствора этой соли на катоде будет происходить восстановление ионов меди (см. выбор катодного процесса в примере 1), а на аноде – окисление молекул воды (см. выбор анодного процесса в примере 2).

Катод (): $Cu^{2+} + 2e = Cu^0 \quad | 2$

Анод (+): $2H_2O - 4e = O_2 + 4H^+ \ | 1$

$$2Cu^{2+} + 2\,H_2O = 2Cu^0 + O_2\uparrow + 4H^+$$

$$2Cu(NO_3)_2 + 2\,H_2O \xrightarrow{\text{электролиз}} 2Cu^0 + O_2\uparrow + 4HNO_3$$

Значение pH водного раствора повышается в том случае, когда в растворе появляются гидроксид-ионы. Следовательно, электролизу подвергался раствор

хлорида калия, так как только в этом случае в прикатодном пространстве образуется основание КОН.

Задачи для самостоятельной работы

1. Как протекает электролиз водных растворов веществ с инертными электродами? Запишите катодный и анодный процессы, составьте итоговое уравнение электрлиза.

Номер варианта	Вещество	Номер варианта	Вещество	Номер варианта	Вещество
1	$KMnO_4$	8	$BeSO_4$	15	K_2SO_4
2	$K_2Cr_2O_7$	9	Na_2CO_3	16	K_2S
3	K_2HPO_4	10	HF	17	$MgCl_2$
4	$CuCl_2$	11	H_3PO_4	18	$CoBr_2$
5	$Fe_2(SO_4)_3$	12	$ZnCl_2$	19	$Bi(NO_3)_3$
6	K_2SiO_3	13	$Al_2(SO_4)_3$	20	$NaHSO_3$
7	$NiSO_4$	14	$Ca(NO_3)_2$		

2. Покажите, используя значения стандартных электродных потенциалов, в какой последовательности будут восстанавливаться ионы металлов при пропускании электрического тока через раствор, содержащий следующие соли:

Номер варианта	Соли	Номер варианта	Соли
1	$Pb(NO_3)_2$, KNO_3, $Cu(NO_3)_2$	11	$Pb(NO_3)_2$, $Mg(NO_3)_2$, $Co(NO_3)_2$
2	$AgNO_3$, $Mg(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$	12	$Pb(NO_3)_2$, $Ni(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$
3	$NaNO_3$, $Mg(NO_3)_2$, $Co(NO_3)_2$	13	$Zn(NO_3)_2$, $Mg(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$
4	$Pb(NO_3)_2$, $Al(NO_3)_3$, $AgNO_3$	14	$Ca(NO_3)_2$, $Ni(NO_3)_2$, $Hg(NO_3)_2$
5	$Pb(NO_3)_2$, $LiNO_3$, $Cr(NO_3)_3$	15	$Al(NO_3)_3$, $Mn(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$
6	$Hg(NO_3)_2$, $Mn(NO_3)_2$, $RbNO_3$	16	$Pb(NO_3)_2$, $CsNO_3$, $Hg(NO_3)_2$
7	$Ni(NO_3)_2$, $La(NO_3)_3$, $Cu(NO_3)_2$	17	$Co(NO_3)_2$, $Fe(NO_3)_2$, $Cr(NO_3)_3$

8	$Pb(NO_3)_2$, $Mn(NO_3)_2$, $Cd(NO_3)_2$	18	$Pb(NO_3)_2$, $Mg(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$
9	$Sn(NO_3)_2$, $AgNO_3$, $Cu(NO_3)_2$	19	$Bi(NO_3)_3$, $Fe(NO_3)_2$, $Al(NO_3)_3$
10	$Pb(NO_3)_2$, $Al(NO_3)_3$, $TlNO_3$	20	$Pb(NO_3)_2$, $Mg(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$

3. При электролизе водного раствора соли значение pH в приэлектродном пространстве одного из электродов уменьшилось. Раствор какой из двух солей при этом подвергался электролизу? Ответ обоснуйте.

Номер варианта	Соли	Номер варианта	Соли
1	а) NaCl; б) $Cu(NO_3)_2$	11	а) K_2S; б) $Pb(NO_3)_2$
2	а) $CuCl_2$; б) $AgNO_3$	12	а) LiCl; б) $Ni(NO_3)_2$
3	а) KCl; б) $CuSO_{42}$	13	а) NaBr; б) $CoSO_4$
4	а) $AlCl_3$; б) $Co(NO_3)_2$	14	а) Na_2S; б) $Ni(NO_3)_2$
5	а) KI; б) $BeSO_4$	15	а) $CaCl_2$; б) $Co(NO_3)_2$
6	а) NaI; б) $NaNO_3$	16	а) NaHS; б) $NiSO_4$
7	а) KBr; б) $CuSO_4$	17	а) KI; б) KF
8	а) KF; б) $CuCl_2$	18	а) KCl; б) $Bi(NO_3)_3$
9	а) NaCl; б) $AgNO_3$	19	а) NaBr; б) NaF
10	а) $NiCl_2$; б) $Hg(NO_3)_2$	20	а) $MgCl_2$; б) $Cu(NO_3)_2$

Электролиз расплавов электролитов

Все вышеизложенные закономерности электролиза распространяются и на электролиз расплавов электролитов. Отсутствие в этом случае воды сказывается на характере электродных процессов. Простейшим примером такого электролиза может служить электролиз расплава хлорида натрия с применением нерастворимых электродов.

Известно, что расплавы солей являются сильными электролитами и при высоких температурах полностью диссоциируют на ионы.

$$NaCl \overset{t^0}{===} Na^+ + Cl^-$$

При электролизе расплава на катоде будет происходить процесс восстановления ионов Na^+, а на аноде – процесс окисления ионов Cl^-. При сложении уравнений двух электродных процессов получается суммарное уравнение окислительно-восстановительной реакции, протекающей при электролизе расплава NaCl.

Катод () $Na^+ + e = Na^0 \mid 2$

Анод (+) $2Cl^- - 2e = Cl_2 \mid 1$

$$2Na^+ + 2Cl^- \overset{\text{Электролиз}}{========} 2Na^0 + Cl_2^0\uparrow$$

$$2NaCl \overset{\text{Электролиз}}{========} 2Na^0 + Cl_2^0\uparrow$$

Таким образом, при электролизе расплава хлорида натрия получается металлический натрий и хлор. Если применять растворимый электрод, то и в расплавах может происходить анодное растворение металла.

Электролизом в расплавах получают активные щелочные и щелочноземельные металлы: литий, калий, магний и др., которые не могут быть получены в водных растворах.

Весь производимый промышленностью алюминий получают электролизом расплава боксита $Al_2O_3 \cdot nH_2O$ (n=1,2,3) в смеси с криолитом Na_3AlF_6. Алюминий восстанавливается на катоде, а анод, изготовленный из угля, окисляется до

углекислого газа, то есть в целом под действием электрического тока происходит реакция:

$$2Al_2O_3 + 3C \xrightarrow{\text{электролиз}} 4Al + 3CO_2.$$

Законы Фарадея

Количество вещества, выделившегося при электролизе, может быть определено с помощью законов Фарадея.

Первый закон Фарадея: масса веществ, выделившихся на электродах при электролизе, прямо пропорциональна количеству электричества, прошедшему через раствор или расплав электролита.

Второй закон Фарадея: масса веществ, выделяющихся на электродах при прохождении через растворы или расплавы электролитов одинакового количества электричества, прямо пропорциональна их химическим эквивалентам.

Другими словами, для выделения на электроде одного эквивалента любого вещества необходимо затратить одно и то же количество электричества, равное ***постоянной Фарадея*** F = 96485 Кл/моль (≈ 96500 Кл/моль). Именно такое количество электричества необходимо, чтобы восстановить N_A (число Авогадро) $=6{,}02 \cdot 10^{23}$ однозарядных ионов. ***Молярная масса эквивалента*** $M_Э$ (г/моль) равна атомной массе элемента, деленной на величину заряда иона в соединении. ***Электрохимическим эквивалентом*** вещества называют величину $E=M_Э/F$. Данная величина характеризует массу вещества, окисляющегося или восстанавливающегося на электродах при прохождении через электролит 1Кл электричества.

Законы Фарадея можно объединить в следующей формуле:

$$m = \frac{M_э \cdot Q}{F} \quad \text{или} \quad m = \frac{M_э \cdot I \cdot t}{F},$$

где m – масса вещества, выделившегося на электроде, г;

$M_э$ – молярная масса эквивалента вещества, г/моль;

I – сила тока, А;

t – продолжительность электролиза, с;

Q – количество электричества, прошедшего через электролит, Кл; $Q = I \cdot t$

F – постоянная Фарадея, F = 96500 Кл/моль = 26,8 А · ч/моль .

Следует учитывать, что при практическом проведении электролиза возможно протекание побочных процессов, например: взаимодействие образовавшегося вещества с электродом или электролитом, выделение наряду с металлом водорода и др., поэтому действительный расход количества электричества обычно превышает его количество, рассчитанное по законам Фарадея. В связи с этим введено понятие «выход по току» (A_m, % или η, %). Это отношение массы действительно получаемого вещества ($m_{эксп.}$) к массе, теоретически вычисленной, то есть $A_m = (m_{эксп} / m_{теор}) \cdot 100$ %,

$$A_T = \frac{m_{эксп.} \cdot 96500}{M_э \cdot I \cdot t} \cdot 100\ \%$$

Пример решения задачи

Через раствор $AgNO_3$ пропускался ток силой в 5 А в течение 15 мин. Масса выделившегося серебра 5,01 г. Какому выходу по току это соответствует?

По условию задачи нам известна масса серебра, фактически выделившегося при электролизе. Следовательно, для того чтобы определить выход по току, мы должны вычислить массу серебра, которая теоретически должна была выделиться на катоде.

$$Ag^+ + e = Ag^0$$

Записываем математическое выражение закона Фарадея:

$$m = \frac{M_э \cdot I \cdot t}{F}$$

Из условий задачи нам известны сила тока I = 5 А и время пропускания тока t = 15 мин = 0,25 час. Молярная масса эквивалента серебра равна атомной массе серебра, деленной на число электронов, принимающих участие в катодном процессе.

$$M_э = A\ (Ag) / 1 = 107{,}87\ г/моль$$

Определяем массу серебра, которое теоретически должно выделиться на катоде. Используем значение числа Фарадея, выраженное в А · ч / моль.

$$m_{Ag}^{теор.} = 107{,}87 \cdot 5 \cdot 0{,}25 / 26{,}8 = 5{,}03 \text{ г}$$

Считаем выход по току: $A_m = (m_{Ag}^{эксп.} / m_{Ag}^{теор.}) \cdot 100\ \% = (5{,}01/5{,}03) \cdot 100\ \% = 99{,}6\ \%$. Таким образом, выход по току составляет 99,6 %.

Задачи для самостоятельной работы

1. Определите объём газа (н.у.), выделившегося на аноде при электролизе раствора серной кислоты, производившегося в течение 10 мин при силе тока 1,5А.
2. При прохождении через раствор сульфата никеля (II) тока силой 2А масса катода увеличилась на 2,4г. Рассчитайте время электролиза, если выход по току равен 0,8.
3. При электролизе водного раствора хлорида цинка на катоде выделился цинк массой 68,25 г, а на аноде – газ объемом 28,22 л (н.у.). Определите выход цинка, если выход хлора составил 90% от теоретически возможного.
4. При электролизе водного раствора нитрата серебра (I) на аноде выделилось 13,44 л кислорода (н.у.). Определите массу выделившегося на катоде серебра, если выход серебра составил 90% от теоретически возможного, а выход кислорода – количественный
5. Определите массу и объём газа (н.у.), выделившегося на аноде при электролизе раствора соляной кислоты, производившегося в течение 10 мин при силе тока 1,5 А. Выход по току равен 0,85.
6. Определите массу и объём газа (н.у.), выделившегося на катоде при электролизе раствора соляной кислоты, производившегося в течение 5 мин при силе тока 0,5 А. Выход по току равен 0,75.
7. При прохождении через раствор $NiSO_4$ тока силой 2 А масса катода увеличилась на 2,4 г. Рассчитайте время электролиза и объем выделившегося на аноде газа (н.у.).
8. Определите массу сульфата меди, помещенного в электролизёр, если при электролизе его водного раствора выделился кислород объемом 5,71 (н.у.).

9. Какая масса цинка выделится при электролизе $ZnCl_2$ за полчаса при силе тока I = 110 мА? Определите массу выделившегося газа на другом электроде.
10. При электролизе раствора хлорида меди (II) на катоде выделилась медь массой 12,7г. Вычислите объем газа (н.у.), выделившегося на аноде.
11. При электролизе водного раствора нитрата серебра (I) на аноде выделилось 13,44л кислорода (н.у.). Определите массу выделившегося на катоде серебра.
12. Какая масса цинка выделится при электролизе $ZnCl_2$ за 8 часов при силе тока I = 110 мА? На каком электроде (катоде или аноде) происходит выделение металла?
13. Какая масса газа выделится при электролизе $ZnCl_2$ за 10 минут при силе тока I = 150 мА? Выход по току 90% .
14. Какая масса хлора выделится при электролизе $ZnCl_2$ за 5 часов при силе тока I = 100 мА? Выход по току 80%.
15. Какой объём газа выделится при электролизе $ZnCl_2$ за 30 минут при силе тока I = 0,2 А? Выход по току 75% .
16. При электролизе водного раствора нитрата серебра (I) на аноде выделилось 22,4 л газа (н.у.). Определите массу выделившегося на катоде серебра.
17. Определите массу $CuSO_4$, помещенного в электролизёр, если при электролизе его водного раствора выделился кислород объемом 5,71 (н.у.), выход которого ставил 85% от теоретически возможного.
18. Через электролизер, содержащий раствор гидроксида калия объемом 300мл с массовой долей вещества 22,4% (плотность 1,2 г/мл), пропустили электрический ток. Рассчитайте массовую долю гидроксида калия в растворе после отключения тока, если известно, что на катоде выделился газ объемом 89,6л (н.у.).
19. При электролизе 16г расплава некоторого соединения водорода с одновалентным элементом на аноде выделился водород количеством вещества 1 моль. Установите формулу вещества, взятого для электролиза
20. При действии постоянного тока силой 6,4 А на расплав соли трехвалентного металла на катоде в течение 30 мин выделилось 1,07г металла, а аноде – 1344 мл. (н.у.) газа, относительная плотность паров которого по гелию составляет 17,75. Определите состав соли, расплав которой подвергли электролизу.

Практическое применение электролиза

Электролиз используют в различных областях современной техники. Приведем несколько основных направлений применения.

Получение активных металлов. Такие активные металлы, как натрий, литий, магний, алюминий, бериллий, кальций, а также сплавы некоторых металлов, получают электролизом расплавов их соединений.

Электрорафинирование металлов. Для очистки (рафинирования) металлов (меди, золота, серебра, никеля, кадмия и др.) их отливают в пластины, которые используют в качестве анода, катод же изготовляется из чистого металла, электролитом служит водный раствор соли металла. Процесс сводится к растворению анода в процессе электролиза и осаждению чистого металла на катоде. При этом примеси, находящиеся в аноде, либо остаются нерастворимыми (анодный *шлам*), либо переходят в электролит, но на катоде не осаждаются. Например, при электрорафинировании меди электролитом служит раствор сульфата меди и серной кислоты, анод изготавливают из неочищенной (черновой) меди. При электролизе загрязнения из более благородных металлов (Ag, Au) в раствор не переходят и собираются на дне электролизера. Загрязнения из менее благородных металлов (Pb, Fe, Zn), как и сама медь, переходят в раствор, но на катоде не осаждаются и поэтому не загрязняют осаждающуюся на нем медь. Электрорафинированием получают также чистые никель, кадмий, алюминий и другие металлы.

Гальванопластика. Электролиз с растворимым анодом используется в гальванотехнике для покрытий одних металлов тонкими слоями других. При этом покрываемое металлом изделие является при электролизе катодом, а в качестве анода используется металл покрытия. Так, хромирование применяют для увеличения твердости поверхностного слоя, а также повышения коррозионной стойкости черных металлов. Никелирование используют для изменения внешнего вида изделия и т. п. Иногда нанесение многослойных покрытий применяют с целью уменьшения расходов дорогих металлов. Например, прочное и стойкое

покрытие внешних деталей автомобиля достигается нанесением тонких слоев меди, никеля, а затем хрома.

Электрохимическая обработка поверхности металлов может быть использована для полировки поверхности, электрохимического окрашивания, заточки режущих инструментов и т. д.

Список литературы

Карапетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия.: учебник 5-е изд. Изд-во Книжный дом «Либроком» 2015. 592 с.

Глинка Н.Л. Общая химия.: учебник / под ред. В.А. Попкова, А.В. Бабкова. 18-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2011. 886 с.

Глинка Н.Л. Общая химия. Задачи и упражнения: учебно-практическое пособие. Изд-во «Юрайт»; ИД «Юрайт», 2014. 240 с.

Хомченко И.Г. Общая химия. Сборник задач и упражнений. Изд-во «Новая волна», 2011. 256 с.

Приложение 1.

Таблица растворимости веществ.

Катионы	Анионы										
	OH^-	F^-	Cl^-	Br^-	I^-	S^{2-}	NO_3^-	CO_3^{2-}	SiO_3^{2-}	SO_4^{2-}	PO_4^{3-}
H^+	Р	Р	Р	Р	Р	М	Р	-	Н	Р	Р
Na^+	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
K^+	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
NH_4^+	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
Mg^{2+}	Н	РК	Р	Р	Р	М	Р	Н	РК	Р	РК
Ca^{2+}	М	НК	Р	Р	Р	М	Р	Н	РК	М	РК
Sr^{2+}	М	НК	Р	Р	Р	Р	Р	Н	РК	РК	РК
Ba^{2+}	Р	РК	Р	Р	Р	Р	Р	Н	РК	НК	РК
Sn^{2+}	Н	Р	Р	Р	М	РК	Р	Н	Н	Р	Н
Pb^{2+}	Н	Н	М	М	М	РК	Р	Н	Н	Н	Н
Al^{3+}	Н	М	Р	Р	Р	Г	Р	Г	НК	Р	РК
Cr^{3+}	Н	Р	Р	Р	Р	Г	Р	Г	Н	Р	РК
Mn^{2+}	Н	Р	Р	Р	Р	Н	Р	Н	Н	Р	Н
Fe^{2+}	Н	М	Р	Р	Р	Н	Р	Н	Н	Р	Н
Fe^{3+}	Н	Р	Р	Р	-	-	Р	Г	Н	Р	РК
Co^{2+}	Н	М	Р	Р	Р	Н	Р	Н	Н	Р	Н
Ni^{2+}	Н	М	Р	Р	Р	РК	Р	Н	Н	Р	Н
Cu^{2+}	Н	М	Р	Р	-	Н	Р	Г	Н	Р	Н
Zn^{2+}	Н	М	Р	Р	Р	РК	Р	Н	Н	Р	Н
Cd^{2+}	Н	Р	Р	Р	Р	РК	Р	Н	Н	Р	Н
Hg^{2+}	Н	Р	Р	М	НК	НК	Р	Н	Н	Р	Н
Hg_2^{2+}	Н	Р	НК	НК	НК	РК	Р	Н	Н	М	Н
Ag^+	Н	Р	НК	НК	НК	НК	Р	Н	Н	М	Н

Р - вещество хорошо растворимо в воде
М – малорастворимо
Н - практически нерастворимо в воде, но легко растворяется в слабых или разбавленных кислотах
РК - нерастворимо в воде и растворяется только в сильных неорганических кислотах
НК - нерастворимо ни в воде, ни в кислотах
Г - полностью гидролизуется при растворении и не существует в контакте с водой

Приложение2

СТАНДАРТНЫЕ ЭЛЕКТРОДНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0
Ag	α -$Ag_2S + 2\bar{e} = 2Ag + S^{2-}$	-0,70	B	$BF_4^- + 3e = B + 4F^-$	-1,04
	$Ag(CN)_2^- + \bar{e} = Ag + 2CN^-$	-0,29		$H_3BO_3 + 3H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,869
	$AgI + \bar{e} = Ag + I^-$	-0,152		$BO_3^{3-} + 6H^+ + 3e = B + 3H_2O$	-0,165
	$AgCN + \bar{e} = Ag + CN^-$	-0,04	Ba	$Ba^{2+} + 2e = Ba$	-2,905
	$Ag(S_2O_3)_2^{3-} + \bar{e} = Ag + 2S_2O_3^{2-}$	0,01	Be	$Be^{2+} + 2e = Be$	-1,847
	$AgBr + \bar{e} = Ag + Br^-$	0,071		$Be(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-1,820
	$AgCl + \bar{e} = Ag + Cl^-$	0,222		$BeO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Be + 2H_2O$	-0,909
	$Ag_2O + H_2O + 2\bar{e} = 2Ag + 2OH^-$	0,344	Bi	$Bi_2O_3 + 3H_2O + 6e = 2Bi + 6OH^-$	-0,46
	$Ag(NH_3)_2^+ + \bar{e} = Ag + 2NH_3$	0,373		$BiOCl + 2H^+ + 3e = Bi + Cl^- + H_2O$	0,16
	$Ag_2CrO_4 + 2\bar{e} = 2Ag + CrO_4^{2-}$	0,446		$Bi^{3+} + 3e = Bi$	0,215
	$Ag_2C_2O_4 + 2\bar{e} = 2Ag + C_2O_4^{2-}$	0,472		$BiO^+ + 2H^+ + 3e = Bi + H_2O$	0,32
	$AgBrO_3 + \bar{e} = Ag + BrO_3^-$	0,55		$Bi_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Bi + 3H_2O$	0,371
	$2AgO + H_2O + 2\bar{e} = Ag_2O + 2OH^-$	0,60		$NaBiO_3$(т) + $6H^+$+ 2e = Bi^{3+} + Na^+ + $3H_2O$	1,6 - 1,808
	$Ag^+ + \bar{e} = Ag$	0,799	Br	$2BrO^- + 2H_2O + 2e = Br_2 + 4OH^-$	0,45
	$Ag_2O + 2H^+ + 2\bar{e} = 2Ag + H_2O$	1,173		$2BrO_3^- + 6H_2O + 10e = Br_2 + 12OH^-$	0,50
	$2AgO + 2H^+ + 2\bar{e} = Ag_2O + H_2O$	1,398		$BrO_3^- + 2H_2O + 4e = BrO^- + 4OH^-$	0,54
Al	$AlO_2^- + 2H_2O + 3\bar{e} = Al + 4OH^-$	-2,35		$BrO_3^- + 3H_2O + 6e = Br^- + 6OH^-$	0,61
	$Al(OH)_3 + 3\bar{e} = Al + 3OH^-$	-2,31		$BrO^- + H_2O + 2e = Br^- + 2OH^-$	0,76
	$AlF_6^{3-} + 3\bar{e} = Al + 6F^-$	-2,07		$Br_3^- + 2e = 3Br^-$	1,05
	$Al^{3+} + 3e = Al$	-1,663		Br_2(ж) + 2e = $2Br^-$	1,065
	$Al(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Al + 3H_2O$	-1,471		$BrO_3^- + 6H^+ + 6e = Br^- + 3H_2O$	1,44
	$AlO_2^- + 4H^+ + 3e = Al + 2H_2O$	-1,262		$2BrO_3^- + 12H^+ + 10e = Br_2 + 6H_2O$	1,52
As	$As + 3H^+ + 3e = AsH_3$	-0,60		$2HBrO + 2H^+ + 2e = Br_2 + 2H_2O$	1,59
	$HAsO_2 + 3H^+ + 3e = As + 2H_2O$	0,248	C	$HCOO^- + 2H_2O + 2e = HCHO + 3OH^-$	-1,07
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = HAsO_2 + 2H_2O$	0,559		$2CO_2 + 2H^+ + 2e = H_2C_2O_4$	-0,49
	$H_3AsO_4 + 2H^+ + 2e = H_3AsO_3 + H_2O$	0,58		$CO_2 + 2H^+ + 2e = HCOOH$	-0,20
Au	$Au(CN)_2 + e = Au + 2CN^-$	-0,61		C(графит) + $4H^+$ + 4e = CH_4	-0,132
	$AuBr_4^- + 2e = AuBr_2^- + 2Br^-$	0,802		$CO_2 + 2H^+ + 2e = CO + H_2O$	-0,12
	$AuCl_4^- + 2e = AuCl_2^- + 2Cl^-$	0,926		$HCOOH + 2H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	-0,01
	$AuBr_2^- + e = Au + 2Br^-$	0,959		$HCOOH + 4H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,145
	$AuCl_2^- + 2e = Au + 2Cl^-$	1,15		$HCOO^- + 3H^+ + 2e = HCHO + H_2O$	0,167
	$Au^{3+} + 2e = Au^+$	1,401		$CH_3CHO + 2H^+ + 2e = C_2H_5OH$	0,19
	$Au^{3+} + 3e = Au$	1,498		$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = HCHO + 2H_2O$	0,197
	$Au^+ + 3e = Au$	1,692		$HCOO^- + 5H^+ + 4e = CH_3OH + H_2O$	0,199
Элемент	Реакция	E^0	Элемент	Реакция	E^0

C	$CO_3^{2-} + 8H^+ + 6e = CH_3OH + 2H_2O$	0,209	Co	$Co(OH)_2 + 2e = Co + 2OH^-$	-0,73
	$CO_3^{2-} + 3H^+ + 2e = HCOO^- + H_2O$	0,227		$CoCO_3 + 2e = Co + CO_3^{2-}$	-0,64
	$HCHO + 2H^+ + 2e = CH_3OH$	0,232		$Co(NH_3)_6^{2+} + 2e = Co + 6NH_3$	-0,42
	$2CO_3^{2-} + 4H^+ + 2e = C_2O_4^{2-} + 2H_2O$	0,441		$Co^{2+} + 2e = Co$	-0,277
	$C_2H_5OH + 2H^+ + 2e = C_2H_6 + H_2O$	0,46		$Co(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Co + 2H_2O$	0,095
	$CO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = C(\text{графит}) + 3H_2O$	0,475		$Co(NH_3)_6^{3+} + e = Co(NH_3)_6^{2+}$	0,1
	$CO + 6H^+ + 6e = CH_4 + H_2O$	0,497		$CoO + 2H^+ + 2e = Co + H_2O$	0,166
	$CH_3OH + 2H^+ + 2e = CH_4 + H_2O$	0,59		$Co(OH)_3 + e = Co(OH)_2 + OH^-$	0,17
Ca	$Ca^{2+} + 2e = Ca$	-2,866		$Co^{3+} + 3e = Co$	0,33
Cd	$CdS + 2e = Cd + S^{2-}$	-1,175		$Co^{3+} + e = Co^{2+}$	1,38 - 1,842
	$Cd(CN)_4^{2-} + 2e = Cd + 4CN^-$	-1,09	Cr	$Cr(OH)_2 + 2e = Cr + 2OH^-$	-1,4
	$Cd(OH)_2 + 2e = Cd + 2OH^-$	-0,81		$Cr(OH)_3 + 3e = Cr + 3OH^-$	-1,3
	$Cd(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cd + 4NH_3$	-0,61		$CrO_2^- + 2H_2O + 3e = Cr + 4OH^-$	-1,2
	$Cd^{2+} + 2e = Cd$	-0,403		$Cr^{2+} + 2e = Cr$	-0,913
	$Cd(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cd + 2H_2O$	0,005		$Cr^{3+} + 3e = Cr$	-0,744
	$CdO + 2H^+ + 2e = Cd + H_2O$	0,063		$Cr(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Cr + 3H_2O$	-0,654
Ce	$Ce^{3+} + 3e = Ce$	-2,48		$Cr^{3+} + e = Cr^{2+}$	-0,407
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M H_2SO_4)	1,44		$CrO_4^{2-} + 4H_2O + 3e = Cr(OH)_3 + 5OH^-$	-0,13
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M HNO_3)	1,61		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 12e = 2Cr + 7H_2O$	0,294
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$ (1M $HClO_4$)	1,70		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Cr + 4H_2O$	0,366
	$Ce^{4+} + e = Ce^{3+}$	1,77		$CrO_4^{2-} + 4H^+ + 3e = CrO_2^- + 2H_2O$	0,945
Cl	$ClO_4^- + H_2O + 2e = ClO_3^- + 2OH^-$	0,36		$CrO_2^- + 4H^+ + e = Cr^{2+} + 2H_2O$	1,188
	$2ClO^- + 2H_2O + 2e = Cl_2 + 4OH^-$	0,40		$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e = 2Cr^{3+} + 7H_2O$	1,333
	$ClO_4^- + H_2O + 8e = Cl^- + 8OH^-$	0,56		$CrO_4^{2-} + 8H^+ + 3e = Cr^{3+} + 4H_2O$	1,477
	$ClO_3^- + 3H_2O + 6e = Cl^- + 6OH^-$	0,63	Cs	$Cs^+ + e = Cs$	-2,923
	$ClO_2 + 2H_2O + 5e = Cl^- + 4OH^-$	0,85	Cu	$Cu_2S + 2e = 2Cu + S^{2-}$	-0,89
	$ClO^- + H_2O + 2e = Cl^- + 2OH^-$	0,88		$CuS + 2e = Cu + S^{2-}$	-0,71
	$ClO_3^- + 2H^+ + e = ClO_2 + H_2O$	1,15		$Cu(CN)_2^- + e = Cu + 2CN^-$	-0,43
	$ClO_4^- + 2H^+ + 2e = ClO_3^- + H_2O$	1,189		$Cu_2O + H_2O + 2e = 2Cu + 2OH^-$	-0,36
	$ClO_2 + 4H^+ + 4e = 2HCl + H_2O$	1,351		$Cu(OH)_2 + 2e = Cu + 2OH^-$	-0,22
	$Cl_2 + 2e = 2Cl^-$	1,3595		$CuI + e = Cu + I^-$	-0,185
	$ClO_4^- + 8H^+ + 8e = Cl^- + 4H_2O$	1,38		$Cu(NH_3)_2^+ + e = Cu + 2NH_3$	-0,12
	$2ClO_4^- + 16H^+ + 14e = Cl_2 + 8H_2O$	1,39		$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu + 4NH_3$	-0,07
	$ClO_2 + 5H^+ + 5e = HCl + 2H_2O$	1,436		$Cu(NH_3)_4^{2+} + 2e = Cu(NH_3)_2^+ + 2NH_3$	-0,01
	$ClO_3^- + 6H^+ + 6e = Cl^- + 3H_2O$	1,451		$CuI_2^- + e = Cu + 2I^-$	0,00
	$2ClO_3^- + 12H^+ + 10e = Cl_2 + 6H_2O$	1,47		$CuBr + e = Cu + Br^-$	0,03
	$HClO + H^+ + 2e = Cl^- + H_2O$	1,494		$CuCl + e = Cu + Cl^-$	0,137
	$ClO_2 + 4H^+ + 5e = Cl^- + 2H_2O$	1,51		$Cu^{2+} + e = Cu^+$	0,153
	$2ClO_2 + 8H^+ + 8e = Cl_2 + 4H_2O$	1,549		$CuCl_2^- + e = Cu + 2Cl^-$	0,177
	$HClO_2 + 3H^+ + 4e = Cl^- + 2H_2O$	1,57		$2Cu^{2+} + H_2O + 2e = Cu_2O + 2H^+$	0,203
	$2HClO + 2H^+ + 2e = Cl_2 + 2H_2O$	1,63		$Cu^{2+} + 2e = Cu$	0,345
	$2HClO_2 + 6H^+ + 6e = Cl_2 + 4H_2O$	1,64		$Cu^{2+} + 2Cl^- + e = CuCl_2^-$	0,463
Co	β -CoS + 2e = Co + S^{2-}	-1,07		$Cu^+ + e = Cu$	0,520
	α -CoS + 2e = Co + S^{2-}	-0,90		$Cu^{2+} + Cl^- + e = CuCl$	0,538
Cu	$CuO + 2H^+ + 2e = Cu + H_2O$	0,570	Hg	$HgBr_4^{2-} + 2e = Hg + 4Br^-$	0,21

	$Cu(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Cu + 2H_2O$	0,609		$Hg_2Cl_2 + 2K^+ + 2e = 2Hg + 2KCl$ (тв)	0,2415
	$Cu^{2+} + Br^- + e = CuBr$	0,640		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$	0,268
	$2CuO + 2H^+ + 2e = Cu_2O + H_2O$	0,669		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (1M KCl)	0,28
	$Cu^{2+} + I^- + e = CuI$	0,86		$Hg_2Cl_2 + 2e = 2Hg + 2Cl^-$ (0,1M KCl)	0,334
	$Cu^{2+} + 2CN^- + e = Cu(CN)_2$	1,12		$HgCl_4^{2-} + 2e = Hg + 4Cl^-$	0,48
Dy	$Dy^{3+} + 3e = Dy$	-2,353		$Hg_2SO_4 + 2e = 2Hg + SO_4^{2-}$	0,6151
Eu	$Eu^{2+} + 2e = Eu$	-3,395		$Hg_2^{2+} + 2e = 2Hg$	0,788
	$Eu^{3+} + e = Eu^{2+}$	-0,429		$Hg^{2+} + 2e = Hg$	0,850
F	$F_2O + 2H^+ + 4e = 2F^- + H_2O$	2,1		$2Hg^{2+} + 2e = Hg_2^{2+}$	0,920
	$F_2 + 2e = 2F^-$	2,87		$HgO + 2H^+ + 2e = Hg + H_2O$	0,926
Fe	$FeS + 2e = Fe + S^{2-}$	-0,95	Ho	$Ho^{3+} + 3e = Ho$	-2,319
	$Fe(OH)_2 + 2e = Fe + 2OH^-$	-0,877	I	$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,14
	$FeCO_3 + 2e = Fe + CO_3^{2-}$	-0,756		$2IO_3^- + 6H_2O + 10e = I_2 + 12OH^-$	0,21
	$Fe(OH)_3 + e = Fe(OH)_2 + OH^-$	-0,56		$IO_3^- + 3H_2O + 6e = I^- + 6OH^-$	0,25
	$Fe^{2+} + 2e = Fe$	-0,440		$2IO^- + H_2O + 2e = I_2 + 4OH^-$	0,45
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 8e = 3Fe + 4H_2O$	-0,085		$IO^- + H_2O + 2e = I^- + 2OH^-$	0,49
	$Fe_2O_3 + H_2O + 2H^+ + 2e = 2Fe(OH)_2$	-0,057		$I_2 + 2e = 2I^-$	0,536
	$Fe_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Fe + 3H_2O$	-0,051		$I_3^- + 2e = 3I^-$	0,545
	$Fe(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Fe + 2H_2O$	-0,047		$IO_3^- + 2H_2O + 4e = IO^- + 4OH^-$	0,56
	$Fe^{3+} + 3e = Fe$	-0,037		$HIO + H^+ + 2e = I^- + H_2O$	0,99
	$Fe(OH)_3 + 3H^+ + 3e = Fe + 3H_2O$	0,059		$2ICl_2^- + 2e = I_2 + 4Cl^-$	1,06
	$Fe(OH)_3 + H^+ + e = Fe(OH)_2 + H_2O$	0,271		$IO_3^- + 6H^+ + 6e = I^- + 3H_2O$	1,085
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$	0,356		$IO_3^- + 5H^+ + 4e = HIO + 2H_2O$	1,14
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M H_2SO_4)	0,68		$2IO_3^- + 12H^+ + 10e = I_2 + 6H_2O$	1,19
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$ (1M HCl)	0,70		$2HIO + 2H^+ + 2e = I_2 + 2H_2O$	1,45
	$Fe(CN)_6^{3-} + e = Fe(CN)_6^{4-}$ (1M HCl)	0,71		$H_5IO_6 + H^+ + 2e = IO_3^- + 3H_2O$	1,60
	$Fe^{3+} + e = Fe^{2+}$	0,771	Ir	$IrO_2 + 4H^+ + 4e = Ir + H_2O$	0,93
	$Fe_3O_4 + 8H^+ + 2e = 3Fe^{2+} + 4H_2O$	0,980		$Ir^{3+} + 3e = Ir$	1,15
Ga	$Ga^{3+} + 3e = Ga$	-0,53	K	$K^+ + e = K$	-2,924
Gd	$Gd^{3+} + 3e = Gd$	-2,397	La	$La^{3+} + 3e = La$	-2,522
Ge	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 2e = Ge^{2+} + 3H_2O$	-0,363	Li	$Li^+ + e = Li$	-3,045
	$GeO_2 + 4H^+ + 4e = Ge + 2H_2O$	-0,15	Mg	$Mg(OH)_2 + 2e = Mg + 2OH^-$	-2,69
	$H_2GeO_3 + 4H^+ + 4e = Ge + 3H_2O$	-0,13		$Mg^{2+} + 2e = Mg$	-2,363
	$Ge^{2+} + 2e = Ge$	0,000		$Mg(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mg + 2H_2O$	-1,862
H	$2H_2O + 2e = H_2 + 2OH^-$	-0,828	Mn	$MnCO_3 + 2e = Mn + CO_3^{2-}$	-1,48
	$2H^+ + 2e = H_2$	0,0000		$Mn^{2+} + 2e = Mn$	-1,18
	$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776		$Mn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Mn + 2H_2O$	-0,727
Hf	$Hf^{4+} + 4e = Hf$	-1,70		$MnO_4^- + e = MnO_4^{2-}$	0,564
	$HfO_2 + 4H^+ + 4e = Hf + 2H_2O$	-1,57		$MnO_4^- + 2H_2O + 3e = MnO_2 + 4OH^-$	0,60
Hg	$HgS + 2e = Hg + S^{2-}$	-0,69		$MnO_2 + 4H^+ + 2e = Mn^{2+} + 2H_2O$	1,228
	$Hg(CN)_4^{2-} + 2e = Hg + 4CN^-$	-0,37		$Mn_2O_3 + 6H^+ + 2e = 2Mn^{2+} + 3H_2O$	1,443
	$Hg_2I_2 + 2e = 2Hg + 2I^-$	-0,041		$MnO_4^- + 8H^+ + 5e = Mn^{2+} + 4H_2O$	1,507
	$HgI_4^{2-} + 2e = Hg + 4I^-$	-0,04		$Mn^{3+} + e = Mn^{2+}$ (8M H_2SO_4)	1,509
	HgO(красная) + H_2O + 2e = Hg + $2OH^-$	0,098		$MnO_4^- + 4H^+ + 3e = MnO_2 + 2H_2O$	1,692
	$Hg_2Br_2 + 2e = 2Hg + 2Br^-$	0,140		$MnO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MnO_2 + 2H_2O$	2,257
Mo	$H_2MoO_4 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	-1,091	Nd	$Nd^{3+} + 3e = Nd$	-2,431

	$MoO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = Mo + 8OH^-$	-1,05	Ni	γ-NiS + 2e = Ni + S^{2-}	-1,04
	$Mo^{3+} + 3e = Mo$	-0,200		α-NiS + 2e = Ni + S^{2-}	-0,83
	$MoO_2 + 4H^+ + 4e = Mo + 2H_2O$	-0,072		$Ni(OH)_2 + 2e = Ni + 2OH^-$	-0,72
	$MoO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = Mo + 4H_2O$	0,154		$Ni(NH_3)_6^{2+} + 2e = Ni + 6NH_3$	-0,49
	$MoO_3 + 2H^+ + 2e = MoO_2 + H_2O$	0,320		$NiCO_3 + 2e = Ni + CO_3^{2-}$	-0,45
	$MoO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = MoO_2 + 2H_2O$	0,606		$Ni^{2+} + 2e = Ni$	-0,25
N	$3N_2 + 2\bar{e} = 2N_3^-$	-3,4		$Ni(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Ni + 2H_2O$	0,110
	$3N_2 + 2H^+ + 2\bar{e} = 2HN_3$	-3,1		$NiO + 2H^+ + 2e = Ni + H_2O$	0,116
	$N_2 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_2OH + 2OH^-$	-3,04		$NiO_2 + 4H^+ + 2e = Ni^{2+} + 2H_2O$	1,68
	$N_2 + 4H_2O + 4\bar{e} = N_2H_4 + 4OH^-$	-1,16	O	$O_2 + 2H_2O + 4e = 4OH^-$	0,401
	$N_2 + 8H_2O + 6\bar{e} = 2NH_4OH + 6OH^-$	-0,74		$O_2 + 2H^+ + 2e = H_2O_2$	0,682
	$NO_2^- + H_2O + \bar{e} = NO + 2OH^-$	-0,46		$H_2O_2 + 2e = 3OH^-$	0,88
	$NO_2^- + 6H_2O + 6\bar{e} = NH_4OH + 7OH^-$	-0,15		$O_2 + 4H^+ + 4e = 2H_2O$	1,229
	$NO_3^- + 2H_2O + 3\bar{e} = NO + 4OH^-$	-0,14		$O_3 + H_2O + 3e = O_2 + 2OH^-$	1,24
	$NO_3^- + 7H_2O + 8\bar{e} = NH_4OH + 9OH^-$	-0,12		$O_3 + 6H^+ + 6e = 3H_2O$	1,511
	$NO_3^- + H_2O + 2\bar{e} = NO_2^- + 2OH^-$	0,01		$H_2O_2 + 2H^+ + 2e = 2H_2O$	1,776
	$N_2 + 6H^+ + 6\bar{e} = 2NH_3$	0,057		$O_3 + 2H^+ + 2e = O_2 + H_2O$	2,07
	$N_2H_4 + 4H_2O + 2\bar{e} = 2NH_4OH + 2OH^-$	0,1	Os	$OsO_2 + 2H_2O + 4e = Os + 4OH^-$	-0,15
	$N_2 + 8H^+ + 6\bar{e} = 2NH_4^+$	0,275		$OsCl_6^{3-} + e = Os^{2+} + 6Cl^-$	0,4
	$2NO_2^- + 4H_2O + 6\bar{e} = N_2 + 8OH^-$	0,41		$OsO_4 + 8H^+ + 8e = Os + 4H_2O$	0,85
	$NH_2OH + 2H_2O + 2\bar{e} = NH_4OH^- + 2OH^-$	0,42		$OsCl_6^{2-} + e = OsCl_6^{3-}$	0,85
	$2NO_2 + 4H_2O + 8e = N_2 + 8OH^-$	0,53		$Os^{2+} + 2e = Os$	0,85
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,78		$OsO_4 + 4H^+ + 4e = OsO_2 + 2H_2O$	0,96
	$NO_3^- + 2H^+ + e = NO_2 + H_2O$	0,80	P	$H_2PO_2^- + e = P + 2OH^-$	-2,05
	$2NO + 2H_2O + 4e = N_2 + 4OH^-$	0,85		$HPO_3^{2-} + 2H_2O + 2e = H_2PO_2^- + 3OH^-$	-1,57
	$HNO_2 + 7H^+ + 6e = NH_4^+ + 2H_2O$	0,864		$PO_4^{3-} + 2H_2O + 2e = HPO_3^{2-} + 3OH^-$	-1,12
	$NO_3^- + 10H^+ + 8e = NH_4^+ + 3H_2O$	0,87		$2H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_4P_2O_6 + 2H_2O$	-0,94
	$2NO_2 + 2e = 2NO_2^-$	0,88		$P + 3H_2O + 3e = PH_3 + 3OH^-$	-0,89
	$N_2O + H_2O + 2e = N_2 + 2OH^-$	0,94		$H_3PO_2 + H^+ + e = P + 2H_2O$	-0,51
	$NO_3^- + 3H^+ + 2e = HNO_2 + 2H_2O$	0,94		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(бел) + 3H_2O$	-0,502
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,957		$H_3PO_3 + 3H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$NO_3^- + 4H^+ + 3e = NO + 2H_2O$	0,96		$H_3PO_3 + 3H^+ + 3e = P(кр) + 3H_2O$	-0,454
	$HNO_2 + H^+ + e = NO + H_2O$	1,00		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(бел) + 4H_2O$	-0,411
	$NO_2 + 2H^+ + 2e = NO + H_2O$	1,03		$H_3PO_4 + 4H^+ + 4e = H_3PO_2 + 2H_2O$	-0,39
	$NO_2 + H^+ + e = HNO_2$	1,09		$H_3PO_4 + 5H^+ + 5e = P(кр) + 4H_2O$	-0,383
	$2NO_3^- + 10H^+ + 8e = N_2O + 5H_2O$	1,116		$H_3PO_4 + 2H^+ + 2e = H_3PO_3 + H_2O$	-0,276
	$2NO_3^- + 12H^+ + 10e = N_2 + 6H_2O$	1,246		$H_3PO_3 + 2H^+ + 2e = H_3PO_2 + H_2O$	-0,50
	$2HNO_2 + 4H^+ + 4e = N_2O + 3H_2O$	1,297		$P + 3H^+ + 3e = PH_3$	0,06
	$2NO_2 + 8H^+ + 8e = N_2 + 4H_2O$	1,36		$H_4P_2O_6 + 2H^+ + 2e = 2H_3PO_3$	0,38
	$2HNO_2 + 6H^+ + 6e = N_2 + 4H_2O$	1,45	Pb	$PbS + 2e = Pb + S^{2-}$	-0,93
	$2NO + 4H^+ + 4e = N_2 + 2H_2O$	1,678		$PbO + H_2O + 2e = Pb + 2OH^-$	-0,58
	$N_2O + 2H^+ + 2e = N_2 + H_2O$	1,766		$PbCO_3 + 2e = Pb + CO_3^{2-}$	-0,506
Na	$Na^+ + e = Na$	-2,714		$PbI_2 + 2e = Pb + 2I^-$	0,365
Pb	$PbSO_4 + 2e = Pb + SO_4^{2-}$	-0,3563	S	$S + 2H^+ + 2e = H_2S$	0,141

	$PbF_2 + 2e = Pb + 2F^-$	-0,350		$SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SO_3 + H_2O$	0,17
	$PbBr_2 + 2e = Pb + 2Br^-$	-0,280		$SO_3^{2-} + 6H^+ + 6e = S + 3H_2O$	0,231
	$PbCl_2 + 2e = Pb + 2Cl^-$	-0,268		$2SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = S_2O_3^{2-} + 5H_2O$	0,29
	$Pb^{2+} + 2e = Pb$	-0,126		$SO_4^{2-} + 10H^+ + 8e = H_2S + 4H_2O$	0,311
	$PbO_3^{2-} + H_2O + 2e = PbO_2 + 2OH^-$	0,2		$SO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = S + 4H_2O$	0,357
	$PbO + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,248		$2H_2SO_3 + 2H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,40
	$Pb(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pb + H_2O$	0,277		$H_2SO_3 + 4H^+ + 4e = S + 3H_2O$	0,449
	$PbO_2 + H_2O + 2e = PbO + 2OH^-$	0,28		$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 4e = 2S + 3H_2O$	0,5
	$Pb_3O_4 + 2H^+ + 2e = 3PbO + H_2O$	0,972		$2SO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = S_2O_3^{2-} + 3H_2O$	0,705
	$PbO_2 + 4H^+ + 2e = Pb^{2+} + 2H_2O$	1,449-1,455		$S_2O_8^{2-} + 2e = 2SO_4^{2-}$	2,01
	$PbO_2 + SO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = PbSO_4 + 2H_2O$	1,685	Sb	$SbO_2^- + 2H_2O + 3e = Sb + 4OH^-$	-0,675
	$Pb^{4+} + 2e = Pb^{2+}$	1,694		$Sb + 3H^+ + 3e = SbH_3$	-0,51
Pd	$Pd(OH)_2 + 2e = Pd + 2OH^-$	0,07		$SbO_3^- + H_2O + 2e = SbO_2^- + 2OH^-$	-0,43
	$PdI_6^{2-} + 2e = PdI_4^{2-} + 2I^-$	0,623		$Sb_2O_3 + 6H^+ + 6e = 2Sb + 3H_2O$	0,152
	$PdCl_4^{2-} + 2e = Pd + 4Cl^-$	0,623		$SbO^+ + 2H^+ + 3e = Sb + H_2O$	0,212
	$PdO + 2H^+ + 2e = Pd + H_2O$	0,896		$SbO_3^- + 2H^+ + 3e = SbO_2^- + H_2O$	0,353
	$PdCl_6^{2-} + 4e = Pd + 6Cl^-$	0,96		$SbO_2^- + 4H^+ + 3e = Sb + 2H_2O$	0,446
	$Pd^{2+} + 2e = Pd$	0,987		$Sb_2O_5 + 6H^+ + 4e = 2SbO^+ + 3H_2O$	0,581
	$PdBr_6^{2-} + 2e = PdBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,993		$Sb_2O_5 + 4H^+ + 4e = Sb_2O_3 + 2H_2O$	0,671
	$PdO_2 + 2H^+ + 2e = PdO + H_2O$	1,283	Sc	$Sc^{3+} + 3e = Sc$	-2,077
	$PdCl_6^{2-} + 2e = PdCl_4^{2-} + 2Cl^-$	1,288	Se	$Se + 2e = Se^{2-}$	-0,92
Pt	$PtS + 2e = Pt + S^{2-}$	-0,95		$Se + 2H^+ + 2e = H_2Se$	-0,40
	$PtS_2 + 2e = PtS + S^{2-}$	-0,64		$SeO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Se + 6OH^-$	-0,366
	$Pt(OH)_2 + 2e = Pt + 2OH^-$	0,15		$SeO_4^{2-} + H_2O + 2e = SeO_3^{2-} + 2OH^-$	0,05
	$PtI_6^{2-} + 2e = PtI_4^{2-} + 2I^-$	0,393		$H_2SeO_3 + 4H^+ + 4e = Se + 3H_2O$	0,741
	$PtBr_4^{2-} + 2e = Pt + 4Br^-$	0,58		$SeO_4^{2-} + 4H^+ + 2e = H_2SeO_3 + H_2O$	1,15
	$PtBr_6^{2-} + 2e = PtBr_4^{2-} + 2Br^-$	0,59	Si	$SiO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = Si + 6OH^-$	-1,7
	$PtCl_6^{2-} + 2e = PtCl_4^{2-} + 2Cl^-$	0,720		$SiF_6^{2-} + 4e = Si + 6F^-$	-1,2
	$PtCl_4^{2-} + 2e = Pt + 4Cl^-$	0,73		$SiO_3^{2-} + 6H^+ + 4e = Si + 3H_2O$	-0,455
	$Pt(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Pt + 2H_2O$	0,980		$Si + 4H^+ + 4e = SiH_4$	0,102
	$PtO_2 + 2H^+ + 2e = Pt(OH)_2$	1,045	Sn	$SnS + 2e = Sn + S^{2-}$	-0,94
	$Pt^{2+} + 2e = Pt$	1,188		$Sn(OH)_6^{2-} + 2e = HSnO_2^- + H_2O + 3OH^-$	-0,93
Ra	$Ra^{2+} + 2e = Ra$	-2,925		$HSnO_2^- + H_2O + 2e = Sn + 3OH^-$	-0,91
Rb	$Rb^+ + e = Rb$	-2,925		$SnF_6^{2-} + 4e = Sn + 6F^-$	-0,25
S	$SO_4^{2-} + H_2O + 2e = SO_3^{2-} + 2OH^-$	-0,93		$Sn^{2+} + 2e = Sn$	-0,136
	$2SO_4^{2-} + 5H_2O + 8e = S_2O_3^{2-} + 10OH^-$	-0,76		$SnO_2 + 2H^+ + 2e = SnO + H_2O$	-0,108
	$SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S + 6OH^-$	-0,66		$SnO_2 + 4H^+ + 4e = Sn + 2H_2O$	-0,106
	$2SO_3^{2-} + 3H_2O + 4e = S_2O_3^{2-} + 6OH^-$	-0,58		$SnO + 2H^+ + 2e = Sn + H_2O$	-0,104
	$S_2^{2-} + 2e = 2S^{2-}$	-0,524		$Sn(OH)_2 + 2H^+ + 2e = Sn + 2H_2O$	-0,091
	$S + 2e = S^{2-}$	-0,48		$SnCl_6^{2-} + 2e = SnCl_4^{2-} + 2Cl^-$	0,14
	$2S + 2e = S_2^{2-}$	-0,476		$Sn^{4+} + 2e = Sn^{2+}$	0,151
	$S + H^+ + 2e = HS^-$	-0,065	Sr	$Sr^{2+} + 2e = Sr$	-2,888
	$S_2O_3^{2-} + 6H^+ + 8e = 2S + 3H_2O$	-0,006	Te	$Te + 2e = Te^{2-}$	-1,14
	$S_4O_6^{2-} + 2e = 2S_2O_3^{2-}$	0,08		$Te + 2H^+ + 2e = H_2Te$	-0,72
	$SO_4^{2-} + 8H^+ + 8e = S + 4H_2O$	0,149		$TeO_3^{2-} + 2H_2O + 4e = Te + 6OH^-$	-0,57
	$TeO_2 + 4H^+ + 4e = Te + 2H_2O$	0,529		$V^{2+} + 2e = V$	-1,175

	$TeO_4^{2-} + 2H^+ + 2e = TeO_3 + H_2O$	0,892		$V^{3+} + e = V^{2+}$	-0,255
	$H_6TeO_6 + 2H^+ + 2e = TeO_2 + 4H_2O$	1,02		$VO_2^+ + 4H^+ + 5e = V + 2H_2O$	-0,25
Ti	$Ti^{2+} + 2e = Ti$	-1,63		$VO_2^{2+} + e = VO^+$	-0,044
	$TiO + 2H^+ + 2e = Ti + H_2O$	-1,306		$VO_2^+ + 4H^+ + 3e = V + 2H_2O$	0,360
	$TiF_6^{2-} + 4e = Ti + 6F^-$	-1,19	V	$V_2O_5 + 6H^+ + 2e = 2VO^{2+} + 3H_2O$	0,958
	$TiO_2 + 4H^+ + 4e = Ti + 2H_2O$	-0,86		$VO_2^+ + 2H^+ + e = VO^{2+} + H_2O$	1,004
	TiO_2(рутил) $+ H^+ + 4e = Ti^{3+} + 2H_2O$	-0,666		$VO_4^{3-} + 6H^+ + 2e = VO^+ + 3H_2O$	1,256
	TiO_2(рутил) $+ 2H^+ + 4e = Ti^{2+} + 2H_2O$	-0,502		$H_2VO_4^- + 4H^+ + e = VO^{2+} + 3H_2O$	1,314
	$Ti^{3+} + e = Ti^{2+}$	-0,368		$WO_4^{2-} + 4H_2O + 6e = W + 8OH^-$	-1,05
	$Ti^{4+} + e = Ti^{3+}$ (5M H_3PO_4)	-0,15	W	$WO_2 + 4H^+ + 4e = W + 2H_2O$	-0,119
	$TiO^{2+} + 2H^+ + 2e = Ti^{2+} + H_2O$	-0,135		$WO_3 + 6H^+ + 6e = W + 3H_2O$	-0,09
	$TiO^{2+} + 2H^+ + e = Ti^{3+} + H_2O$	0,10		$W_2O_5 + 2H^+ + 2e = 2WO_2 + H_2O$	-0,031
Tl	$Tl_2S + 2e = 2Tl + S^{2-}$	-0,93		$2WO_3 + 2H^+ + 2e = W_2O_5 + H_2O$	-0,029
	$TlI + e = Tl + I^-$	-0,753		$WO_4^{2-} + 8H^+ + 6e = W + 4H_2O$	0,049
	$TlBr + e = Tl + Br^-$	-0,658		$2WO_4^{2-} + 6H^+ + 2e = W_2O_5 + 3H_2O$	0,801
	$TlCl + e = Tl + Cl^-$	-0,557		$ZnS + 2e = Zn + S^{2-}$	-1,405
	$TlOH + e = Tl + OH^-$	-0,344	Zn	$Zn(CN)_4^{2-} + 2e = Zn + 4CN^-$	-1,26
	$Tl^+ + e = Tl$	-0,3363		$Zn(OH)_2 + 2e = Zn + 2OH^-$	-1,245
	$Tl(OH)_3 + 2e = TlOH + 2OH^-$	-0,05		$Zn(OH)_4^{2-} + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,22
	$Tl_2O_3 + 3H_2O + 4e = 2Tl^+ + 6OH^-$	0,02		$ZnO_2^{2-} + 2H_2O + 2e = Zn + 4OH^-$	-1,216
	$TlOH + H^+ + e = Tl + H_2O$	0,778		$ZnCO_3 + 2e = Zn + CO_3^{2-}$	-1,06
	$Tl^{3+} + 2e = Tl^+$	1,252		$Zn(NH_3)_4^{2+} + 2e = Zn + 4NH_3$	-1,04
U	$UO_2 + 2H_2O + 4e = U + 4OH^-$	-2,39		$Zn^{2+} + 2e = Zn$	-0,763
	$U^{3+} + 3e = U$	-1,798		$ZnO_2^{2-} + 4H^+ + 2e = Zn + 2H_2O$	0,441
	$U^{4+} + e = U^{3+}$	-0,607		$ZrO^{2+} + 2H^+ + 4e = Zr + H_2O$	-1,570
	$UO_2^{2+} = UO_2^+$	0,05	Zr	$ZrO_2 + 4H^+ + 4e = Zr + 2H_2O$	-1,553
	$UO_2^{2+} + 4H^+ + 2e = U + 2H_2O$	0,334		$Zr^{4+} + 4e = Zr$	-1,539
	$UO_2^+ + 4H^+ + e = U + 2H_2O$	0,62			

Приложение I

Электрохимический ряд напряжений металлов

Электрохимический ряд напряжений металлов – это ряд стандартных электродных потенциалов металлов, расположенных в порядке их возрастания.

Таблица 1

Стандартные электродные потенциалы металлов

Элемент	Электродная реакция	E^0, В	Элемент	Электродная реакция	E^0, В
Цезий	$Cs^+ + e^- \rightleftarrows Cs^0$	–3,08	Кадмий	$Cd^{2+} + 2e \rightleftarrows Cd^0$	–0,40
Литий	$Li^+ + e^- \rightleftarrows Li^0$	–3,02	Таллий	$Tl^+ + e^- \rightleftarrows Tl^0$	–0,34
Рубидий	$Rb^+ + e^- \rightleftarrows Rb^0$	–2,99	Кобальт	$Co^{2+} + 2e \rightleftarrows Co^0$	–0,28
Калий	$K^+ + e^- \rightleftarrows K^0$	–2,92	Никель	$Ni^{2+} + 2e \rightleftarrows Ni^0$	–0,25
Барий	$Ba^{2+} + 2e \rightleftarrows Ba^0$	–2,90	Олово	$Sn^{2+} + 2e \rightleftarrows Sn^0$	–0,14
Стронций	$Sr^{2+} + 2e \rightleftarrows Sr^0$	–2,89	Свинец	$Pb^{2+} + 2e \rightleftarrows Pb^0$	–0,13
Кальций	$Ca^{2+} + 2e \rightleftarrows Ca^0$	–2,87	Водород	$2H^+ + 2e \rightleftarrows H_2$	0,00
Натрий	$Na^+ + e \rightleftarrows Na^0$	–2,71	Сурьма	$Sb^{3+} + 3e \rightleftarrows Sb^0$	+0,20
Лантан	$La^{3+} + 3e \rightleftarrows La^0$	–2,37	Висмут	$Bi^{3+} + 3e \rightleftarrows Bi^0$	+0,23
Магний	$Mg^{2+} + 2e \rightleftarrows Mg^0$	–2,34	Медь	$Cu^{2+} + 2e \rightleftarrows Cu^0$	+0,34
Бериллий	$Be^{2+} + 2e \rightleftarrows Be^0$	–1,70	Серебро	$Ag^+ + e \rightleftarrows Ag^0$	+0,80
Алюминий	$Al^{3+} + 3e \rightleftarrows Al^0$	–1,67	Палладий	$Pd^{2+} + 2e \rightleftarrows Pd^0$	+0,83
Титан	$Ti^{2+} + 2e \rightleftarrows Ti^0$	–1,63	Ртуть	$Hg_2^{2+} + 2e \rightleftarrows Hg^0$	+0,79
Марганец	$Mn^{2+} + 2e \rightleftarrows Mn^0$	–1,05	Ртуть	$Hg^{2+} + 2e \rightleftarrows Hg^0$	+0,85
Цинк	$Zn^{2+} + 2e \rightleftarrows Zn^0$	–0,76	Платина	$Pt^{2+} + 2e \rightleftarrows Pt^0$	+1,20
Хром	$Cr^{3+} + 3e \rightleftarrows Cr^0$	–0,71	Золото	$Au^{3+} + 3e \rightleftarrows Au^0$	+1,50
Железо	$Fe^{2+} + 2e \rightleftarrows Fe^0$	–0,44	Золото	$Au^+ + e \rightleftarrows Au^0$	+1,68

Учебное издание

Ирина Альбертовна Низова, Наталья Анатольевна Зайцева

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ХИМИЯ»

Учебное пособие

Редактор изд-ва

Компьютерная верстка И.*А.Низовой*

Подписано в печать .Бумага писчая. Формат 60×84 1/16.
Печать на ризографе. Гарнитура Times New Roman.
Печ. л. Уч.-изд. л. 1,0 .Тираж 100 .Заказ

Издательство УГГУ
620144, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу _____ С.А. Упоров

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Б1.О.26 ПРИКЛАДНОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Направление подготовки
21.03.02 Землеустройство и кадастры

год набора: 2024

Одобрены на заседании кафедры	Рассмотрены методической комиссией факультета
Информатики	горно-технологический
(название кафедры)	*(название факультета)*
Зав. кафедрой _____ *(подпись)*	Председатель _____ *(подпись)*
Дружинин А.В.	Колчина Н.В.
(Фамилия И.О.)	*(Фамилия И.О.)*
Протокол № 1 от 26.09.2023	Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)	*(Дата)*

Екатеринбург

Автор: Дружинин А.В., доцент, канд. техн. наук

Методические рекомендации согласованы с выпускающей кафедрой геодезии и кадастров

Заведующая кафедрой _____ Е.А. Акулова

подпись *И.О.Фамилия*

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации необходимы для студентов бакалавриата по направлению подготовки 21.05.04 – «Горное дело» при организации самостоятельной работы по дисциплине «Прикладное программное обеспечение» в рамках подготовки и защиты контрольной работы.

В методических рекомендациях содержатся особенности организации подготовки контрольной работы в виде реферата, требования к его оформлению, а также порядок защиты и критерии оценки.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОДГОТОВКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Общая характеристика реферата

Написание реферата практикуется в учебном процессе в целях приобретения студентом необходимой профессиональной подготовки, развития умения и навыков самостоятельного научного поиска: изучения литературы по выбранной теме, анализа различных источников и точек зрения, обобщения материала, выделения главного, формулирования выводов и т. п. С помощью реферата студент может глубже постигать наиболее сложные проблемы дисциплины, учится лаконично излагать свои мысли, правильно оформлять работу, докладывать результаты своего труда.

В «Толковом словаре русского языка» дается следующее определение: «**реферат** – краткое изложение содержания книги, статьи, исследования, а также доклад с таким изложением».

Различают два вида реферата:

- *репродуктивный* – воспроизводит содержание первичного текста в форме реферата-конспекта или реферата-резюме. В реферате-конспекте содержится фактическая информация в обобщённом виде, иллюстрированный материал, различные сведения о методах исследования, результатах исследования и возможностях их применения. В реферате-резюме содержатся только основные положения данной темы;
- *продуктивный* – содержит творческое или критическое осмысление реферируемого источника и оформляются в форме реферата-доклада или реферата- обзора. В реферате-докладе, наряду с анализом информации первоисточника, дается объективная оценка проблемы, и он имеет развёрнутый характер. Реферат-обзор составляется на основе нескольких источников и в нем сопоставляются различные точки зрения по исследуемой проблеме.

Студент для изложения материала должен выбрать продуктивный вид реферата.

Выбор темы реферата

Студенту предоставляется право выбора темы реферата из рекомендованного преподавателем дисциплины списка. Выбор темы должен быть осознанным и обоснованным с точки зрения познавательных интересов автора, а также полноты освещения темы в имеющейся научной литературе.

Если интересующая тема отсутствует в рекомендованном списке, то по согласованию с преподавателем студенту предоставляется право самостоятельно предложить тему реферата, раскрывающую содержание изучаемой дисциплины. Тема не должна быть слишком общей и глобальной, так как небольшой объем работы (до 20-25 страниц без учёта приложений) не позволит раскрыть ее.

Начинать знакомство с избранной темой лучше всего с чтения обобщающих работ по данной проблеме, постепенно переходя к узкоспециальной литературе. При этом следует сразу же составлять библиографические выходные данные используемых источников (автор, название, место и год издания, издательство, страницы).

На основе анализа прочитанного и просмотренного материала по данной теме следует составить тезисы по основным смысловым блокам, с пометками, собственными суждениями и оценками. Предварительно подобранный в литературных источниках материал может превышать необходимый объем реферата.

Формулирование цели и составление плана реферата

Выбрав тему реферата и изучив литературу, необходимо сформулировать цель работы и составить план реферата.

Цель – это осознаваемый образ предвосхищаемого результата. Возможно, формулировка цели в ходе работы будет меняться, но изначально следует ее обозначить, чтобы ориентироваться на нее в ходе исследования. Формулирование цели реферата рекомендуется осуществлять при помощи глаголов: исследовать, изучить, проанализировать, систематизировать, осветить, изложить (представления, сведения), создать, рассмотреть, обобщить и т. д.

Определяясь с целью дальнейшей работы, параллельно необходимо думать над составлением плана, при этом четко соотносить цель и план работы. Правильно построенный план помогает систематизировать материал и обеспечить последовательность его изложения.

Наиболее традиционной является следующая **структура реферата**:

Титульный лист.

Оглавление (план, содержание).

Введение.

1. (полное наименование главы).
   1.1. (полное название параграфа, пункта);
   1.2. (полное название параграфа, пункта).
2. (полное наименование главы).
   2.1. (полное название параграфа, пункта);
   2.2. (полное название параграфа, пункта).

Заключение (выводы).

} Основная часть

Библиография (список использованной литературы).

Приложения (по усмотрению автора).

Титульный лист оформляется в соответствии с Приложением.

Оглавление(план, содержание) включает названия всех глав и параграфов (пунктов плана) реферата и номера страниц, указывающие их начало в тексте реферата.

Введение. В этой части реферата обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи работы, указываются используемые материалы и дается их краткая характеристика с точки зрения полноты освещения избранной темы. Объем введения не должен превышать 1-1,5 страницы.

Основная часть реферата может быть представлена двумя или тремя главами, которые могут включать 2-3 параграфа (пункта).

Здесь достаточно полно и логично излагаются главные положения в используемых источниках, раскрываются все пункты плана с сохранением связи между ними и последовательности перехода от одного к другому.

Автор должен следить за тем, чтобы изложение материала точно соответствовало цели и названию главы (параграфа). Материал в реферате рекомендуется излагать своими словами, не допуская дословного переписывания из литературных источников. В тексте обязательны ссылки на первоисточники, т. е. на тех авторов, у которых взят данный материал в виде мысли, идеи, вывода, числовых данных, таблиц, графиков, иллюстраций и пр.

Работа должна быть написана грамотным литературным языком. Сокращение слов в тексте не допускается, кроме общеизвестных сокращений и аббревиатуры. Каждыйраздел рекомендуется заканчивать кратким выводом.

Заключение(выводы). В этой части обобщается изложенный в основной части материал, формулируются общие выводы, указывается, что нового лично для себя вынес автор реферата из работы над ним. Выводы делаются с учетом опубликованных в литературе различных точек зрения по проблеме, рассматриваемой в реферате, сопоставления их и личного мнения автора реферата. Заключение по объему не должно превышать 1,5-2 страниц.

Библиография(список использованной литературы) – здесь указывается реально использованная для написания реферата литература, периодические издания иэлектронные источники информации. Список составляется согласно правилам библиографического описания.

Приложения могут включать графики, таблицы, расчеты.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РЕФЕРАТА

Общие требования к оформлению реферата

Рефераты, как правило, требуют изучения и анализа значительного объема статистического материала, формул, графиков и т. п. В силу этого особое значение приобретает правильное оформление результатов проделанной работы.

Текст реферата должен быть подготовлен в печатном виде. Исправления и помарки не допускаются. Текст работы оформляется на листах формата А4, на одной стороне листа, с полями: левое – 25 мм, верхнее – 20 мм, правое – 15 мм и нижнее – 25 мм. При компьютерном наборе шрифт должен быть таким: тип шрифта TimesNewRoman, кегль 14, междустрочный интервал 1,5.

Рекомендуемый объем реферата – не менее 20 страниц. Титульный лист реферата оформляется студентом по образцу, данному в приложении 1.

Текст реферата должен быть разбит на разделы: главы, параграфы и т. д. Очередной раздел нужно начинать с нового листа.

Все страницы реферата должны быть пронумерованы. Номер страницы ставится снизу страницы, по центру. Первой страницей является титульный лист, но на ней номер страницы не ставится.

Таблицы

Таблицы по содержанию делятся на аналитические и неаналитические. Аналитические таблицы являются результатом обработки и анализа цифровых показателей. Как правило, после таких таблиц делается обобщение, которое вводится в текст словами: «таблица позволяет сделать вывод о том, что…», «таблица позволяет заключить, что…» и т. п.

В неаналитических таблицах обычно помещаются необработанные статистические данные, необходимые лишь для информации и констатации фактов.

Таблицы размещают после первого упоминания о них в тексте таким образом, чтобы их можно было читать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке.

Каждая таблица должна иметь нумерационный и тематический заголовок. Тематический заголовок располагается по центру таблицы, после нумерационного, размещённого в правой стороне листа и включающего надпись «Таблица» с указанием арабскими цифрами номера таблицы. Нумерация таблиц сквозная в пределах каждойглавы. Номер таблицы состоит из двух цифр: первая указывает на номер главы, вторая – на номер таблицы в главе по порядку (например, «Таблица 2.2» – это значит, что представленная таблица вторая во второй главе).

Цифры в графах таблиц должны проставляться так, чтобы разряды чисел во всей графе были расположены один под другим. В одной графе количество десятичных знаков должно быть одинаковым. Если данные отсутствуют, то в графах ставят знак тире. Округление числовых значений величин до первого, второго и т. д. десятичного знака для

различных значений одного и того же наименования показателя должно быть одинаковым.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу, при этом заголовок таблицы помещают только над ее первой частью, а над переносимой частью пишут «Продолжение таблицы» или «Окончание таблицы». Если в работе несколько таблиц, то после слов «Продолжение» или «Окончание» указывают номер таблицы, а само слово «таблица» пишут сокращенно, например,
«Продолжение табл. 1.1», «Окончание табл. 1.1».

На все таблицы в тексте реферата должны быть даны ссылки с указанием их порядкового номера, например, «…в табл. 2.2».

Формулы

Формулы – это комбинации математических знаков, выражающие какие-либо предложения.

Формулы, приводимые в реферате, должны быть наглядными, а обозначения, применяемые в них, соответствовать стандартам.

Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой, в той последовательности, в какой они даны в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента дается с новой строки. Первую строку объяснения начинают со слова «где» без двоеточия после него.

Формулы и уравнения следует выделять из текста свободными строками. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знака (+), минус (–), умножения (х) и деления (:).

Формулы нумеруют арабскими цифрами в пределах всей реферата или главы. В пределах реферата используют нумерацию формул одинарную, в пределах главы – двойную. Номер указывают с правой стороны листа на уровне формулы в круглых скобках.

В тексте ссылки на формулы приводятся с указанием их порядковых номеров, например: «…в формуле (2.2)» (второй формуле второй главы).

Иллюстрации

Иллюстрации позволяют наглядно представить явление или предмет такими, какими мы их зрительно воспринимаем, но без лишних деталей и подробностей.

Основными видами иллюстраций являются схемы, диаграммы и графики.

Схема – это изображение, передающее обычно с помощью условных обозначений и без соблюдения масштаба основную идею какого-либо устройства, предмета, сооружения или процесса и показывающее взаимосвязь их главных элементов.

Диаграмма – один из способов изображения зависимости между величинами. Наибольшее распространение получили линейные, столбиковые и секторные диаграммы.

Для построения линейных диаграмм используется координатное поле. По горизонтальной оси в изображенном масштабе откладывается время или факториальные признаки, на вертикальной – показатели на определенный момент (период) времени или размеры результативного независимого признака. Вершины ординат соединяются отрезками – в результате получается ломаная линия.

На столбиковых диаграммах данные изображаются в виде прямоугольников (столбиков) одинаковой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. Длина (высота) прямоугольников пропорциональна изображенным ими величинам.

Секторная диаграмма представляет собой круг, разделенный на секторы, величины которых пропорциональны величинам частей изображаемого явления.

График – это результат обработки числовых данных. Он представляет собой условные изображения величин и их соотношений через геометрические фигуры, точки и линии.

Количество иллюстраций в работе должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста.

Иллюстрации обозначаются словом «Рис.» и располагаются после первой ссылки на них в тексте так, чтобы их было удобно рассматривать без поворота работы или с поворотом по часовой стрелке. Иллюстрации должны иметь номер и наименование, расположенные по центру, под ней. Иллюстрации нумеруются в пределах главы арабскими цифрами, например: «Рис. 1.1» (первый рисунок первой главы). Ссылки на иллюстрации в тексте реферата приводят с указанием их порядкового номера, например: «…на рис. 1.1».

При необходимости иллюстрации снабжаются поясняющими данными (подрисуночный текст).

Приложения

Приложение – это часть основного текста, которая имеет дополнительное (обычно справочное) значение, но, тем не менее, необходима для более полного освещения темы. По форме они могут представлять собой текст, таблицы, графики, карты. В приложении помещают вспомогательные материалы по рассматриваемой теме: инструкции, методики, положения, результаты промежуточных расчетов, типовые проекты, имеющие значительный объем, затрудняющий чтение и целостное восприятие текста. В этом случае в тексте приводятся основные выводы (результаты) и делается ссылка на приложение, содержащее соответствующую информацию. Каждое приложение должно начинаться с новой страницы. В правом верхнем углу листа пишут слово «Приложение» и указывают номер приложения. Если в реферате больше одного приложения, их нумеруют последовательно арабскими цифрами, например: «Приложение 1», «Приложение 2» и т. д.

Каждое приложение должно иметь заголовок, который помещают ниже слова «Приложение» над текстом приложения, по центру.

При ссылке на приложение в тексте реферата пишут сокращенно строчными буквами «прил.» и указывают номер приложения, например: «…в прил. 1».

Приложения оформляются как продолжение текстовой части реферата со сквозной нумерацией листов. Число страниц в приложении не лимитируется и не включается в общий объем страниц реферата.

Библиографический список

Библиографический список должен содержать перечень и описание только тех источников, которые были использованы при написании реферата.

В библиографическом списке должны быть представлены монографические издания отечественных и зарубежных авторов, материалы профессиональной периодической печати (экономических журналов, газет и еженедельников), законодательные и др. нормативно-правовые акты. При составлении списка необходимо обратить внимание на достижение оптимального соотношения между монографическими изданиями, характеризующими глубину теоретической подготовки автора, и периодикой, демонстрирующей владение современными экономическими данными.

Наиболее распространенным способом расположения наименований литературных источников является алфавитный. Работы одного автора перечисляются в алфавитном порядке их названий. Исследования на иностранных языках помещаются в порядке латинского алфавита после исследований на русском языке.

Ниже приводятся примеры библиографических описаний использованных источников.

Статья одного, двух или трех авторов из журнала

Зотова Л. А., Еременко О. В. Инновации как объект государственного регулирования // Экономист. 2010. № 7. С. 17–19.

Статья из журнала, написанная более чем тремя авторами

Валютный курс и экономический рост / С. Ф. Алексашенко, А. А. Клепач, О. Ю. Осипова [и др.] // Вопросы экономики. 2010. № 8. С. 18–22.

Книга, написанная одним, двумя или тремя авторами

Олейник А. Н. Институциональная Горное дело: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2011. 416 с.

Книга, написанная более чем тремя авторами

Экономическая теория: учебник / В. Д. Камаев [и др.]. М.: ВЛАДОС, 2011. 143 с.

Сборники

Актуальные проблемы экономики и управления: сборник научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. 146 с.

Статья из сборника

Данилов А. Г. Система ценообразования промышленного предприятия // Актуальные проблемы экономики и управления: сб. научных статей. Екатеринбург: УГГУ, 2010. Вып. 9. С. 107–113.

Статья из газеты

Крашаков А. С. Будет ли обвал рубля // Аргументы и факты. 2011. № 9. С. 3.

Библиографические ссылки

Библиографические ссылки требуется приводить при цитировании, заимствовании материалов из других источников, упоминании или анализе работ того или иного автора, а также при необходимости адресовать читателя к трудам, в которых рассматривался данный вопрос.

Ссылки должны быть затекстовыми, с указанием номера соответствующего источника (на который автор ссылается в работе) в соответствии с библиографическим списком и соответствующей страницы.

Пример оформления затекстовой ссылки

Ссылка в тексте: «Под трансакцией понимается обмен какими-либо благами, услугами или информацией между двумя агентами» [10, С. 176].

В списке использованных источников:

10. *Сухарев О. С*. Институциональная Горное дело: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры /О.С. Сухарев. М.: Издательство Юрайт, 2016. 501 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАЩИТЫ РЕФЕРАТА

Необходимо заранее подготовить тезисы выступления (план-конспект).

Порядок защиты реферата.

1. Краткое сообщение, характеризующее цель и задачи работы, ее актуальность, полученные результаты, вывод и предложения.
2. Ответы студента на вопросы преподавателя.
3. Отзыв руководителя-консультанта о ходе выполнения работы.

Советы студенту:

- Готовясь к защите реферата, вы должны вспомнить материал максимально подробно, и это должно найти отражение в схеме вашего ответа. Но тут же необходимо выделить главное, что наиболее важно для понимания материала в целом, иначе вы сможете проговорить все 15-20 минут и не раскрыть существа вопроса. Особенно строго следует отбирать примеры и иллюстрации.
- Вступление должно быть очень кратким – 1-2 фразы (если вы хотите подчеркнуть при этом важность и сложность данного вопроса, то не говорите, что он сложен и важен, а покажите его сложность и важность).

- Целесообразнее вначале показать свою схему раскрытия вопроса, а уж потом ее детализировать.
- Рассказывать будет легче, если вы представите себе, что объясняете материал очень способному и хорошо подготовленному человеку, который не знает именно этого раздела, и что при этом вам обязательно нужно доказать важность данного раздела и заинтересовать в его освоении.
- Строго следите за точностью своих выражений и правильностью употребления терминов.
- Не пытайтесь рассказать побольше за счет ускорения темпа, но и не мямлите.
- Не демонстрируйте излишнего волнения и не напрашивайтесь на сочувствие.
- Будьте особенно внимательны ко всем вопросам преподавателя, к малейшим его замечаниям. И уж ни в коем случае его не перебивайте!
- Не бойтесь дополнительных вопросов – чаще всего преподаватель использует их как один из способов помочь вам или сэкономить время. Если вас прервали, а при оценке ставят в вину пропуск важной части материала, не возмущайтесь, а покажите план своего ответа, где эта часть стоит несколько позже того, на чем вы были прерваны.
- Прежде чем отвечать на дополнительный вопрос, необходимо сначала правильно его понять. Для этого нужно хотя бы немного подумать, иногда переспросить, уточнить: правильно ли вы поняли поставленный вопрос. И при ответе следует соблюдать тот же принцип экономности мышления, а не высказывать без разбора все, что вы можете сказать.
- Будьте доброжелательны и тактичны, даже если к ответу вы не готовы (это вина не преподавателя, а ваша).

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

1. 1. Хост-компьютеры.
2. Локальные сети и персональные компьютеры.
3. Каналы связи.
4. Хранение и предоставление доступа к информации.
5. Управление передачей сообщений.
6. Каналы связи, обеспечивающие взаимодействие между хост-компьютерами.
7. Обмен информацией между абонентами сети.
8. Использование баз данных сети.
9. Классификация прикладного программного обеспечения.
10. Пакеты прикладных программ.
11. Методо-ориентированные пакеты.
12. Системы реального времени.
13. Офисные приложения.
14. Инструменты электронных таблиц для решения экономических задач.
15. Классификация баз данных (БД).
16. Системы управления базами данных (СУБД). Классификация СУБД.
17. Локальные и глобальные сети. Intranet и Internet. Сетевые службы.
18. Поисковые системы: Яndex, Rambler, Google, ПОИСК@mail.ru.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (РЕФЕРАТА)

Проверяемые компетенции:ОПК-5

Знать:

- офисные приложения;
- основы создания баз данных;
- принципы работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Уметь:

- использовать офисные приложения;
- создавать базы данных средствами офисных приложений;
- использовать электронную почту и другие средства коммуникаций с помощью Интернета.

Владеть:

- инструментарием офисных приложений;
- технологией разработки баз данных;
- навыками работы в разных поисковых системах интернет и в системах коммуникации.

Критерии оценивания:

достижение поставленной цели и задач исследования (новизна и актуальность поставленных в реферате проблем, правильность формулирования цели, определения задач исследования, правильность выбора методов решения задач и реализации цели; соответствие выводов решаемым задачам, поставленной цели, убедительность выводов);

уровень эрудированности автора по изученной теме (знание автором состояния изучаемой проблематики, цитирование источников, степень использования в работе результатов исследований);

личные заслуги автора реферата (новые знания, которые получены помимо основной образовательной программы, новизна материала и рассмотренной проблемы, научное значение исследуемого вопроса);

культура письменного изложения материала (логичность подачи материала, грамотность автора);

культура оформления материалов работы (соответствие реферата всем стандартным требованиям);

знания и умения на уровне требований стандарта данной дисциплины: знание фактического материала, усвоение общих понятий и идей;

степень обоснованности аргументов и обобщений (полнота, глубина, всестороннее раскрытие темы, корректность аргументации и системы доказательств, характер и достоверность примеров, иллюстративного материала, наличие знаний интегрированного характера, способность к обобщению);

качество и ценность полученных результатов (степень завершенности реферативного исследования, спорность или однозначность выводов);

использование профессиональной терминологии;

использование литературных источников.

Правила оценивания:

Каждый показатель оценивается в 1 балл

Критерии оценки:

9-10 баллов (90-100%) - оценка «отлично»;

7-8 баллов (70-89%) - оценка «хорошо»;

5-6 баллов (50-69%) - оценка «удовлетворительно»;

0-4 балла (0-49%) - оценка «неудовлетворительно».

Приложение

Образец оформления титульного листа контрольной работы (реферата)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра информатики

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА (РЕФЕРАТ)

по дисциплине
«Прикладное программное обеспечение»

на тему:

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕДАЧЕЙ СООБЩЕНИЙ

Руководитель:
Дружинин А.В.
Студент гр. Х-20
Артёмова Елена Юрьевна

Екатеринбург – 2020

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического факультета

«___» _____ 2018 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Издание УГГУ Екатеринбург, 2018

УДК 531
Б 87

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от «07» июня 2018 г. (протокол № 7) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Учебно-методического совета Уральского государственного горного университета.

Брагин В. Г., Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

Б 87 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебное пособие / Ю. М. Казаков, В. Г. Брагин, Е. Б. Волков. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2018. – 250 с.
ISBN 978-5-8019-0460-3

Учебное пособие содержит краткие методические указания, примеры решений задач и упражнения для самостоятельной работы по основным темам курса теоретической механики: статика, кинематика точки и простейшие движения твёрдых тел, сложное движение точки, динамика точки и механической системы. Учебное пособие для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения.

ISBN 978-5-8019-0460-3

©Брагин В. Г., Волков Е. Б.,
Казаков Ю. М., 2018
©Уральский государственный горный университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА 4
1.1. Основные понятия статики 4
1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия 9
1.3. Произвольная плоская система сил 16
1.4. Равновесие систем тел 26
1.5. Произвольная пространственная система сил 34
1.6. Равновесие тел при наличии сил трения 44
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА 55
2.1. Криволинейное движение точки 55
2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела 62
вокруг неподвижной оси 62
2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела 73
2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела 84
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 100
3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки 100
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 114
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки 114
4.2. Колебания материальной точки 124
4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки 134
5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ 146
5.1. Теорема о движении центра масс системы 146
5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы
относительно оси 148
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы 153
5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию
движений твёрдого тела 162
6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ 177
6.1. Принцип Даламбера для системы 177
6.2. Принцип возможных перемещений 182
6.3. Общее уравнение динамики 189
6.4. Уравнения Лагранжа II рода 201
7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ 220
7.1. Ответы к упражнениям главы 1 220
7.2. Ответы к упражнениям главы 2 226
7.3. Ответы к упражнениям главы 3 231
7.4. Ответы к упражнениям главы 4 233
7.5. Ответы к упражнениям главы 5 236
7.6. Ответы к упражнениям главы 6 241
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 249

1. СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором освещаются условия равновесия тел под действием систем сил.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела, размерами которого можно пренебречь и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую массу, равную массе тела. Совокупность материальных точек называется **системой материальных точек**. Если система материальных точек такова, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то система называется **механической системой материальных точек**. Любое материальное тело представляет собой механическую систему материальных точек. Если точки системы связаны между собой так, что расстояния между любыми двумя точками не изменяются, то система называется **неизменяемой системой**, а тело – **абсолютно твердым телом**.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта (например, твердого тела) на другой. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н). Совокупность сил, действующих на механическую систему (в частности, на твёрдое тело), называют **системой сил.**

Если система сил, приложенная к твердому телу, оставляет его в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, то такая система сил называется **уравновешенной,** или **системой сил, эквивалентной нулю**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело или материальную точку, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело или материальная точка, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Основные виды связей и их реакции

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным. Если на тело наложены внешние связи, стесняющие (ограничивающие) свободу его перемещений, то тело является несвободным. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется **реакцией связи**. Всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если освободить тело от связей и заменить действие связей их реакциями. **Реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, вдоль которого связь препятствует перемещению тела.**

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция $\vec{R}$ абсолютно гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей (рис. 1.1, *a*). Такая реакция называется **нормальной реакцией**.

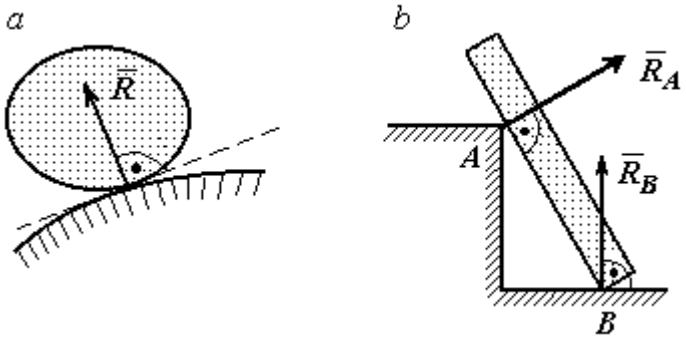


Рис. 1.1. Реакция опоры:

Брус с гладкой поверхностью (рис. 1.1, *b*), опирающийся в точке *B* на гладкий пол и в точке *A* на ребро (точечную опору), имеет реакциями опор $\vec{R}_B$ – реакцию пола и $\vec{R}_A$ – реакцию ребра (точечной опоры). Реакции приложены к брусу и направлены по нормалям к поверхности пола и поверхности бруса.

Цилиндрический шарнир и подвижная опора (каток). Цилиндрический шарнир (на рис. 1.2, *a* обозначен буквой *A*) представляет собой устройство, которое допускает поворот тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (например, цилиндрическая втулка, надетая на неподвижный цилиндр).

Реакция цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира представляют в виде составляющих, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей (см. рис. 1.2, *a*). Величина реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$, где $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ – составляющие реакции.

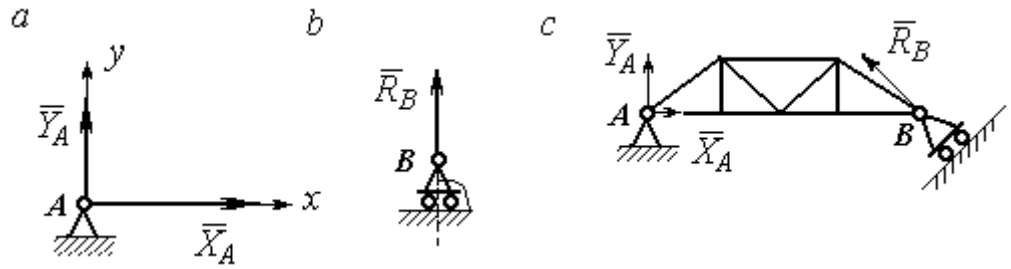


Рис. 1.2. Реакции шарнирных опор:
a – цилиндрический шарнир; *b* – каток; *c* – мостовая конструкция с цилиндрической шарнирной опорой и опорой на каток

Реакция $\vec{R}_B$ опоры на каток (подвижной опоры) (рис. 1.2, *b*) перпендикулярна опорной поверхности.

На рис. 1.2, *c* показаны реакции связей мостовой конструкции с цилиндрической шарнирной опорой и подвижной опорой (катком). Реакция цилиндрического шарнира в точке *A* изображена в виде разложения на взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}_B$ катка в точке *B* перпендикулярна наклонной плоскости, на которой стоит каток.

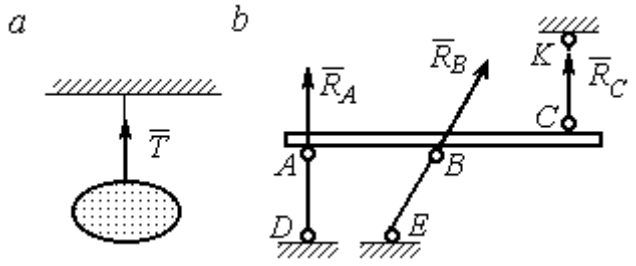


Рис. 1.3. Реакция гибкой нити и невесомого стержня

Гибкая связь и жесткий невесомый стержень. Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса) препятствует удалению тела от точки подвеса. (рис. 1.3, *a*). Реакция связи $\vec{T}$,

равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити в сторону противоположную направлению, вдоль которого нить препятствует перемещению тела

Если опорой тела служит невесомый стержень с шарнирами на концах, то реакция прямолинейного стержня приложена к телу и направлена вдоль стержня. Направление реакции стержня противоположно направлению, по которому стержень препятствует перемещению тела.

Реакции невесомых стержней, удерживающих балку, изображённую на рис. 1.3, *b*, направлены исходя из предположения, что балка может перемещаться вниз. При этом стержни *AD* и *BE* сжаты, а стержень *CK* растянут.

Сферический шарнир. Связь в виде сферического шарнира не позволяет перемещать тело в пространстве, но допускает поворот в пространстве вокруг неподвижной точки. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При решении задач реакцию изображают ее составляющими. На рис. 1.4 реакция $\vec{R}_A$ сферического шарнира A разложена на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Величина реакции сферического шарнира определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

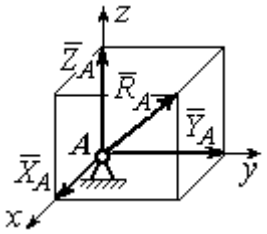


Рис. 1.4. Реакция сферического шарнира

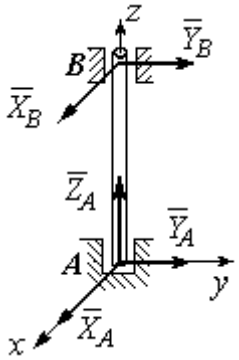


Рис. 1.5. Реакции подшипника и подпятника

Подшипник и подпятник. Подшипник представляет собой цилиндрический шарнир (рис. 1.5, подшипник *B*). Его реакция может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакция подшипника раскладывается на две составляющие. Например, на рис. 1.5 реакция $\vec{R}_B$ подшип-

ника *B* разложена на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные координатным осям. Величина реакции подшипника определяется по формуле: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

Подпятник является цилиндрическим шарниром с упором. В задачах реакция подпятника обычно изображается векторами $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, представляющими разложение силы реакции подпятника по заданным направлениям координатных осей (см. рис. 1.5, подпятник *A*). Величина реакции подпятника определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$.

Проекция силы на ось и на плоскость

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый, проекция положительна, если тупой – отрицательна. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю.

Проекции сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$, изображённых на рис. 1.6, *a*, на ось *x*: $F_x = F\cos\alpha$, $Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi$, $P_x = P\cos 90^\circ = 0$.

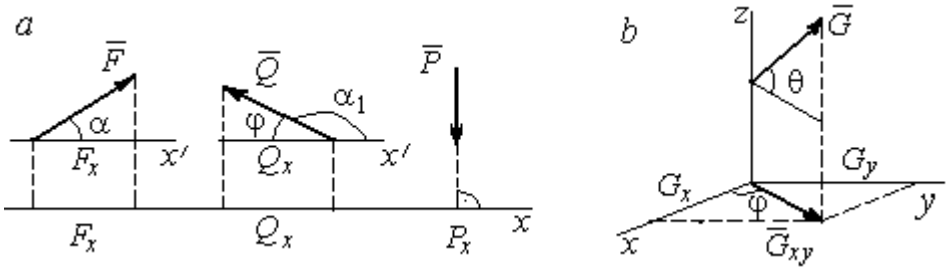


Рис. 1.6. Проекция силы на ось и на плоскость:
a – проекция силы на ось; *b* – проекция силы на плоскость

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключённый между проекциями начала и конца силы $\vec{G}$ на эту плоскость.

На рис. 1.6, *b* вектор $\vec{G}_{xy}$ является проекцией силы $\vec{G}$ на плоскость *xy*. По величине $G_{xy} = G\cos\theta$, где θ – угол между направлением силы $\vec{G}$ и её проек-

ции $\vec{G}_{xy}$. Проекции силы $\vec{G}$ на оси xyz: $G_x = G_{xy}\cos\varphi = G\cos\theta\cos\varphi$, $G_y = G_{xy}\sin\varphi = G\cos\theta\sin\varphi$, $G_z = G\sin\theta$.

1.2. Система сходящихся сил. Условия равновесия

Для равновесия **пространственной системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх осей прямоугольной системы координат были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси.

Для равновесия **плоской системы сходящихся сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси.

Примеры решения задач на равновесие сходящейся системы сил

Задача 1. Каток весом 20 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который одним концом закреплён на поверхности шара, а другим – на вертикальной стене (рис. 1.7). Угол наклона троса к вертикальной стене $\beta = 120°$. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 45°$. Определить силу давления катка на плоскость и натяжение троса.

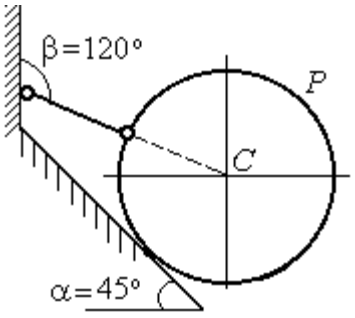


Рис. 1.7. Равновесие шара

Решение

При равновесии на каток действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция троса $\vec{N}$ и реакция опоры $\vec{R}$. Линии действия всех сил находятся в одной плоскости и пересекаются в центре шара. Направления реакций показаны на рис. 1.8.

Условия равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0.$$

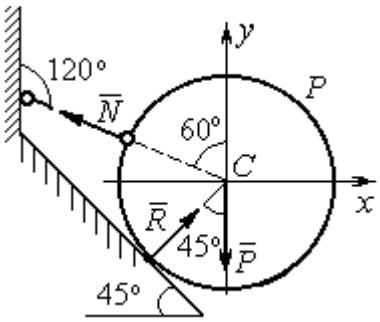


Рис. 1.8. Силы, действующие на каток, при его равновесии

Проведя оси координат, как показано на рис. 1.8, выразим условия равновесия в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = -N\cos 30^\circ + R\cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N\cos 60^\circ + R\cos 45^\circ - P = 0.$$

Подставляя в уравнения исходные данные задачи, найдем: $N = 14{,}64$ кН, $R = 17{,}93$ кН.

Натяжение троса равно модулю его реакции. Сила давления катка на плоскость равна реакции опоры гладкой плоскости, но направлена в противоположную сторону.

Задача 2. Кронштейн состоит из невесомых стержней *AC* и *BC*, скрепленных друг с другом и с вертикальной стеной шарнирами, как показано на рис. 1.9. Стержень *BC* горизонтален, стержень *AC* составляет с горизонталью угол $\beta = 60^\circ$. К шарниру *C* прикреплены два троса, удерживающие грузы 1 и 2 весом $G_1 = 10$ кН и $G_2 = 12$ кН. Трос, удерживающий груз 1, вертикален, а другой перекинут через блок *D* так, что угол наклона участка троса *CD* к вертикали $\alpha = 60^\circ$. Определить реакции стержней *BC* и *AC*.

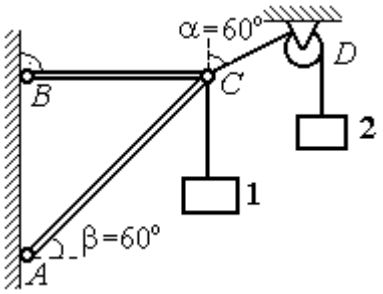


Рис. 1.9. Равновесие кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла *C*, в котором закреплены стержни и тросы. На узел *C* действуют реакции $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ тросов, натянутых грузами 1 и 2, и реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стержней *BC* и *AC* (рис. 1.10). Модули реакций тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны весу грузов: $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$.

Плоская система сил ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) является сходящейся. Условия равновесия: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. Проведя оси координат xCy, как показано на рис. 1.10, и определяя проекции сил на оси, получим систему уравнений:

$$N_1 + N_2\cos 60^\circ - T_2\cos 30^\circ = 0;$$

$$N_2\cos 30^\circ + T_1 - T_2\cos 60^\circ = 0.$$

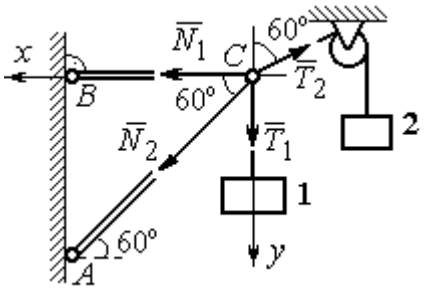


Рис. 1.10. Силы, действующие на узел *C* при его равновесии

Подставим в уравнения исходные данные задачи. С учётом того, что $T_1 = G_1 = 10$ кН, $T_2 = G_2 = 12$ кН, найдём значения реакций: $N_1 = 12{,}7$ кН, $N_2 = -4{,}62$ кН. Отрицательная величина N_2 означает, что вектор $\vec{N}_2$ реакции стержня *AC* направлен в противоположную сторону.

Задача 3. Груз весом $P = 20$ кН поднимается стержневым краном *ABC* посредством каната, перекинутого через блоки *B* и *D* (рис. 1.11). Блок *B* установлен в месте шарнирного соединения невесомых стержней *AB* и *BC*, блок *D* укреплён так, что участок троса *DB* составляет с вертикалью угол $\beta = 60^\circ$. Стержни *AB* и *BC* соединены со стенками шарнирами. Конец троса, несущий груз *P*, переброшен через блок *E* и на отрезке *BE* составляет с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$. Пренебрегая трением в блоке и размерами блока *B*, определить усилия в стержнях *AB* и *BC* при равновесии груза.

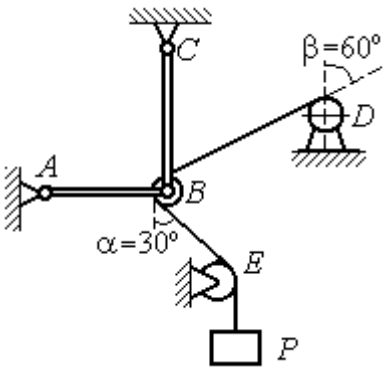


Рис. 1.11. Равновесие стержневой конструкции

Решение

Рассмотрим равновесие блока *B* вместе с отрезками нити *BE* и *BD*. Освободим блок *B* от связей и заменим их реакциями.

Рассматривая блок и отрезок нити как одно целое, можно не учитывать силы взаимного давления нити и блока. На блок действует реакция $\vec{T}$ нити *BD*, приложенная в точке *D*, численно равная весу груза *P*, реакция $\vec{T}'$ нити *BE*, приложенная в точке *E* и также численно равная весу груза *P* и реакции стержней $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (см. рис. 1.12).

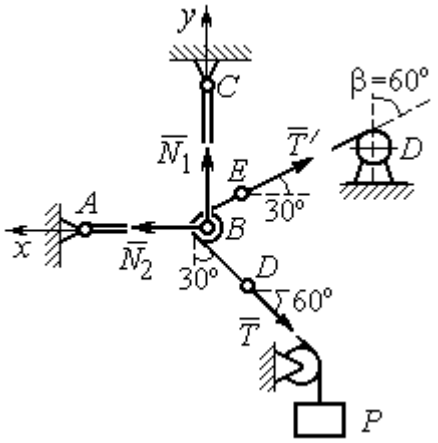


Рис. 1.12. Силы, действующие на блок *B*, при его равновесии

Пренебрегая размерами блока, можно считать систему сил сходящейся. Проведём координатные оси, как показано на рис. 1.12, и выразим условия равновесия плоской сходящейся системы сил в виде системы уравнений:

$$\sum F_{kx} = N_2 - T'\cos 30^\circ - T\cos 60^\circ = 0;\ \sum F_{ky} = N_1 + T'\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0.$$

Решая полученную систему уравнений с учётом, что $T' = T = P$ = 20 кН, получим: N_1 = 7,32 кН, N_2 = 27,32 кН.

Задача 4. Шахта ориентируется в вертикальной плоскости с помощью несвободного проволочного отвеса *CBDP*, натянутого грузом весом *P* = 50 Н (рис. 1.13).

Определить натяжения частей отвеса *CB*, *BD*, *DP* и натяжения оттяжек *BA* и *DE*, если угол отклонения оттяжки *BC* от горизонтали $\alpha = 60^\circ$, а отклонение средней части отвеса *BD* от вертикали $\beta = 4^\circ$. Весом проволоки отвеса пренебречь.

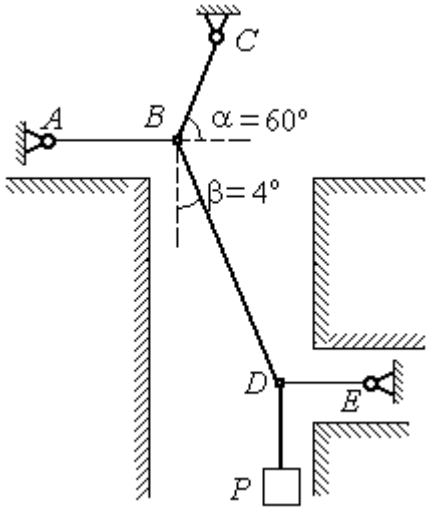


Рис. 1.13. Схема отвеса

Решение

Рассмотрим равновесие узла *D*, в котором сходятся три силы – реакция $\vec{S}$ средней части отвеса, реакция $\vec{T}_E$ оттяжки *DE* и реакция $\vec{T}_P$ отвеса на участке

DP, равная весу груза $T_P = P$ (рис. 1.14). Выберем оси координат *xDy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *D:*

$$\sum F_{kx} = S\cos 86^\circ - T_E = 0\,; \;\; \sum F_{ky} = S\cos 4^\circ - T_P = 0\,.$$

Из второго уравнения с учётом, что натяжение отвеса на участке *DP* $T_P = P =$ 50 Н, находим натяжение S на среднем участке отвеса: $S = \dfrac{T_P}{\cos 4^\circ} = 50{,}12$ Н. Из первого уравнения находим натяжение $T_E = S\cos 86^\circ = 3{,}49$ Н.

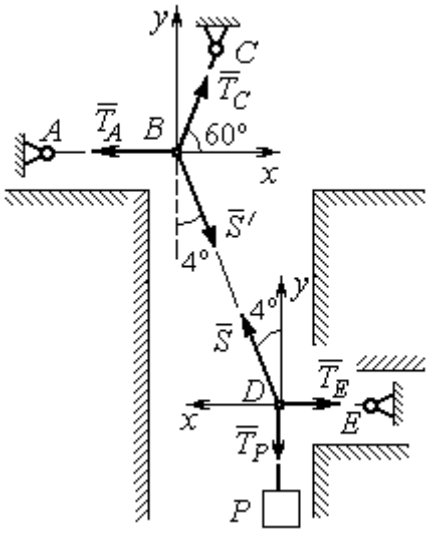


Рис.1.14. Силы, действующие в узлах *B* и *D* при равновесии отвеса

Теперь рассмотрим равновесие узла *B*, на который действуют реакция $\vec{T}_A$ оттяжки *BA*, реакция $\vec{T}_C$ верхней части отвеса *BC* и реакция $\vec{S}'$ средней части отвеса. Вектор силы $\vec{S}'$ противоположен направлению вектора $\vec{S}$: $\vec{S}' = -\vec{S}$, а численно (по принципу равенства действия и противодействия) они равны $S' = S$ (см. рис. 1.14). Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.14, и составим уравнения равновесия узла *B:*

$$\sum F_{kx} = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ - T_A = 0\,; \quad \sum F_{ky} = T_C\cos 30^\circ - S'\cos 4^\circ = 0\,.$$

Находим натяжение отвеса на верхнем участке *BC* и натяжение T_A оттяжки *BA*: $T_C = \dfrac{S'\cos 4^\circ}{\cos 30^\circ} = 57{,}73$ Н; $T_A = T_C\cos 60^\circ + S'\cos 86^\circ = 32{,}36$ Н.

Задача 5. Груз *P* = 20 кН удерживается двумя стержнями *AC*, *AD* одинаковой длины и цепью *AB*, скреплённых в точке *A*, так, что плоскость треугольника *ADC* горизонтальна (рис. 1.15). Цепь *BA* отклонена от вертикальной стены на угол $\beta = 60^\circ$ и расстояние *CE* = *ED.* Трос закреплён одним концом в точке *A*, а другой его конец, несущий груз, переброшен через блок *K* так, что отрезок

троса AK находится в плоскости, параллельной плоскости стены, и составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Крепления стержней шарнирные. Углы у оснований стержней $\angle DCA = \angle CDA = 60^\circ$. Определить реакции стержней и натяжение цепи. Весами стержней пренебречь.

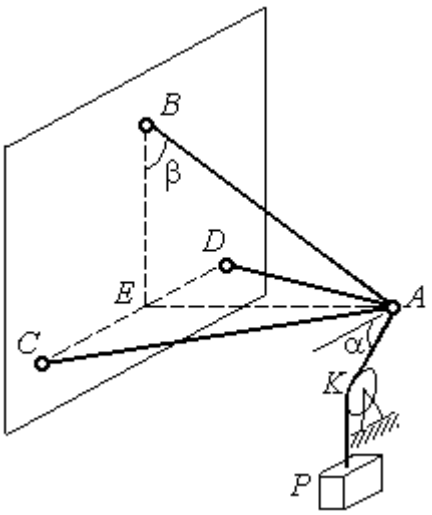


Рис. 1.15. Конструкция пространственного кронштейна

Решение

Рассмотрим равновесие узла A. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция цепи $\vec{S}_B$ направлена вдоль линии натянутой цепи (рис. 1.16). Реакция троса $\vec{T}$ направлена вдоль троса по линии AK и численно равна весу груза: $T = P$. Направления реакций выбраны в предположении, что стержни и цепь растянуты.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.16. На узел A действует пространственная сходящаяся система сил.

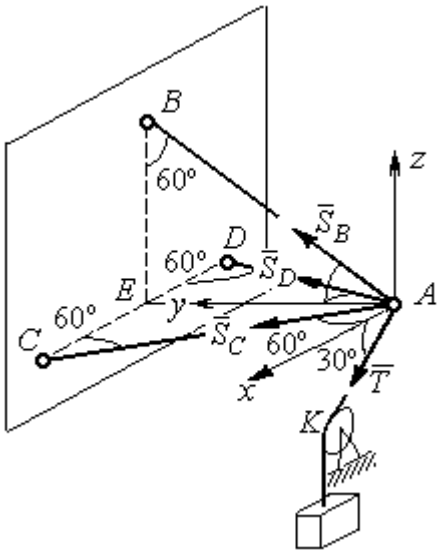


Рис. 1.16. Силы, действующие на узел A, при его равновесии

Условия равновесия пространственной сходящейся системы сил $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum F_{kz} = 0$, где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = S_C \cos 60^\circ - S_D \cos 60^\circ + T \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = S_C \cos 30^\circ + S_D \cos 30^\circ + S_B \cos 30^\circ = 0; \quad \sum F_{kz} = S_B \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0.$$

Решая эту систему, находим $S_B = T = P = 20$ кН; $S_C = -27{,}32$ кН; $S_D = 7{,}32$ кН. Знак минус величины S_C показывает, что реакция стержня AC имеет обратное направление. Натяжение цепи равно модулю реакции $\vec{S}_B$.

Задача 6. Подъёмное устройство (рис. 1.17) состоит из двух стержневых опор DB и DA и растяжки DC, соединённых в точке D. В точке D к устройству прикреплена вертикальная нить, удерживающая груз весом $P = 50$ кН.

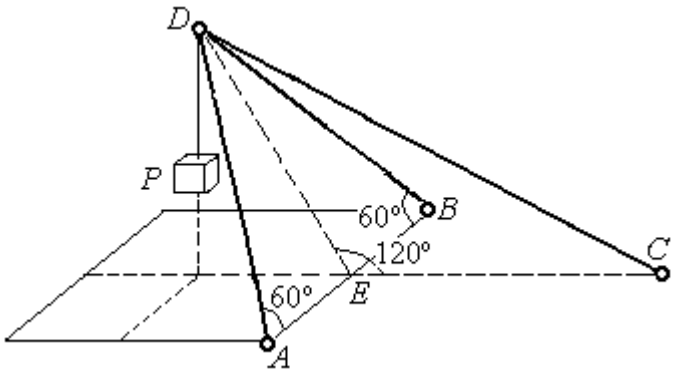


Рис. 1.17. Конструкция подъёмного устройства

Определить реакцию стержневых опор и усилие в растяжке подъёмного устройства, если крепления стержней шарнирные, угол $\angle DEC = 120^\circ$, $AE = EB$, $DE = EC$, а углы в основании опор $\angle DAB = \angle DBA = 60^\circ$.

Решение

Рассматриваем равновесие узла D. Освобождаем узел от связей, заменяя действие связей реакциями. Реакции стержней $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$, $\vec{S}_C$ направлены по стержням, реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу тела, направлена вдоль нити (рис. 1.18). Направление реакций выбрано в предположении, что все стержни растянуты.

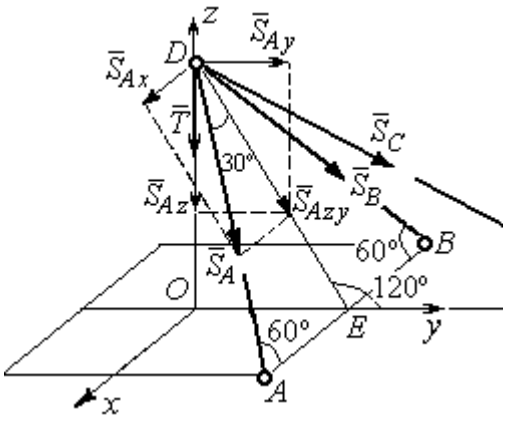


Рис. 1.18. Силы, действующие на узел D, при его равновесии

На узел D действует пространственная сходящаяся система сил. Выберем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.18, и составим уравнения равновесия. Заметим, что при определении проекции си-

лы $\vec{S}_A$ на оси координат следует вначале получить её проекции $\vec{S}_{Ax}$ на ось Ox и $\vec{S}_{Azy}$ – на плоскость Oyz, а затем найти проекции силы $\vec{S}_{Azy}$ на оси Oy и Oz. На рис. 1.18 показана последовательность вычисления проекций силы $\vec{S}_A$ на оси координат: $S_{Ax} = S_A\cos60^\circ$, $S_{Ay} = S_{Azy}\cos60^\circ = S_A\cos30^\circ\cos60^\circ$, $S_{Az} = -S_{Azy}\cos30^\circ = -S_A\cos^2 30^\circ$. Определение проекций силы $\vec{S}_B$ производится аналогично. Сила $\vec{S}_C$ расположена в плоскости Oyz и имеет своими проекциями $S_{Cy} = S_C\cos30^\circ$, $S_{Cz} = -S_C\cos60^\circ$. В результате уравнения равновесия узла D принимают вид

$$\sum F_{ky} = S_A\cos30^\circ\cos60^\circ + S_B\cos30^\circ\cos60^\circ + S_C\cos30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kx} = S_A\cos60^\circ - S_B\cos60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -S_A\cos^2 30^\circ - S_B\cos^2 30^\circ - S_C\cos60^\circ - T = 0.$$

Решая систему, получим: $S_A = S_B = -50$ кН, $S_C = 50$ кН.

Отрицательные значения S_A и S_B означают, что реакций стержней AD и DB направлены в противоположную сторону. В результате стержни AD и DB сжаты, а стержень DC растянут.

1.3. Произвольная плоская система сил

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется **плоской системой сил.**

Алгебраическим моментом $M_O(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра O, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ и кратчайшего расстояния h от центра до линии действия силы (рис. 1.19, *а*): $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Величину h называют **плечом силы.** Единица измерения момента – Н·м. Момент считается положительным, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг центра в

направлении против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

На рис. 1.19, *b* показаны знаки моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = +Fh_2$, $M_O(\vec{Q}) = -Qh_1$. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра *O* равен нулю: $M_O(\vec{R}) = 0$, так как плечо силы равно нулю.

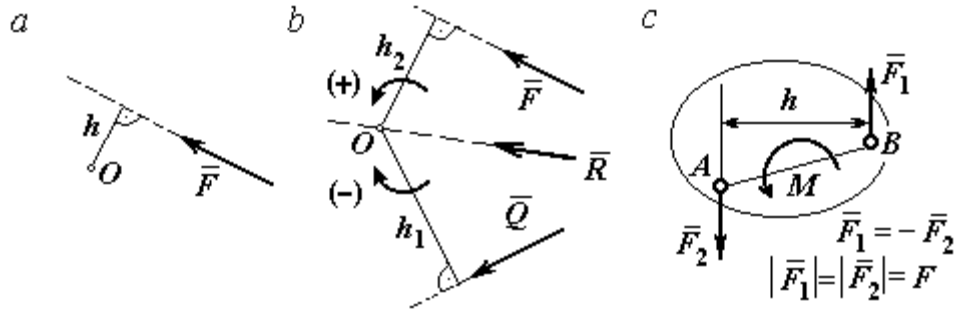


Рис. 1.19. Схемы к вычислению момента силы:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил

Парой сил, или просто парой (рис.1.19, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. **Плечом пары** называют кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары и плеча пары. Правило знаков такое же, как и для момента силы. Пара сил, показанная на рис. 1.19, *c*, имеет плечо *h* и момент *M*: $M = F_1 h = F_2 h$. Поскольку пара сил характеризуется только ее моментом, на схемах пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. *M* на рис. 1.19, *c*).

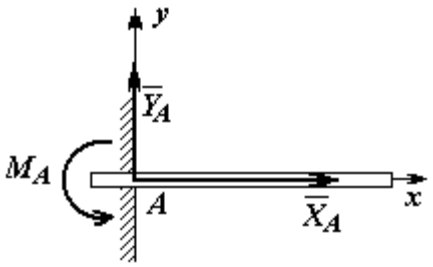


Рис. 1.20. Реакция жесткой заделки

Жесткая заделка. Такая связь (рис. 1.20) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция жесткой заделки состоит из силы

реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. Силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль координатных осей (см. рис. 1.20). Величина силы реакции $\vec{R}_A$ определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

При вычислении моментов сил часто применяют **теорему Вариньона** о том, что момент равнодействующей системы сил относительно любого центра равен сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра. На рис. 1.21 показана схема применения теоремы Вариньона. Силу $\vec{F}$ раскладываем на составляющие $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, направленные вдоль координатных осей так, что имеет место равенство $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Численно составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равны проекциям силы $\vec{F}$ на координатные оси: $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$. Для каждой из составляющих находим плечи h_1 и h_2 относительно центра *O*. Тогда (с учётом знаков) момент силы $\vec{F}$ относительно центра *O*: $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = F_1 h_1 + F_2 h_2$.

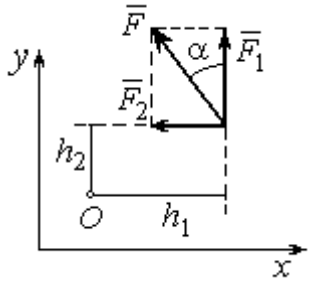


Рис.1.21. Применение теоремы Вариньона

Распределённая нагрузка. Силы, приложенные непрерывно вдоль некоторой поверхности, называются **распределенными**. Распределённая нагрузка характеризуется интенсивностью *q*. Интенсивность нагрузки, равномерно распределённой вдоль прямой, измеряется в Н/м. На рис. 1.22 приведена плоская система сил, равномерно распределённых вдоль прямой. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил, равномерно распределённых вдоль прямой, приложена в середине отрезка действия распределённой нагрузки и по модулю равна про-

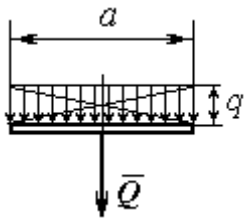


Рис. 1.22. Нагрузка, равномерно распределённая по прямой

изведению интенсивности нагрузки на длину её действия: $Q = qa$, где a – длина отрезка действия распределённой нагрузки.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Примеры решения задач на равновесие произвольной плоской системы сил

Задача 7. Однородная балка *AB* весом *P* = 100 кН прикреплена к стене шарниром *A* (рис.1.23). Балка удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса, прикреплённого к балке в точке *B*, перекинутого через блок *D* и несущего груз *Q*. Участок троса *DB* образует с вертикалью угол 30°. В точке *C* к балке подвешен груз *G* весом *G* = 200 кН. Определить вес груза *Q*, удерживающий балку в равновесии, и реакцию шарнира *A*, пренебрегая трением в блоке, если расстояние $BC = 0{,}25BA$.

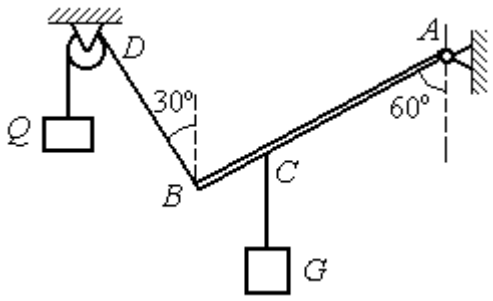


Рис. 1.23. Равновесие балки

Решение

Объектом равновесия является балка *AB*. На балку действуют сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине отрезка *AB*, реакция шарнира *A*, представлен-

ная в виде двух составляющих $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленных вдоль координатных осей, реакция $\vec{T}_1$ нити, удерживающей груз *Q*, и реакция $\vec{T}_2$ нити, удерживающей груз *G*. Направления сил и реакций связей показаны на рис. 1.24.

Силы – $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{P}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, действующие на балку, составляют произвольную плоскую систему. Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0\,;\ \sum F_{ky} = 0\,;\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0\,.$$

Выберем систему координат *xAy,* как показано на рис. 1.24.

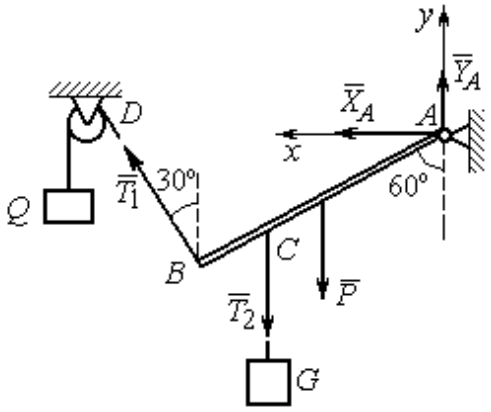


Рис. 1.24. Внешние силы и реакции связей при равновесии балки

Первые два уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = X_A + T_1\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + T_1\cos 30^\circ - T_2 - P = 0.$$

Выберем центром точку *A* и будем вычислять моменты сил относительно этого центра. Обозначим (для удобства записи) длину $AB = \ell$. Условие равновесия балки в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно центра *A* имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -T_1\ell + T_2\frac{3}{4}\ell\cos 30^\circ + P\frac{1}{2}\ell\cos 30^\circ = 0.$$

Подставим данные из условия задачи, с учётом, что реакция нити, удерживающей груз *Q*, по модулю равна весу этого груза: $T_1 = Q$, а реакция нити, удерживающей груз *G*, численно равна весу груза *G*: $T_2 = G$.

Получим систему уравнений:

$$X_A + Q\cdot 0{,}5 = 0,\ \ Y_A + Q\cdot 0{,}866 - 300 = 0,\ \ -Q + 173{,}2 = 0.$$

Решая систему, найдём $Q = 173{,}2$ кН, $X_A = -86{,}6$ кН, $Y_A = 150{,}01$ кН.

Задача 8. Рама *ACE* (рис. 1.25, *a*) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара сил с моментом $M = 8$ кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю $F = 10$ кН, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная на отрезке *AB* нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м. В точке *E* под прямым углом к отрезку *CE* рамы прикреплен трос, перекинутый через блок и несущий груз $P = 20$ кН.

Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие рамы *ACE*. Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.25, *b*.

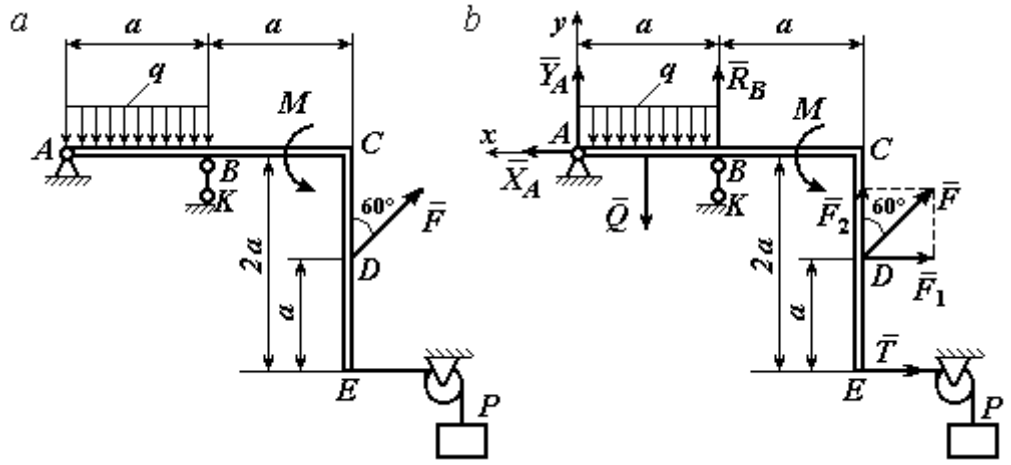


Рис. 1.25. Равновесие рамы:
a – конструкция и нагрузка рамы; *b* – внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию $\vec{R}_A$ шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными, соответственно, вдоль горизонтальной оси *Ax* и вертикальной *Ay*. Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Действие груза *P* на раму изображается реакцией троса $\vec{T}$, модуль которой ра-

вен весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка AB и численно равна: $Q = qa = 2 \cdot 2 = 4$ кН. На рис. 1.25, *b* показано направление внешних сил и реакций при равновесии рамы. Направление реакции стержневой опоры *BK* выбрано в предположении, что стержень сжимается.

При равновесии рамы *ACE* действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B, \vec{T}, M$) ~ 0. Условия равновесия имеют вид $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *Ax*, *Ay*, первые два уравнения из условий равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0. \qquad (1.1)$$

При составлении третьего уравнения моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае линии действия сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, составляющих реакцию шарнира *A*, проходят через центр *A*, плечи сил равны нулю, и, следовательно, моменты этих сил относительно данного центра равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$, $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобнее воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (см. рис. 1.25, *b*). Величины сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяются как проекции силы *F* на оси координат: $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$. По теореме Вариньона момент силы $\vec{F}$ относительно центра *A* равен сумме моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно того же центра *A*: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$.

В результате уравнение равновесия в форме моментов имеет вид

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q \cdot 0{,}5a + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0. \qquad (1.2)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.1), (1.2) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B. Решая эту систему, найдем: X_A= 28,66 кН; Y_A= 59,66 кН; R_B = – 60,66 кН.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции $\vec{R}_B$ стержневой опоры BK противоположно направлению, показанному на рис. 1.25, *b*, т. е. стержень BK растягивается. Реакция шарнирной опоры *A* – сила $\vec{R}_A$ – находится как геометрическая (векторная) сумма сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Величина реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18$ кН.

Задача 9. Прямоугольная рама *ABCED* (рис. 1.26) в точке *A* закреплена жёсткой заделкой. В точке *E* к раме прикреплена нить, составляющая угол 60º к горизонту. Другой конец нити, переброшенный через невесомый блок, несёт груз весом *P* = 15 кН. На раму действуют: пара сил с моментом M = 12 кН·м, сила $\vec{F}$, равная по модулю *F* = 10 кН, приложенная в точке *C* под углом 30° к горизонтальному участку рамы *BE*, и равномерно распределенная на отрезке *BC* нагрузка интенсивностью *q* = 2 кН/м. В точке *D* под углом 60° к горизонту на раму действует сила $\vec{G}$, численно равная 20 кН.

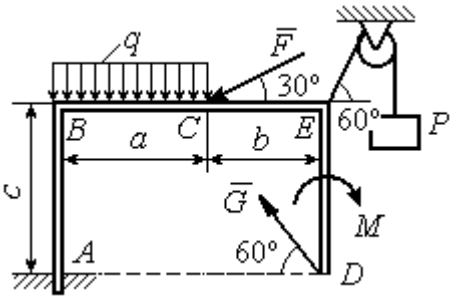


Рис. 1.26. Конструкция рамы

Пренебрегая весом рамы, определить реакцию жесткой заделки в точке *A*, если размеры рамы: *a* = 2 м, *b* = 1 м, *c* = 5 м.

Решение

Объектом равновесия является рама *ABCED.* Связями в данной конструкции являются жесткая заделка рамы в точке *A* и нить, натянутая грузом *P.* Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию жесткой заделки в точке *A* в виде силы, которую представим двумя ее составляющими $-\vec{X}_A$ и

$\vec{Y}_A$, и парой сил с моментом M_A (рис. 1.27). Реакция нити $\vec{T}$, приложенная к раме в точке *E*, направлена вдоль нити и численно равна весу груза $T = P$. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и численно равна: $Q = qa = 4$ кН.

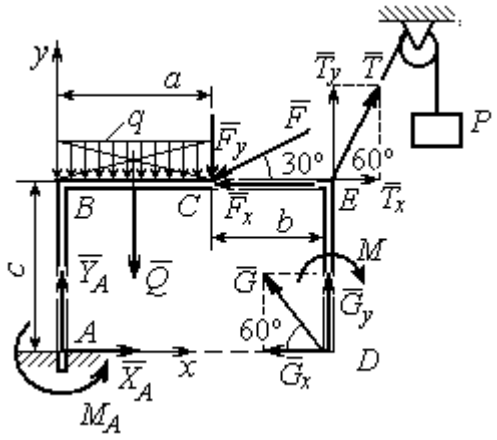


Рис. 1.27. Внешние силы и реакции связей при равновесии рамы

Действующие на раму силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил: $(\vec{Q}, \vec{F}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, M) \sim 0$. Условия равновесия для такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.27, и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ - G\cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q - F\cos 60^\circ + T\cos 30^\circ + G\cos 30^\circ = 0. \quad (4)$$

Моменты сил будем вычислять относительно центра *A*. В этом случае моменты сил $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ равны нулю: $M_A(\vec{X}_A) = 0$; $M_A(\vec{Y}_A) = 0$.

При определении момента силы $\vec{F}$ удобно воспользоваться теоремой Вариньона. С этой целью представим вектор силы $\vec{F}$ как равнодействующую двух сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельных осям *Ax* и *Ay*: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (см. рис. 1.27). Величины сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ определяются как проекции силы $\vec{F}$ на оси координат: $F_x = F\cos 30^\circ$, $F_y = F\cos 60^\circ$. Плечо вектора силы $\vec{F}_x$ относительно центра *A* равно *c* (как длина перпендикуляра, проведённого из центра *A* на линию действия силы $\vec{F}_x$), плечом силы $\vec{F}_y$ является расстояние *a*. По теореме Вариньона

момент силы $\vec{F}$ относительно центра A равен алгебраической сумме моментов сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно того же центра:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot c - F_y \cdot a = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a .$$

Аналогично вычисляем моменты сил $\vec{G}$ и $\vec{T}$: $M_A(\vec{G}) = G\cos 30^\circ \cdot (a+b)$; $M_A(\vec{T}) = -T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b)$. В результате уравнение моментов имеет вид:

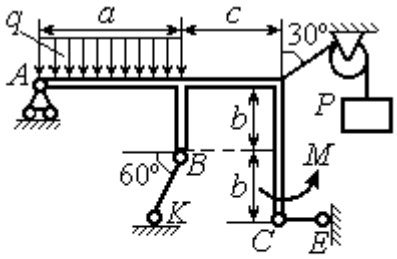
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = F\cos 30^\circ \cdot c - F\cos 60^\circ \cdot a - T\cos 60^\circ \cdot c + T\cos 30^\circ \cdot (a+b) +$$

$$+ G\cos 30^\circ \cdot (a+b) - Q\frac{a}{2} - M + M_A = 0. \qquad (1.5)$$

Подставляя в уравнения равновесия (1.3) – (1.5) численные значения из условий задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, M_A, откуда найдём значения реакций: X_A= 11,16 кН; Y_A= –21,31 кН; M_A = –70,73 Н·м. Знаки показывают, что составляющая $\vec{Y}_A$ силы реакции жёсткой заделки и момент реакции M_A направлены в противоположную сторону. Величина силы реакции жесткой заделки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ = 24,05 кН.

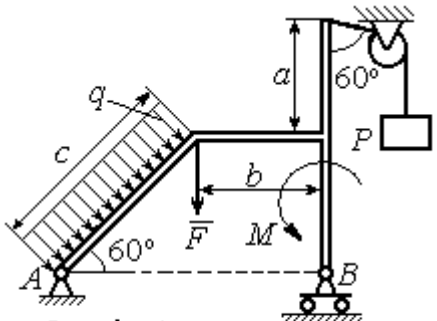
Упражнения

Упражнение 1.1



a = 3 м, b = 1 м, c = 2 м,
P = 15 кН, M = 3 кНм, q = 5 кН/м.
Найти реакцию стержней BK, CE
и реакцию шарнира A

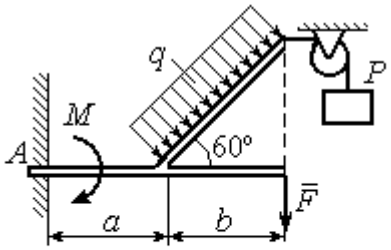
Упражнение 1.2



a = 2 м, b = 1 м, c = 3 м,
M = 3 кНм, q = 3 кН/м,
P = 2 кН, F = 4 кН.
Найти реакцию шарниров A и B

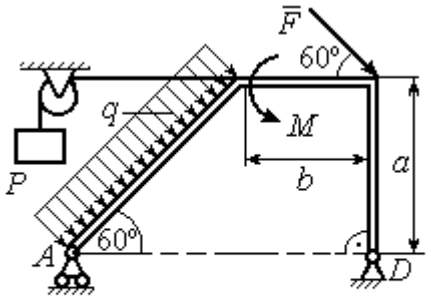
Рис. 1.28. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.1, 1.2

Упражнение 1.3



$a = 1$ м, $b = 2$ м, $F = 2$ кН,
$P = 3$кН, $M = 3$ кН·м,
$q = 2$ кН/м
Найти реакцию жесткой заделки

Упражнение 1.4



$a = 3$ м, $b = 1$ м, $P = 2$ кН, $F = 3$ кН,
$M = 3$ кН·м, $q = 2$ кН/м.
Найти реакцию шарниров A и D

Рис. 1.29. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.3, 1.4

1.4. Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называются **внутренними** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию.

Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. В уравнения равновесия будут входить только силы, непосредственно приложенные к телу, равновесие которого рассматривается. **При этом реакции внутренних связей, приложенные к разным телам, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.**

Примеры решения задач на равновесие систем тел

Задача 10. Диск весом Q = 100 кН опирается на вертикальную стенку и на наклонную балку AB. На диск действует сила $\vec{F}$, равная по величине 50 кН (рис. 1.30). Линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр диска под углом 30º к его вертикальному диаметру.

Однородная балка AB весом $G = 80$ кН закреплена в точке A шарнирно и удерживается под углом 60º к стене при помощи вертикального троса, один конец которого закреплён на балке в точке B, а другой – переброшен через блок и несёт груз весом P. Определить давление диска на стенку и на балку, реакцию шарнира A и вес груза P, удерживающий конструкцию в равновесии, если длина балки AB $\ell = 6$ м, радиус диска $r = 1$ м.

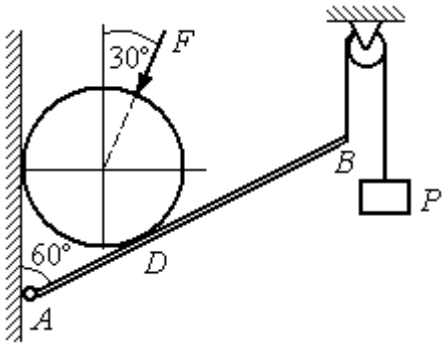


Рис. 1.30. Равновесие составной конструкции

Решение

Объект равновесия включает балку и диск и представляет собой составную конструкцию. Опора диска на балку в точке D является внутренней связью конструкции. Рассмотрим равновесие диска и балки отдельно.

Освобождаем диск от связей. На диск действует сила веса $\vec{Q}$, сила $\vec{F}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$ опор диска на стену в точке K и на балку в точке D (рис. 1.31). Силы, приложенные к диску, составляют плоскую систему сходящихся сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.31, и составим уравнения равновесия:

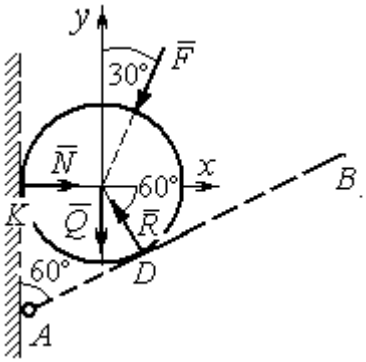


Рис. 1.31. Внешние силы и реакции связей при равновесии диска

$$\sum F_{kx} = -F\cos 60^\circ - R\cos 60^\circ + N = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = -F\cos 30^\circ + R\cos 30^\circ - Q = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим равновесие балки AB (рис. 1.32).

На балку действуют сила тяжести $\vec{G}$, реакция шарнира A, (на рис. 1.32 показано её разложение на составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$), реакция нити $\vec{T}$, численно равная весу груза P, и сила $\vec{R}'$ давления диска на балку. Сила давления $\vec{R}'$ про-

тивоположна реакции $\vec{R}$ опоры диска на балку и численно равна ей. Система сил ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{G}, \vec{T}, \vec{R}'$), действующих на балку, является произвольной плоской. Условия равновесия такой системы сил: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$.

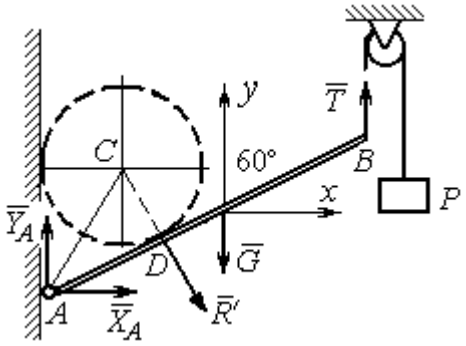


Рис. 1.32. Силы, действующие на балку, при равновесии

Выберем оси, как показано на рис. 1.32, и составим уравнения равновесия, полагая точку A центром, относительно которого производятся вычисления моментов сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + R'\cos 60^\circ = 0, \tag{1.8}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - R'\cos 30^\circ - G + T = 0, \tag{1.9}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R' \cdot AD - G \cdot \frac{\ell}{2}\cos 30^\circ + T\ell\cos 30^\circ = 0. \tag{1.10}$$

Добавив к уравнениям (1.8) – (1.10) равновесия балки AB уравнения (1.6), (1.7) равновесия диска с учётом, что $R' = R$, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными. Подставляя данные из условия задачи и решая совместную систему, найдём: $R = 165{,}47$ кН; $N = 107{,}74$ кН; $P = 95{,}26$ кН; $X_A = -82{,}73$ кН; $Y_A = 128{,}03$ кН.

Сила давления диска на стену равна модулю реакции опоры $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону, сила давления диска на балку равна $\vec{R}'$.

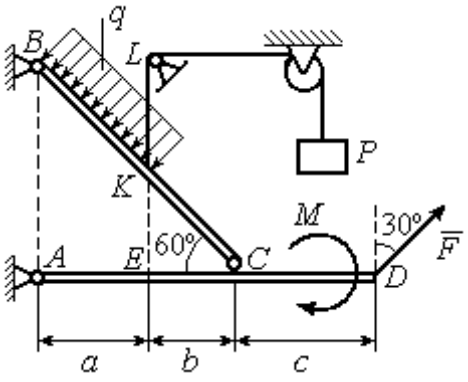


Рис.1.33. Равновесие кронштейна как сочленённой конструкции

Задача 11. Кронштейн состоит из горизонтальной балки AD, прикрепленной к вертикальной стене в точке A, и откоса BC, соединённого с балкой AD в точке C под углом 60º и прикреплённого к вертикальной стене в точке B (рис. 1.33). Все соедине-

ния шарнирные. На конструкцию действуют сила $\vec{F}$, приложенная в точке D под углом 30º к вертикали и равная по модулю F =10 кН, пара сил с моментом M = 8 кН·м и равномерно распределенная на отрезке BK нагрузка интенсивностью q = 3 кН/м. В точке K к балке BC прикреплена нить, другой конец которой, переброшенный через невесомые блоки, несёт груз весом P = 5 кН (см. рис. 1.33).

Определить реакции шарниров A, B и C, если a = 2 м, b = 1 м, c = 3 м, а на отрезке KL нить натянута вертикально.

Решение

Рассмотрим равновесие каждой из составных частей конструкции – балки BC и балки AD. Освобождаем балки от связей и заменяем их реакциями (рис. 1.34).

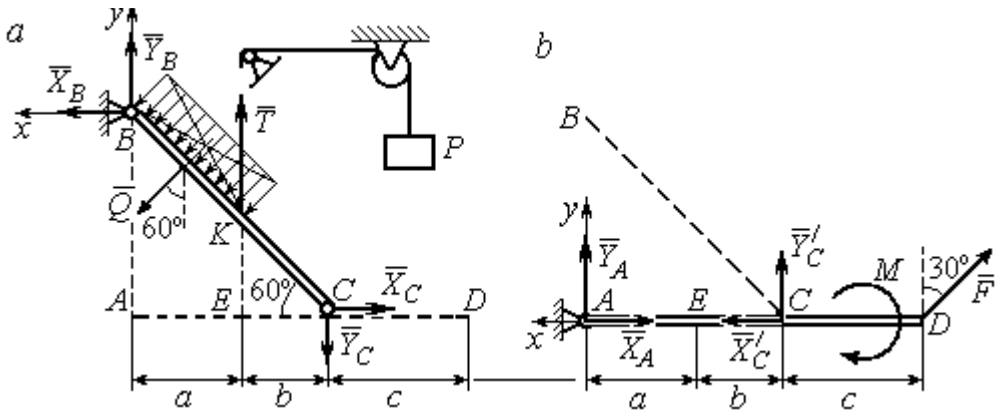


Рис. 1.34. Равновесие элементов конструкции кронштейна:
a - силы, действующие на балку *BC*; *b* - силы, действующие на балку *AD*

На рис. 1.34, *a* показаны реакции внешних и внутренних связей балки BC: реакция $\vec{R}_B$ шарнира B, реакция нити $\vec{T}$, равная по величине весу груза, $T = P$ и реакция $\vec{R}_C$ внутреннего шарнира C. Реакции шарниров B и C представлены в виде разложения на составляющие $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Заменяем равномерную нагрузку равнодействующей силой $\vec{Q}$, приложенной в середине отрезка BK (см. рис. 1.34, *a*) и численно равной $Q = q \cdot BK = q \cdot \dfrac{a}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a$.

Система сил ($\vec{Q}$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{T}$), действующая на балку *BC*, является произвольной плоской уравновешенной системой сил. Выберем оси координат *xBy*, как показано на рис. 1.34, *a*, и составим уравнения равновесия. При этом моменты сил будем вычислять относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = X_B + Q\cos 30^\circ - X_C = 0; \tag{1.11}$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q\cos 60^\circ + T - Y_C = 0; \tag{1.12}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = X_B \cdot AB - Y_B(a+b) - Tb + Q\left(CK + \frac{1}{2}BK\right) = 0, \tag{1.13}$$

где $AB = (a+b)\mathrm{tg}60^\circ$; $CK = 2b$; $\frac{1}{2}BK = a$.

Рассмотрим равновесие балки *AD* (рис. 1.34, *b*).

На балку действует сила $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_A$ шарнира *A* и реакция $\vec{R}'_C$ внутреннего шарнира *C*. Реакция $\vec{R}'_C$ равна по величине и противоположна по направлению реакции $\vec{R}_C$. На рис. 1.34, *b* реакция $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, реакция $\vec{R}'_C$ – составляющими $\vec{X}'_C$ и $\vec{Y}'_C$. При этом следует отметить: $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$; $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Выберем оси координат *xAy* как показано на рис. 1.34, *b*, и составим уравнения равновесия балки *AD*, вычисляя моменты сил относительно центра *C*:

$$\sum F_{kx} = -X_A + X'_C - F\cos 60^\circ = 0; \tag{1.14}$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y'_C + F\cos 30^\circ = 0; \tag{1.15}$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Y_A(a+b) + F\cos 30^\circ \cdot c - M = 0. \tag{1.16}$$

Решая совместно систему уравнений (1.11) – (1.16) с учётом исходных данных задачи и равенства модулей сил $X_C = X'_C$ и $Y_C = Y'_C$, находим:

X_A = 5,99 кН, Y_A = 5,99 кН, X_C = 10,99 кН, Y_C = – 14,65 кН;

X_B = 0,6 кН, Y_B = – 13,65 кН,

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8{,}47 \text{ кН}, \; R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 18{,}31 \text{ кН},$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 13{,}65 \text{ кН}.$$

Задача 12. Вертикальная балка AB с горизонтальной перекладиной LC закреплена в точке A с помощью жесткой заделки (рис. 1.35). Наклонная балка EC с углом наклона к горизонту 60° точке C шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине LC балки AB, а в точке E опирается на каток установленный на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках BL и DE нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке D перпендикулярно балке EC и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил с моментом $M = 5$ кН·м. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E, если параметр a, определяющий размеры конструкции, равен $a = 2$ м.

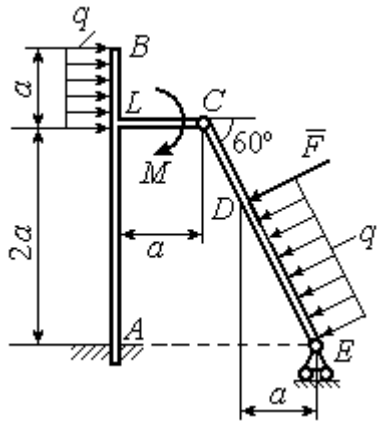


Рис. 1.35. Равновесие сочленённой конструкции

Решение

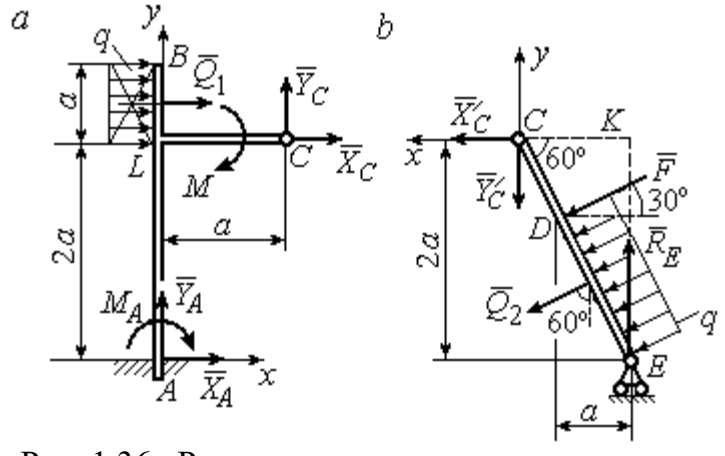


Рис. 1.36. Равновесие элементов конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку AB;
b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

Разделим систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок ABC и EC отдельно.

Рассмотрим балку ABC (рис. 1.36, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, численно равной $Q_1 = qa = 4$ кН. На балку действует сила $\vec{Q}_1$, пара сил с моментом M и реакции связей – жёсткой заделки в точке A и шарнира C.

На рис. 1.36, *a* изображена реакция жесткой заделки в точке *A* в виде силы, разложенной на составляющие $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, и пары с моментом M_{A}. Реакция $\vec{R}_C$ шарнира *C* показана разложением на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$. Силы образуют произвольную плоскую систему.

Введём систему координат, как показано на рис. 1.36, *a,* и составим уравнения равновесия балки, выбрав центром вычисления моментов сил точку *A*.

Имеем систему

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \tag{1.17}$$

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0. \tag{1.18}$$

Рассмотрим теперь равновесие балки *EC* (рис. 1.36, *b*). Заменим распределённую нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED* и равной $Q_2 = \dfrac{qa}{\cos 60^\circ} = q \cdot 2a = 8\,\text{кН}$. На балку действуют силы $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$, реакция $\vec{R}_E$ подвижной опоры – катка *E* и реакция $\vec{R}'_C$ шарнира *C*. На рис. 1.36, *b* реакция $\vec{R}'_C$ показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$. При этом силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю: $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.36, *a*, *b*).

Действующие на балку *EC* силы образуют уравновешенную произвольную плоскую систему сил. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.36, *b,* и составим уравнения равновесия, вычисляя моменты сил относительно центра *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0, \tag{1.19}$$

$$\sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0, \tag{1.20}$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a\right) - Q_2 \cdot \left(\frac{2a}{\cos 30^\circ} - a\right) + R_E \cdot 2a\,\text{tg}30^\circ = 0. \tag{1.21}$$

Подставим в совместную систему (1.17) – (1.21) исходные данные задачи и, воспользовавшись тем, что модули сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ равны, найдём:

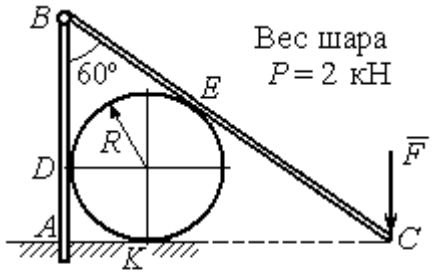
$$X_A = 11{,}59 \text{ кН}; \quad Y_A = -2{,}76 \text{ кН}; \quad M_A = 42{,}87 \text{ кН·м};$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН}; \quad Y_C = 2{,}76 \text{ кН}; \quad R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Полные величины сил реакции жесткой заделки и взаимного давления в шарнире C: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91$ кН; $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83$ кН.

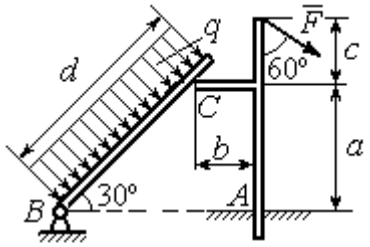
Упражнения

Упражнение 1.5



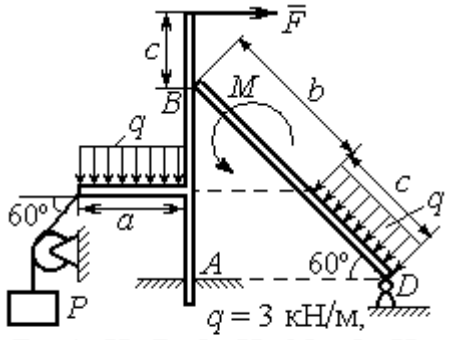
$R = 1$ м, $F = 8$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B, реакцию опоры шара в точках D, K, E

Упражнение 1.6



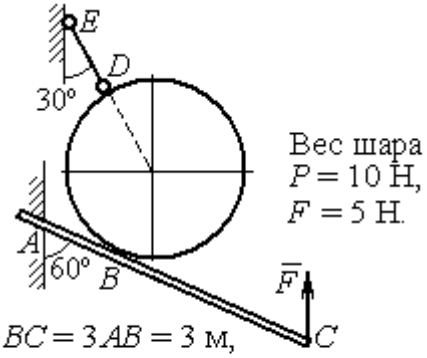
$a = 2$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $d = 5$ м,
$q = 3$ кН/м, $F = 4$ кН.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Упражнение 1.7



$q = 3$ кН/м,
$F = 4$ кН, $P = 3$ кН, $M = 2$ кН·м,
$a = 2$м, $b = 3$м, $c = 1$м
Найти реакцию заделки A, шарнира D и реакцию опоры B

Упражнение 1.8



$BC = 3AB = 3$ м,
Найти реакцию жесткой заделки A, реакцию стержня DE и реакцию опоры в точке B

Рис. 1.37. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.5 – 1.8

1.5. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы относительно оси называют момент вектора проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. На рис. 1.38 показано вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси z:

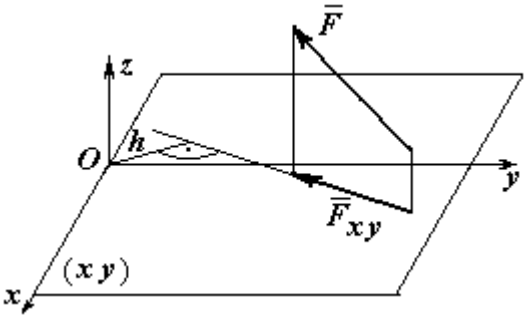


Рис. 1.38. Момент силы относительно оси

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = F_{xy}h,$$

где O – точка пересечения оси z с плоскостью xy, перпендикулярной оси z; $\vec{F}_{xy}$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плоскость xy; h – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно центра O. Момент силы относительно оси считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси он создаёт вращение против хода часовой стрелки.

Равновесие пространственной системы сил. Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат x, y, z были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0;\ \sum F_{ky} = 0;\ \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0;\quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей, $k = 1, 2, ...$

Примеры решения задач на равновесие пространственных систем сил

Задача 13. Горизонтальный вал (рис. 1.39) закреплен в подпятнике C и подшипнике K. Вал имеет шкив B радиуса R и шкив D радиуса r.

Оба шкива перпендикулярны оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*.

Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива *D* по касательной в точке *L* параллельно плоскости *zCx*, так что радиус шкива *D*, проведённый в точку схода нити, составляет с вертикальным диаметром угол 30º.

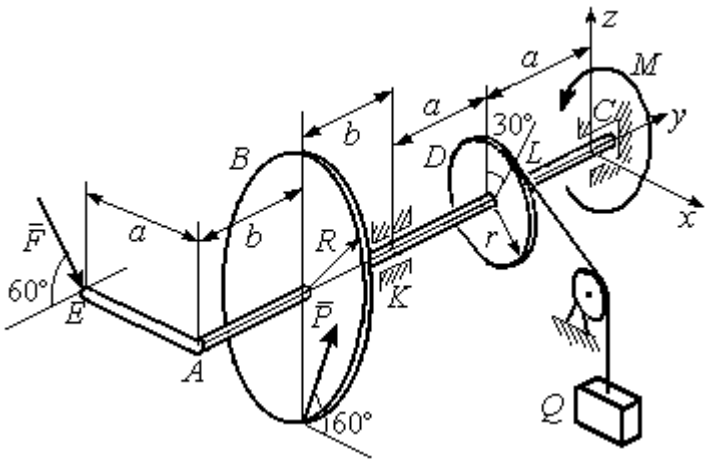


Рис. 1 39. Равновесие вала

На вал действуют силы: $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке шкива *B*, параллельна плоскости *zCx* и составляет угол 60° с направлением оси *Cx*. Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН; $F = 2$ кН; $M = 3$ кН·м; $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м.

Решение

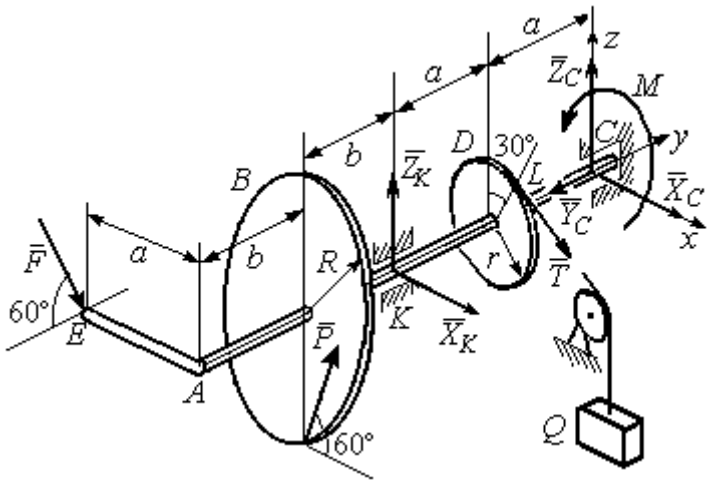


Рис. 1.40. Активные силы и реакции связей, действующие на вал, при его равновесии

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_C$ подпятника *C* раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей (рис. 1.40). Реакция $\vec{R}_K$ подшипника *K* лежит в плоскости, пер-

пендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *L* и по модулю равна весу груза *Q*.

Активные силы и реакции связей составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил. При составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.41).

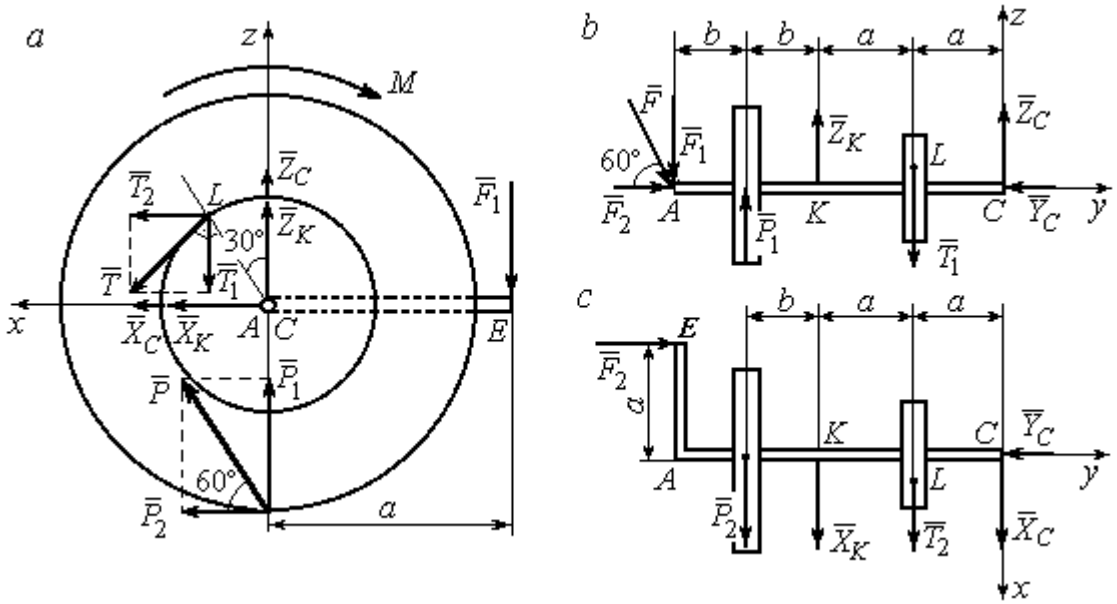


Рис. 1.41. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*

На рис. 1.41, *a* показаны проекции вала и всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций сил относительно точки *C*, получим значения моментов этих сил относительно оси *y*. При вычислении моментов сил относительно оси *x* достаточно вычислить моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (рис. 1.41, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на

плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси *z* (рис. 1.41, *c*).

Величины проекций сил определяются равенствами: $P_1 = P\cos 30^\circ$;

$P_2 = P\cos 60^\circ$; $T_1 = T\cos 60^\circ$; $T_2 = T\cos 30^\circ$; $F_1 = F\cos 30^\circ$; $F_2 = F\cos 60^\circ$.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P\cos 60^\circ + X_K + T\cos 30^\circ + X_C = 0; \quad \sum F_{ky} = F\cos 60^\circ - Y_C = 0;$$

$$\sum F_{kz} = P\cos 30^\circ + Z_K - T\cos 60^\circ + Z_C - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T\cos 60^\circ \cdot a - Z_K \cdot 2a - P\cos 30^\circ \cdot (2a + b) +$$

$$+ F\cos 30^\circ \cdot (2a + 2b) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F\cos 30^\circ \cdot a - P\cos 60^\circ \cdot R + T \cdot r - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = T\cos 30^\circ \cdot a + X_K \cdot 2a + P\cos 60^\circ \cdot (2a + b) - F\cos 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему шести уравнений с шестью неизвестными, решая которую, найдём:

$$X_C = -8{,}09 \text{ кН}, \; Y_C = 1 \text{ кН}, \; Z_C = 4{,}65 \text{ кН}, \; Z_K = 2{,}92 \text{ кН};$$

$$X_K = -10{,}02 \text{ кН}, \; T = 18{,}6 \text{ кН}.$$

Реакции подпятника и подшипника:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 9{,}4 \text{ кН}, \; R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 10{,}44 \text{ кН}.$$

Вес удерживаемого груза *Q* равен реакции нити *T*.

Задача 14. Однородная прямоугольная плита (рис. 1.42) веса 25 кН прикреплена к полу при помощи шарового шарнира *A*, подшипника *B* и удерживается в вертикальном положении стержнем *CO*, лежащим в плоскости, перпендикулярной плоскости плиты так, что $\angle COB = 60^\circ$. В плоскости плиты на неё действуют пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, сила $\vec{F}_1$, равная $F_1 = 10$ кН, приложенная на верхней стороне плиты в точке *H* под углом 30º к линии *EC*, и сила $\vec{F}_2$, равная $F_2 = 5$ кН, приложенная в точке *D* параллельно стороне *AB*.

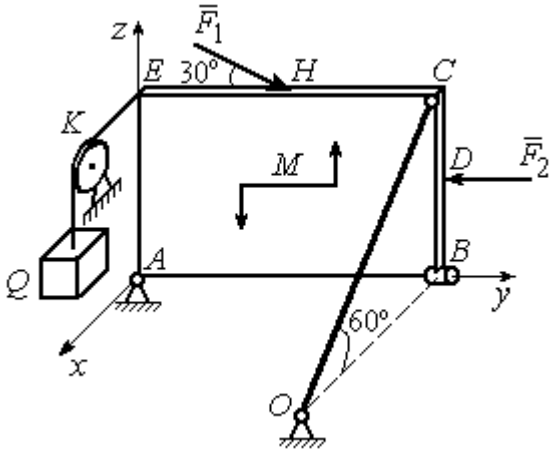


Рис. 1.42. Равновесие плиты

В точке E к плите прикреплён трос, на другом конце которого, перекинутым через блок K, подвешен груз весом $Q = 20$ кН. Отрезок троса EK перпендикулярен плоскости плиты.

Определить реакции шарнира A, подшипника B и реакцию стержня CO, если ширина плиты $AB = 3$ м; высота $AE = 2$ м; $EH = HC$, $CD = DB$.

Решение

Рассмотрим равновесие плиты $ABCE$. На плиту действуют активные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести плиты $\vec{P}$, пара сил с моментом M и реакции связей. Связями являются пространственный шарнир A, нить, натянутая грузом Q, подшипник B и невесомый стержень CO.

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.43. Освобождаем плиту от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию $\vec{R}_A$ шарнира A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити параллельно оси Ax и равна весу груза $T = Q$, реакция $\vec{R}_B$ подшипника B расположена в плоскости, перпендикулярной оси Ay, и представлена в виде двух своих составляющих $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$, реакция $\vec{S}$ невесомого стержня CO направлена вдоль стержня. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.43.

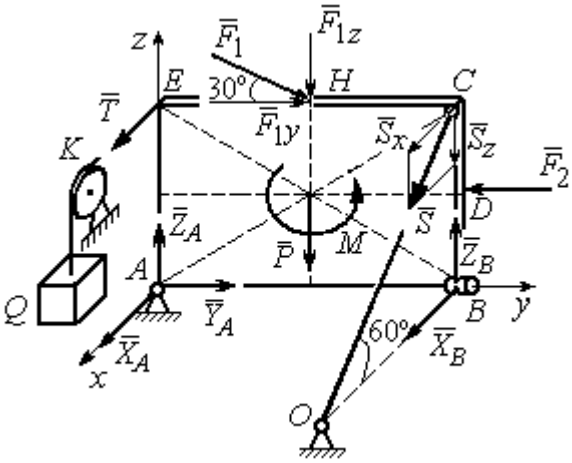


Рис. 1.43. Силы, действующие на плиту, при её равновесии

Силы, действующие на плиту, и реакции связей составляют пространственную уравновешенную систему сил. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + T + X_B + S\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F_2 + F_1\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - F_1\cos 60^\circ - P + Z_B - S\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = -F_1\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - F_1\cos 30^\circ \cdot AE - P \cdot 0{,}5 \cdot AB +$$

$$+ F_2 \cdot BD + Z_B \cdot AB - S\cos 30^\circ \cdot AB + M = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = T \cdot AE + S\cos 60^\circ \cdot CB = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + S\cos 60^\circ \cdot EC = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим систему уравнений, решая которую, найдём значения реакций: $S = -40$ кН; $X_B = -20$ кН; $Z_B = -17{,}53$ кН; $X_A = 20$ кН; $Y_A = -3,66$ кН; $Z_A = 12{,}89$ кН.

Задача 15. Прямоугольная фрамуга *ACEB* весом $P = 50$ Н, закрепленная в точках *A* и *B* цилиндрическими шарнирами, открыта на угол 60º (рис. 1.44). На фрамуге в точке *H* закреплена верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомый блок *K*, несёт груз *Q*. При этом линия верёвки *HK* параллельна прямой *ED*. На фрамугу действует сила $\vec{F}$, приложенная в верхнем углу в точке *C* перпендикулярно плоскости фрамуги и равная по величине $F = 15$ Н.

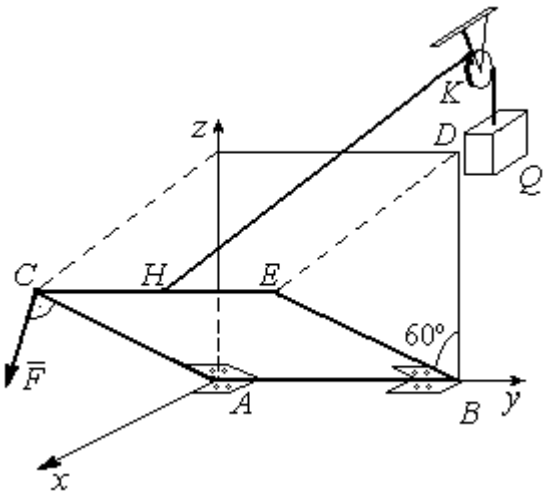


Рис. 1.44. Равновесие фрамуги

Определить вес груза *Q*, необходимый для удержания фрамуги в равновесии и реакции цилиндрических шарниров *A* и *B*, если размеры фрамуги $BE = BD = 2$ м; $AB = 3$ м; $CH = HE$.

Решение

Рассмотрим равновесие фрамуги *ABCE*. Изображаем внешние активные силы: силу $\vec{F}$, силу тяжести фрамуги $\vec{P}$, а также реакции связей. Связями являются два цилиндрических шарнира *A* и *B* (связь, аналогичная подшипнику) и нить, натянутая грузом *Q*. Выберем систему координат *Axyz*, как показано на рис. 1.45. Освобождаем фрамугу от связей, заменяя их действие реакциями. Реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров *A* и *B* раскладываем на взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$ и $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ в плоскостях, перпендикулярных оси вращения фрамуги (ось *Ay*), реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и равна весу груза $T = Q$. Направления активных сил и реакций связей показаны на рис. 1.45.

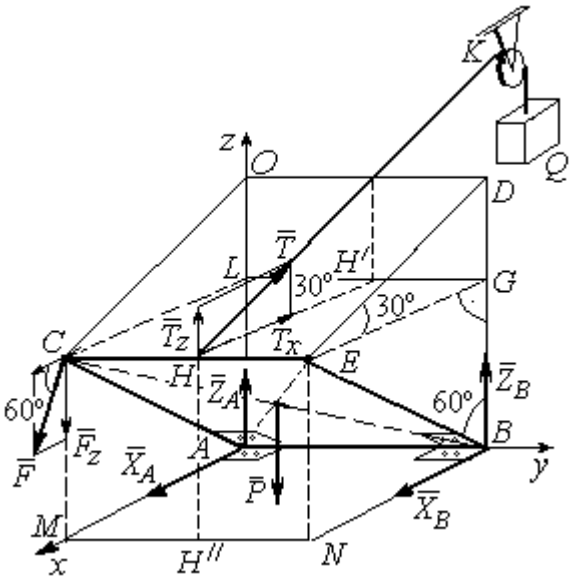


Рис. 1.45. Активные силы и реакции при равновесии фрамуги

Силы, действующие на фрамугу, составляют уравновешенную пространственную систему сил.

Составим уравнения равновесия. При этом для удобства вычисления моментов сил относительно осей изобразим плоскости, перпендикулярные этим осям, с проекциями на них сил, действующих на фрамугу (рис. 1.46). Тогда моменты сил, действующих на фрамугу, например, относительно оси *Ax* определяются как моменты векторов проекций этих сил на плоскость *zAy* относительно точки *A* – пересечения оси *Ax* и перпендикулярной ей плоскости *zAy* (см. рис. 1.46, *a*). Аналогично при вычислении моментов сил относительно оси *Az* достаточно вычислить моменты векторов проекций сил на плоскость *xAy* относительно точки *A* (см. рис. 1.46, *b*).

Значения моментов сил относительно оси Ay получим, вычисляя моменты векторов проекций сил на плоскость zAx относительно точки A (см. рис. 1.46, *c*).

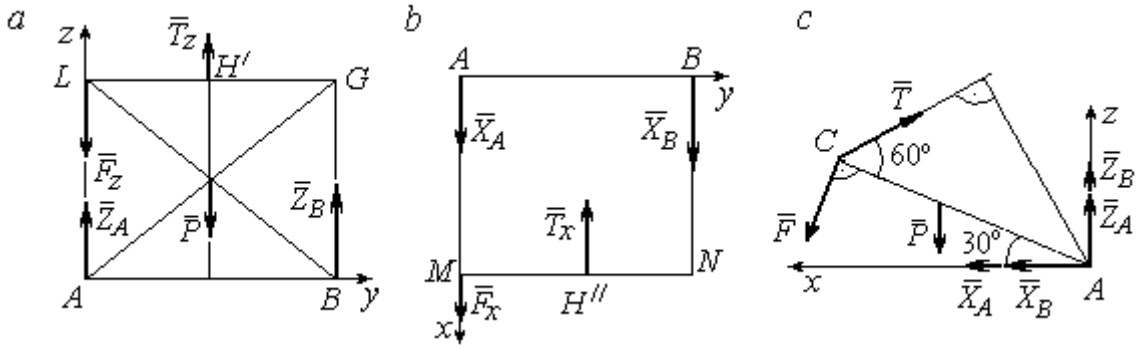


Рис. 1.46. Фрамуга и действующие на неё силы в проекциях на координатные плоскости:
a – проекция на плоскость *zAy* со стороны положительного направления оси *x*;
b – проекция на плоскость *xAy* со стороны положительного направления оси *z*; *c* – проекция на плоскость *zAx* со стороны положительного направления оси *y*

Уравнения равновесия фрамуги имеют вид:

$$X_A + X_B + F\cos 60^\circ - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A + Z_B - P - F\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = T_z \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB =$$

$$= T\cos 60^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB - P \cdot 0{,}5 \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = P \cdot 0{,}5 \cdot AC\cos 30^\circ + F \cdot AC - T \cdot AC\sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB + T_x \cdot 0{,}5 \cdot AB = -X_B \cdot AB + T\cos 30^\circ \cdot 0{,}5 \cdot AB = 0.$$

Подставляя исходные данные из условия задачи и решая систему, найдём реакции шарниров фрамуги:

$$X_B = 18{,}22 \text{ Н},\ Z_B = 14{,}41 \text{ Н},\ R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 23{,}31 \text{ Н};$$

$$X_A = 10{,}83 \text{ Н},\ Z_A = 27{,}41 \text{ Н},\ R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 29{,}47 \text{ Н}.$$

Вес груза, удерживающий фрамугу в равновесии, численно равен реакции верёвки: $Q = T = 42{,}37$ Н.

Задача 16. Горизонтальный коленчатый вал *AD* (рис. 1.47) закреплен в подпятнике *A* и подшипнике *C*. Вал имеет шкив радиуса r и рукоять *DH*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *DH* образует угол 30º к направлению оси *Ax*. Колено вала расположено в горизонтальной плоскости *xAy*. Нить, удерживающая груз *Q*, намотана на шкив и сходит с него вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$ и пара сил с моментом *M*. Сила $\vec{F}$ приложена в верхней точке вертикального диаметра шкива под углом 30° к направлению оси *Ay* и находится в плоскости *zAy*. Сила $\vec{P}$ приложена в нижней точке *H* рукояти параллельно оси *Az*. Сила $\vec{G}$ приложена в крайней точке *K* стойки колена вала под углом 60º к стойке и находится в плоскости, перпендикулярной оси вала. Пара сил с моментом *M* создаёт вращение вала вокруг оси *Ay*.

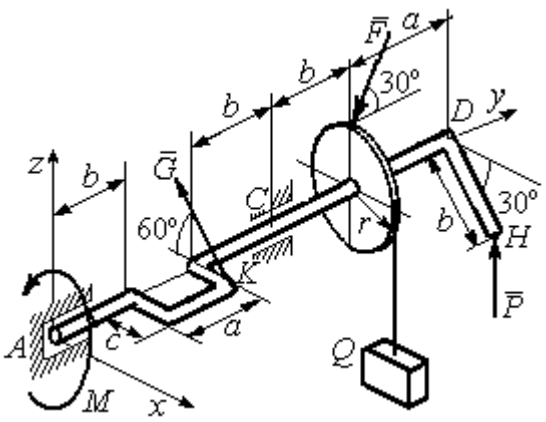


Рис. 1.47. Равновесие вала

Определить вес удерживаемого груза Q и реакции подшипника и подпятника, если: $P = 10$ кН; $F = 12$ кН; $G = 6$ кН; $M = 3$ кН·м; $r = 0{,}3$ м; $a = 0{,}8$ м; $b = 0{,}4$ м; $c = 0{,}2$ м.

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют активные силы – $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{G}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом Q, подпятник *A* и подшипник *C*.

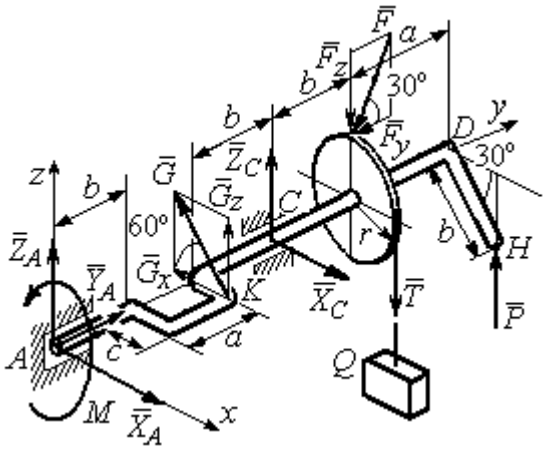


Рис. 1.48. Силы и реакции, действующие на вал при равновесии

Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями.

Реакцию подпятника A раскладываем на три составляющие: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника C лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и также может быть разложена на составляющие $\vec{X}_C, \vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей Ax, Az. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити и по модулю равна весу груза, $T = Q$. Действие на вал активных сил и реакций связи показано на рис. 1.48.

Указанные силы составляют произвольную пространственную уравновешенную систему сил.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A - G\cos 60^\circ + X_C = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + G\cos 30^\circ + Z_C - F\cos 60^\circ - T + P = 0.$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = G_z(b+a) + Z_C(b+a+b) - F_z(b+a+b+b) + F_y r -$$

$$- T(b+a+b+b) + P(b+a+b+b+a) = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -G_z c + Tr - Pb\cos 30^\circ - M = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = G_x(b+a) - X_C(b+a+b) = 0,$$

где значения проекций сил на оси $G_z = G\cos 30^\circ$; $G_x = G\cos 60^\circ$; $F_z = F\cos 60^\circ$; $F_y = F\cos 30^\circ$.

Подставляя исходные данные и решая систему, получим значения реакций:

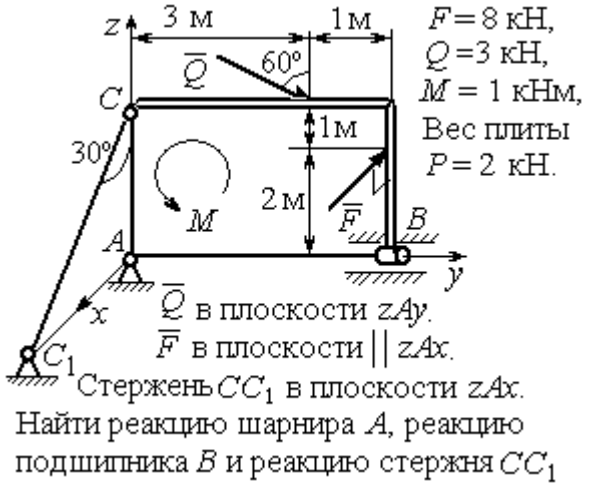
$$X_C = 2{,}25 \text{ кН}; \; Z_C = 13{,}57 \text{ кН}; \; R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = 15{,}58 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0{,}39 \text{ кН}; \; Y_A = 10{,}39 \text{ кН}; \; X_A = 0{,}75 \text{ кН}; \; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 10{,}42 \text{ кН}.$$

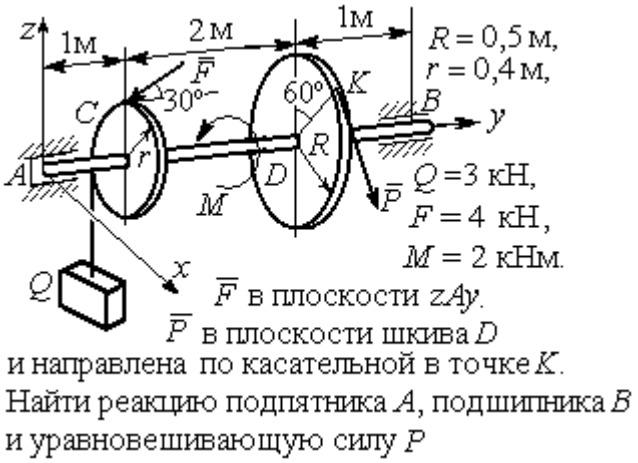
Вес удерживаемого груза равен реакции нити $Q = T = 25{,}03$ кН.

Упражнения

Упражнение 1.9



Упражнение 1.10



Упражнение 1.11



Упражнение 1.12

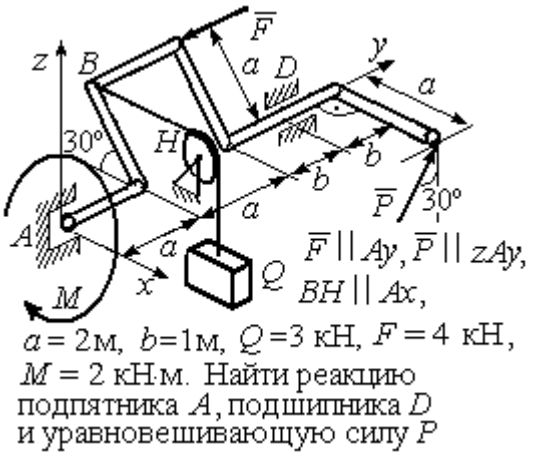


Рис. 1.49. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 1.9 – 1.12

1.6. Равновесие тел при наличии сил трения

Трение скольжения. При наличии трения скольжения полная реакция $\vec{R}$ шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ опоры и

силу $\vec{F}_{\text{тр с}}$ трения скольжения, направленную по касательной к поверхности в точке опоры.

В покое сила трения скольжения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{\text{тр с}}$, называемого **предельной силой трения скольжения** (рис. 1.50).

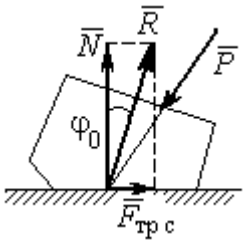


Рис. 1.50. Реакция опоры с трением скольжения

Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к поверхности, называется **предельным углом трения**. Предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на величину нормальной реакции опоры тела на поверхность: $F_{\text{тр с}} = f \cdot N$, где f – безразмерный коэффициент трения, определяемый экспериментально.

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения принимает предельное значение.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по шероховатой поверхности другого. Реакция шероховатой опоры раскладывается на нормальную составляющую $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$, направленную по касательной к поверхности качения. При этом за счёт небольшого вдавливания в поверхность качения нормальная реакция опоры $\vec{N}$ смещена в сторону от линии действия силы тяжести $\vec{P}$ так, что вместе с ней образует пару, противодействующую качению (рис. 1.51). В предельном положении равновесия тела смещение нормальной реакции опоры максимально. Величина максимального смещения k называется **коэффициентом трения качения**, измеряемого в единицах длины. Момент,

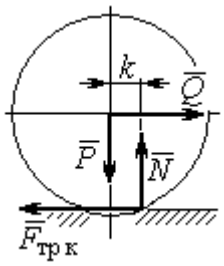


Рис. 1.51. Реакция опоры с трением качения

создаваемый парой $(\vec{N}, \vec{P})$, называется **моментом трения качения** $M_{\text{тр к}} = kN$. Максимальная сила трения качения $\vec{F}_{\text{тр к}}$ определяется из условия, что в предельном положении равновесия момент трения качения равен моменту качения, создаваемого парой $(\vec{F}_{\text{тр к}}, \vec{Q})$ (рис. 1.51).

Если максимальная сила трения качения меньше предельной силы трения скольжения, движение представляет качение без скольжения.

Примеры решения задач на равновесие тел с трением

Задача 17. Груз Q весом 50 Н удерживается нитью на шероховатой наклонной плоскости (рис.1.52). Один конец нити закреплен на грузе Q, а к другому, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом P. Отрезок нити AB горизонтальный. Угол наклона плоскости составляет 30º к горизонту. Определить максимальное и минимальное значения веса груза P, при которых груз Q может начать скольжение по плоскости без опрокидывания, если коэффициент трения скольжения между грузом Q и наклонной плоскостью $f = 0{,}4$.

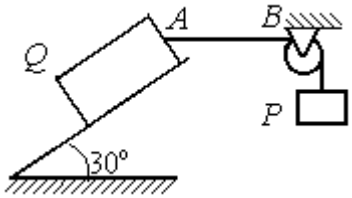


Рис.1.52. Равновесие груза на наклонной плоскости с трением

Решение

Рассмотрим равновесие груза Q при минимальном значении веса груза P. На груз действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\min}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ (рис. 1.53, *а*). Особенностью задач на равновесие призм является то, что точка приложения нормальной реакции не определена. В случае необходимости она находится из уравнений равновесия.

Определим направление силы трения. Если вес уравновешивающего груза P имеет минимальное значение $P_{\min}$, то при его дальнейшем уменьшении груз Q начнёт двигаться вниз по наклонной плоскости. Таким образом, предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$, обеспечивающая равновесие при минимальном значении веса груза P, направлена вверх по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *a*).

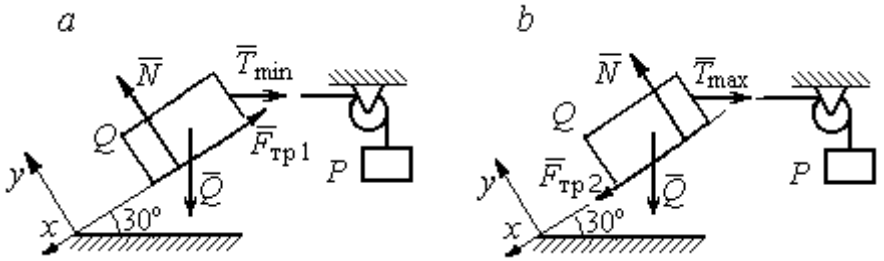


Рис. 1.53. Силы, действующие на груз при равновесии:
a – минимальный вес уравновешивающего груза;
b – максимальный вес уравновешивающего груза

Выберем систему координат, как показано на рис. 1.53, и составим уравнения равновесия в виде проекций сил:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\min}\cos 30^\circ - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\min}\cos 60^\circ = 0.$$

Полагая в первом уравнении $F_{\text{тр}1} = fN$, решаем систему и находим реакцию нити $T_{\min} = 7{,}21$ Н. Минимальное значение веса уравновешивающего груза равно реакции нити: $P_{\min} = T_{\min} = 7{,}21$ Н.

Рассмотрим равновесие груза Q при максимальном $P_{\max}$ значении веса груза P. На груз действует сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}_{\max}$ и реакция шероховатой поверхности наклонной плоскости, состоящая, как и в первом случае, из нормальной реакции наклонной плоскости $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (см. рис. 1.53, *b*).

При определении направления силы трения заметим, что увеличение веса груза P больше максимального вызывает движение груза Q вверх по наклонной плоскости. Тогда предельная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, действующая против возможного движения, должна быть направлена вниз по наклонной плоскости (см. рис. 1.53, *b*). Уравнения равновесия груза Q:

$$\sum F_{kx} = Q\cos 60^\circ - T_{\max}\cos 30^\circ + F_{\text{тр}2} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q\cos 30^\circ + N - T_{\max}\cos 60^\circ = 0.$$

Решаем систему, подставляя вместо силы трения её значение $F_{\text{тр}2} = fN$, и находим максимальное значение веса груза P: $P_{\max} = T_{\max} = 63{,}54$ Н.

Таким образом, груз Q будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если вес уравновешивающего груза находится в пределах $8{,}87 < P < 48{,}87$ Н.

Задача 18. Цилиндрический каток радиуса r = 0,5 м, весом P = 50 Н удерживается в равновесии на наклонной плоскости нитью, один конец которой закреплён в центре катка, а другой перекинут через блок и несёт груз весом Q (рис. 1.54). Коэффициент трения качения катка $f_{\text{к}}$ = 0,02 м. Наклонная плоскость составляет угол 30º с горизонтом.

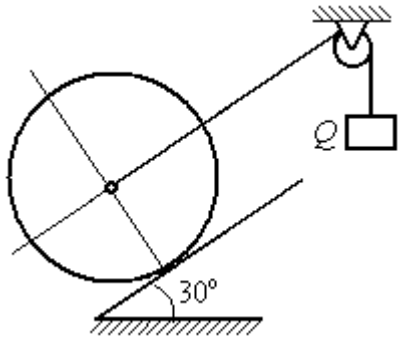


Рис. 1.54. Равновесие катка

Определить наименьшую и наибольшую величину веса Q, при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения $f_{\text{с}}$, при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение

Рассмотрим равновесие катка при минимальном значении веса груза Q. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, реакции нити $\vec{Q}_{\min}$ и реакция шероховатой

поверхности наклонной плоскости $\vec{R}$, имеющая своими составляющими нормальную реакцию поверхности $\vec{N}$ и силу трения качения $\vec{F}_{\text{тр1к}}$ (рис. 1.55, *a*).

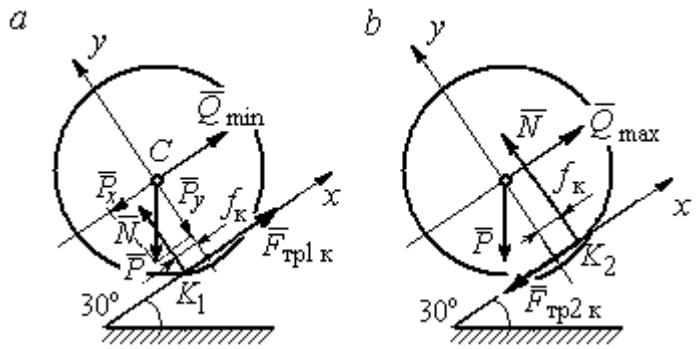


Рис. 1.55. Силы, действующие на каток, при равновесии:
a – минимальный вес груза; *b* – максимальный вес груза

Минимальный вес груза $Q_{\min}$ удерживает каток от качения вниз по наклонной плоскости. В этом случае составляющие реакции шероховатой поверхности наклонной плоскости приложены в точке K_1, слева от нормального к плоскости диаметра катка (см. рис. 1.55, *a*). Выбор точки приложения реакции шероховатой поверхности основан на том, что пара $(\vec{N}, \vec{P}_y)$ должна создавать момент трения качения, противодействующий предполагаемому движению.

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\min}, \vec{F}_{\text{тр1к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *a*, и составим уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_1:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\min} + F_{\text{тр1к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_1}(\vec{F}_k) = P\cos 60^\circ \cdot r - Q_{\min} r - P\cos 30^\circ \cdot f_{\text{к}} = 0.$$

Подставляем данные задачи и находим минимальное значение веса груза, при котором каток находится в равновесии $Q_{\min} = 7{,}68$ Н, величину нормальной реакции наклонной плоскости $N = 43{,}3$ Н и значение силы трения качения, удерживающей каток в равновесии, $F_{\text{тр1к}} = 17{,}32$ Н.

Рассмотрим равновесие катка при максимальном значении веса груза $Q_{\max}$. Здесь нарушение предельного равновесия при увеличении веса груза Q вызывает движение катка вверх по наклонной плоскости. В таком случае точка приложения реакции опоры шероховатой поверхности (точка K_2) расположена справа от нормального к плоскости качения диаметра катка (рис. 1.55, *b*).

На каток действует плоская уравновешенная система сил $(\vec{Q}_{\max}, \vec{F}_{\text{тр2 к}}, \vec{N}, \vec{P}) \infty 0$. Выберем систему координат, как показано на рис. 1.55, *b*. Уравнения равновесия катка, где уравнение моментов сил составлено относительно точки K_2 имеют вид:

$$\sum F_{kx} = -P\cos 60^\circ + Q_{\max} - F_{\text{тр2 к}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -P\cos 30^\circ + N = 0;$$

$$\sum M_{K_2}(\vec{F}_k) = -P\cos 60^\circ \cdot r + Q_{\max} r - P\cos 30^\circ \cdot f_{\text{к}} = 0.$$

Решая систему, получим: $Q_{\max} = 42{,}32$ Н; $N = 43{,}3$ Н; $F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н.

Таким образом, на шероховатой поверхности каток находится в равновесии, если вес уравновешивающего груза выбран в пределах $7{,}68 \le Q \le 42{,}32$ Н.

При любом движении (вверх или вниз) качение катка будет без скольжения, если предельная сила трения скольжения $F_{\text{тр с}}$ больше аналогичной силы трения качения: $F_{\text{тр с}} > F_{\text{тр к}}$. Величина силы трения скольжения не зависит от направления движения: $F_{\text{тр с}} = f_{\text{с}} N = 43{,}3 f_{\text{с}}$, где $f_{\text{с}}$ – коэффициент трения скольжения. Величина силы трения качения также не зависит от направления движения: $F_{\text{тр к}} = F_{\text{тр1 к}} = F_{\text{тр2 к}} = 17{,}32$ Н. Таким образом, для определения требуемого коэффициента скольжения имеет место неравенство $43{,}3 f > 17{,}32$, откуда $f > 0{,}4$.

Задача 19. Для подъёма и опускания грузов в выработках используется ступенчатый ворот с тормозом, изображённый на рис. 1.56. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота $R = 0{,}5$ м и $r = 0{,}2$ м. Ворот тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединённого цепью CD с концом D тормозного рычага ED с расположенной на нём тормозной колодкой. Коэффициент трения между тормозной колодкой и барабаном ворота $f = 0{,}4$. На малой ступеньке барабана ворота навита верёвка, другой конец которой, переброшенный через невесомые неподвижный блок m и подвижный блок n, удерживает груз Q весом 1 кН (см. рис. 1.56). Угол наклона к горизонту участка верёвки, соединяющей барабан с неподвижным блоком m, составляет 30º.

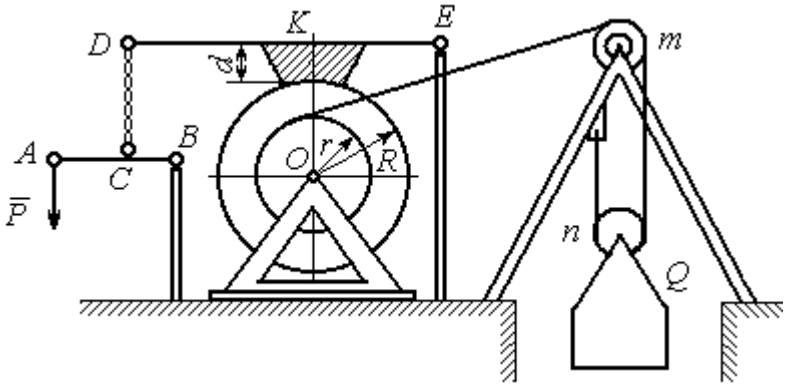


Рис. 1.56. Ворот с колодочным тормозом

Определить величину силы $\vec{P}$, уравновешивающей груз Q, и реакции шарниров O и E, если вес ворота G = 140 Н, высота тормозной колодки $d = 0{,}1$ м, расстояния AB = 1 м, BC = 0,1 м; $ED = 1{,}2$ м; $EK = 0{,}6$ м.

Решение

Рассмотрим отдельно равновесие барабана ворота, тормозного рычага DE и рычага AB (рис. 1.57).

Для того; чтобы определить силу натяжения верёвки, прикреплённой к барабану, рассмотрим равновесие груза вместе с подвижным блоком n (см. рис. 1.57, *а*). На объект равновесия действует сила тяжести груза $\vec{Q}$ и реакции $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ двух ветвей верёвки, огибающей снизу блок n.

Уравнения равновесия такой системы сил:

$$T' + T'' - Q = 0; \qquad T''r_{\text{бл}} = T'r_{\text{бл}},$$

где моменты сил вычислены относительно центра блока; $r_{бл}$ – радиус блока *n*. Решая систему уравнений, получим: $T' = T'' = 0{,}5Q = 500$ Н.

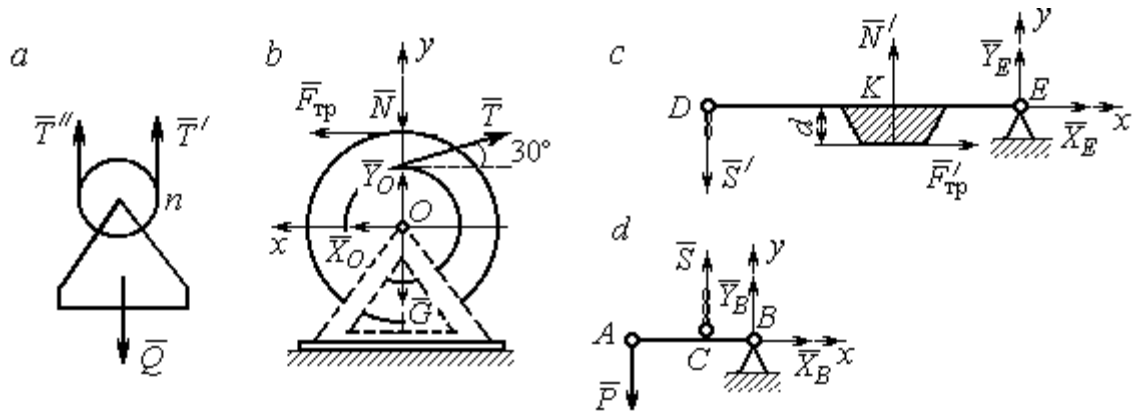


Рис. 1.57. Равновесие элементов конструкции ворота:
a – равновесие груза; *b* – силы, действующие на барабан; *c* – силы, действующие на тормозной рычаг *DE*; *d* – силы, действующие на рычаг *AB*

Рассмотрим равновесие барабана. На барабан действуют: сила веса барабана $\vec{G}$, сила давления $\vec{N}$ со стороны рычага, направленная по радиусу барабана, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая по касательной к барабану в сторону, противоположную движению барабана при опускании груза, реакция $\vec{R}_O$ шарнира *O*, представленная двумя составляющими $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, и реакция верёвки $\vec{T}$, численно равная модулю силы $\vec{T}'$ (см. рис. 1.57, *b*).

Силы, действующие на барабан, составляют уравновешенную произвольную плоскую систему сил ($\vec{G}$, $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$, $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$) ~ 0. Составим уравнение моментов относительно точки *O*:

$$-Tr + F_{\text{тр}}R = 0,\ \text{откуда с учётом } T = T'\ F_{\text{тр}} = 200 \text{ Н}.$$

Величина силы $\vec{N}$ давления рычага на барабан находится из вида зависимости силы трения $F_{\text{тр}} = fN$, тогда $N = \dfrac{F_{\text{тр}}}{f} = 500$ Н.

Составим уравнения равновесия барабана в виде проекций сил на оси, выбранные, как показано на рис. 1.57, *b*:

$$\sum F_{kx} = X_O + F_{\text{тр}} - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_O + T\cos 60^\circ - N - G = 0.$$

Решая систему, найдём реакцию шарнира *O*:

$$X_O = 233 \text{ Н};\ Y_O = 390 \text{ Н};\ R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = 454{,}3 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь равновесие тормозного рычага *DE* (см. рис. 1.57, *c*).

На рычаг действуют сила $\vec{N}'$ давления со стороны барабана и сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, приложенные в точке касания тормозной колодки с барабаном, равные по величине и противоположные по направлению, соответственно, силам $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$. Кроме того, в точке *D* на рычаг действует сила $\vec{S}'$, под действием которой рычаг прижимается к барабану, и реакция шарнира *E*, разложенная на составляющие $\vec{X}_E$, $\vec{Y}_E$ вдоль осей *x*, *y*. Уравнения равновесия рычага имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_E + F'_{\text{тр}} = 0; \qquad \sum F_{ky} = Y_E + N' - S' = 0;$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = S' \cdot DE - N' \cdot EK + F'_{\text{тр}} d = 0.$$

Подставляя в систему данные из условия задачи, с учётом найденных значений $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} = 200$ Н, $N' = N = 500$ Н, определим усилие S', с которым тормозной рычаг прижимается к барабану, и реакцию шарнира *E*:

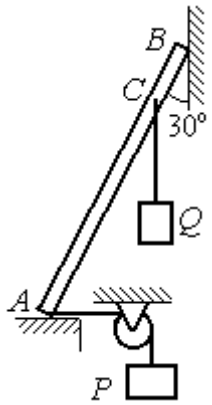
$$S' = 233{,}33 \text{ Н};\ X_E = -200 \text{ Н};\ Y_E = -266{,}67 \text{ Н};\ R_E = \sqrt{X_E^2 + Y_E^2} = 333{,}34 \text{ Н}.$$

Силу $\vec{P}$, необходимую для уравновешивания груза *Q*, найдём рассматривая равновесие рычага *AB* (см. рис. 1.57, *d*) . На рычаг действуют сила $\vec{P}$, реакция цепи $\vec{S}$ и реакция шарнира *B*, показанная на рис. 1.57, *d* составляющими $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$.

Составим уравнение равновесия рычага в форме равенства нулю суммы моментов сил относительно точки *B*: $P \cdot AB - S \cdot CB = 0$. С учётом того, что модули сил $\vec{S}$ и $\vec{S}'$ равны, найдем $P = 23{,}3$ Н.

Упражнения

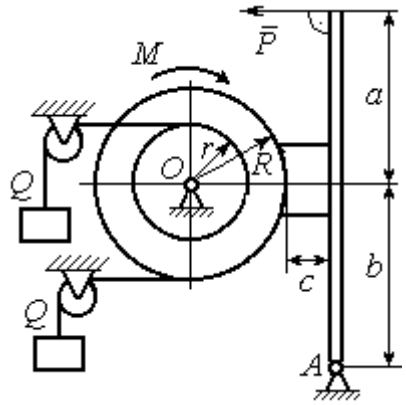
Упражнение 1.13



Невесомый стержень AB опирается в точках A и B на шероховатые поверхности – горизонтальный пол и вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и полом и между стержнем и стеной $f = 0{,}2$. Угол наклона стержня к вертикальной стене 30°. В точке C к стержню подвешен груз Q. Стержень удерживается в равновесии горизонтальной нитью, прикреплённой в точке A и перекинутой через блок. К другому концу нити подвешен груз P. В каких границах можно изменять вес груза P, не нарушая равновесия стержня?

$AB = 3$ м, $AC = 2$ м, $Q = 200$ Н.

Упражнение 1.14



Шкив O состоит из двух барабанов радиусов R и r. На барабаны навиты верёвки, натянутые одинаковыми грузами Q. К шкиву приложена пара сил с моментом M. Шкив затормаживается с помощью рычажного тормоза. Коэффициент трения между тормозной колодкой и шкивом $f = 0{,}4$. Определить силу $\vec{P}$, приложенную к рычагу тормозной колодки и уравновешивающую шкив. Найти реакцию шарнира A.

$a = b = 1$ м; $c = 0{,}1$ м; $Q = 100$ Н; $M = 120$ Н·м;
$R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}2$ м.

Рис. 1.58. Задания для самостоятельного решения. Упражнения № 1.13, 1.14

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Криволинейное движение точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени (рис. 2.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

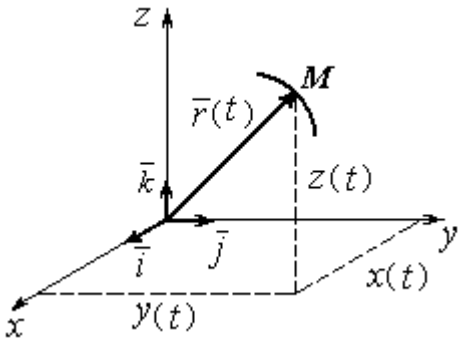


Рис. 2.1. Векторный и координатный способы задания движения точки

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиус-вектора точки: $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. **Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.** Величины V_x, V_y, V_z проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Мгновенное ускорение точки**,** или ускорение в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Величины a_x, a_y, a_z проекций вектора ускорения на координ-

натные оси определяются равенствами: $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$; $a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Естественный способ задания движения используется, если траектория движения точки заранее известна. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $O\breve{M} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета (рис. 2.2). При этом заранее устанавливаются положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты.

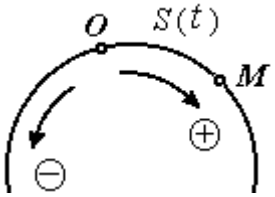


Рис. 2.2. Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau}$, где S – дуговая координата; $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону положительного направления дуговой координаты. Величина $V_\tau = \dot{S}$ называется алгебраической скоростью точки и представляет собой проекцию вектора скорости точки на касательную к траектории.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на составляющие по направлениям естественных осей – касательную (ось τ) и перпендикулярную к ней нормальную (ось *n*):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной; $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор нормали траектории; a_τ – проекция ускорения точки на касательную называется **касательным ускорением**; a_n – проекция вектора ускорения точки на нормаль называется **нормальным ускорением** (рис. 2.3). Касательная составляющая ускорения характеризует изменение величины скорости точки, нормальная – изменение направления вектора скорости.

Если проекции V_τ и a_τ имеют одинаковые знаки (направлены в одну сторону), движение будет ускоренным, если разных знаков (разнонаправлены) – замедленным (см. рис. 2.3, *a*, *b*).

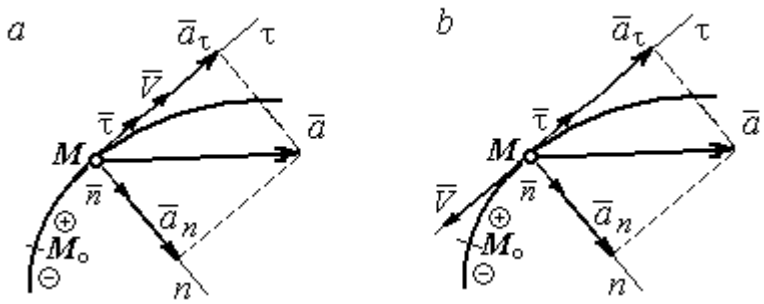


Рис. 2.3. Скорость и ускорение точки. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие:
a – ускоренное движение; *b* – замедленное движение

Проекции ускорения на естественные оси и модуль вектора ускорения вычисляются по формулам:

$$a_\tau = \ddot{S} = \dot{V}_\tau,\ a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории. Иногда при вычислении касательной составляющей ускорения удобнее пользоваться формулой $a_\tau = \dfrac{a_x V_x + a_y V_y}{V_\tau}$.

Вектор нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны траектории. Вектор касательной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону положительного направления касательной (по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$), если $\ddot{S} > 0$, и в противоположную сторону – при $\ddot{S} < 0$.

Криволинейное движение точки называется **равномерным**, если проекция вектора скорости на касательную – постоянная величина: $V_\tau = \text{const}$.

Криволинейное движение точки называется **равнопеременным**, если постоянна проекция вектора ускорения на касательную: $a_\tau = \text{const}$.

Примеры решения задач на криволинейное движение точки

Задача 20. Движение точки задано координатным способом уравнениями $x(t) = 2\sin\pi t$, $y(t) = \cos 2\pi t$, где *x*, *y* – в сантиметрах, *t* – в секундах.

Найти траекторию точки, величину и направление скорости и ускорения в моменты времени t_1 = 0,25 с, t_2 = 0,75 с. Определить участки ускоренного и замедленного движений точки.

Решение

Определяем траекторию точки. Из уравнений движения находим $y = \cos 2\pi t = \cos^2 \pi t - \sin^2 \pi t = 1 - 2\sin^2 \pi t = 1 - \frac{x^2}{2}$. Траекторией точки является парабола $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (рис. 2.4). Однако не вся парабола будет траекторией движения, а только та её часть, точки которой согласно уравнениям движения удовлетворяют неравенствам: $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$.

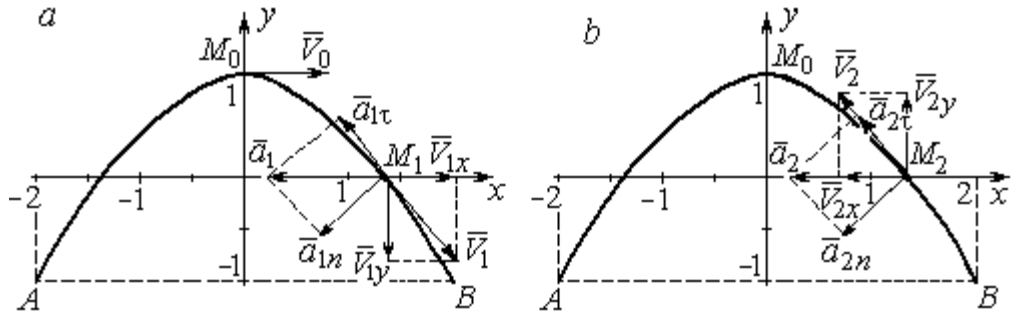


Рис. 2.4. Траектория движения точки:

a – замедленное движение точки на участке от M_0 к *B*;
b – ускоренное движение точки на участке от *B* к M_0

Определяем параметры движения точки в момент времени t_1 = 0,25 с.

Находим координаты x_1, y_1 положения точки M_1:

$$x_1 = x(0{,}25) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см}, \quad y_1 = y(0{,}25) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Находим проекции V_{1x}, V_{1y} вектора $\vec{V}_1$ скорости точки на оси системы координат:

$$V_x(t) = \dot{x} = 2\pi\cos\pi t; \; V_y(t) = \dot{y} = -2\pi\sin 2\pi t;$$

$$V_{1x} = V_x(0{,}25) = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = \pi\sqrt{2} \text{ см/с}; \quad V_{1y} = V_y(0{,}25) = -2\pi\sin\frac{\pi}{2} = -2\pi \text{ см/с}.$$

Модуль скорости $V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \pi\sqrt{6}$ см/с.

Находим проекции a_{1x}, a_{1y} вектора $\vec{a}_1$ ускорения точки на оси системы координат:

$$a_x(t) = \dot{V}_x = -2\pi^2 \sin\pi t;\ a_y(t) = \dot{V}_y = -4\pi^2 \cos 2\pi t;$$

$$a_{1x} = a_x(0{,}25) = -2\pi^2 \sin\frac{\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\ a_{1y} = a_y(0{,}25) = -4\pi^2 \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Модуль вектора ускорения $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \pi^2\sqrt{2}$ см/с.

Положение точки M_1 в момент времени $t_1 = 0{,}25$ с, построение векторов скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ по их проекциям показано на рис. 2.4, *а*.

Для того чтобы определить характер движения точки в положении M_1 – ускоренное или замедленное, найдём направление касательного ускорения. С этой целью разложим известный уже вектор ускорения $\vec{a}_1$ на нормальную и касательную составляющие согласно равенству $\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}$. При этом направление касательной совпадает с направлением вектора скорости $\vec{V}_1$, а направление нормали – перпендикулярно ему. Касательное ускорение $\vec{a}_{1\tau}$ оказалось направленным противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (см. рис. 2.4, *а*). Следовательно, точка в рассматриваемый момент движется замедленно.

В момент времени $t_2 = 0{,}75$ с положение M_2 совпадает с положением M_1:

$$x_2 = x(0{,}75) = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \text{ см};\ y_2 = y(0{,}75) = \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Проекции векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ точки на оси координат:

$$V_{2x} = V_x(0{,}75) = 2\pi\cos\frac{3\pi}{4} = -\pi\sqrt{2} \text{ см/с};\ V_{2y} = V_y(0{,}75) = -2\pi\sin 2\pi\frac{3}{4} = 2\pi \text{ см/с};$$

$$a_{2x} = a_x(0{,}75) = -2\pi^2 \sin\frac{3\pi}{4} = -\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2;\ a_{2y} = a_y(0{,}75) = -4\pi^2 \cos 2\pi\frac{3}{4} = 0.$$

Модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_2 = 0{,}75$ с:

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} = \pi\sqrt{6} \text{ см/с}; \quad a_2 = |a_{2x}| = \pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Положение точки M_2 в момент времени t_2 = 0,75 с, построение векторов скорости $\vec{V}_2$ и ускорения $\vec{a}_2$ по их проекциям, а также разложение вектора ускорения $\vec{a}_2$ на составляющие $\vec{a}_{2n}$ и $\vec{a}_{2\tau}$ показано на рис. 2.4, *b*. В данном случае вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости (см. рис. 2.4, *b*), поэтому движение ускоренное.

В целом движение точки по траектории происходит следующим образом. Из начального положения M_0 (t_0 = 0) точка с замедлением перемещается по правой ветви параболы. Достигнув положения *B* на траектории (t_B = 0,5 с), точка совершает мгновенную остановку и начинает обратное ускоренное движение. Достигнув положения M_0 (t_{M_0} = 1 с), точка переходит на левую часть параболы, где движется аналогично.

Задача 21. Рудничный поезд выходит на закруглённый участок пути радиуса *R* = 1 км с начальной скоростью 54 км/ч. Считая движение поезда равнопеременным, определить его скорость и ускорение в конце 10-й секунды движения по закруглённому участку, если за это время поезд прошёл путь 500 м.

Решение

Примем за начало отсчёта расстояния точку M_0, где поезд выходит на закруглённый участок пути (рис. 2.5). Предположим, движение поезда равноускоренное и происходит в сторону возрастания дуговой координаты *S*. В этом случае вектор скорости и вектор касательного ускорения направлены в положительную сторону касательной.

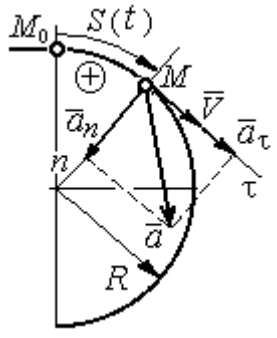


Рис. 2.5. Скорость и ускорение поезда

При равнопеременном движении проекция вектора ускорения на касательную постоянна: a_τ = const. Так как $a_\tau = \dfrac{dV_\tau}{dt}$, то $V_\tau = a_\tau t + C_1$, где V_τ – проекция вектора скорости на касательную

ось. Далее, поскольку $V_\tau = \frac{dS}{dt}$, имеем $S = \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$ $S = 0$ и $V_\tau = V_0 =$ = 54 км/ч = 15 м/с. Подставив эти условия в уравнения движения, найдём константы интегрирования: C_1 = 15 м/с; C_2 = 0.

В результате получена система уравнений:

$$V_\tau = a_\tau t + 15; \quad S = \frac{a_\tau t^2}{2} + 15t .$$

По условию задачи через 10 с от начала движения по закруглённому участку поезд прошёл по дуге путь S = 500 м. Подставляя это условие во второе уравнение, получим a_τ = 7 м/с^2. Скорость поезда в конце пройденного пути с учётом известной величины касательного ускорения найдём из первого уравнения V_τ = 85 м/с. Следует заметить, что при указанном движении поезда проекция вектора скорости на касательную ось положительна и равна его модулю: $V_\tau = V$.

Нормальное ускорение поезда при движении по дуге окружности радиуса R = 1000 м в момент времени t = 10 с равно $a_n = \frac{V_\tau^2}{R}$ = 7,23 м/с^2. Величина (модуль) полного ускорения поезда $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ = 10,06 м/с^2. Разложение вектора ускорения поезда на нормальную и касательную составляющие показано на рис. 2.5.

Задача 22. Вагонетка движется равнопеременно по дуге окружности радиуса R = 80 м. За время движения скорость вагонетки изменилась от начальной V_0 = 18 км/ч до конечной V_1 = 9 км/ч.

Определить характер движения – ускоренное или замедленное. Найти ускорение вагонетки в начале и в конце участка движения, если за это время она прошла путь S = 60 м.

Решение

Выберем некоторую точку на траектории в качестве начальной, а направление положительного отсчёта расстояний – в сторону движения вагонетки.

Уравнения равнопеременного движения точки при начальных условиях: $t = 0$; $S = 0$ и $V_\tau = V_0 = 5$ м/с имеют вид:

$$V_\tau = 5 + a_\tau t\,; \quad S = 5t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Подставим в уравнения параметры движения в момент времени $t = t_1$, когда скорость вагонетки стала $V_{1\tau} = 2{,}5$ м/с, а пройденный ею путь составил 60 м. Получим систему:

$$-2{,}5 = a_\tau t_1\,; \quad 60 = 5t_1 + \frac{a_\tau t_1^2}{2},$$

откуда найдём касательное ускорение: $a_\tau = -0{,}16$ м/с^2.

Отрицательная величина означает, что вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную направлению вектора скорости, и движение равнозамедленное.

Нормальное ускорение вагонетки в начале движения $a_{n0} = \frac{V_0^2}{R} = 0{,}31$ м/с^2.

Полное ускорение $a_0 = \sqrt{a_{n0}^2 + a_\tau^2} = 0{,}35$ м/с^2. В конце движения нормальное ускорение $a_{n1} = \frac{V_1^2}{R} = 0{,}08$ м/с^2. Полное ускорение $a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_\tau^2} = 0{,}18$ м/с^2.

2.2. Поступательное движение и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твёрдого тела называется **поступательным**, если любой прямолинейный отрезок, связанный с телом, остаётся в процессе движения параллельным самому себе. При **поступательном** движении твёрдого тела все его

точки движутся по одинаковым траекториям, имеют равные скорости и ускорения.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через неподвижные точки, называется **осью вращения** тела.

Положение вращающегося тела определяется углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ относительно какой-либо системы отсчёта, например, относительно неподвижной плоскости, проходящей через ось вращения.

Вектор угловой скорости вращения тела $\vec{\omega}$ лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки. **Алгебраическим значением угловой скорости** вращения тела называют проекцию вектора угловой скорости на ось вращения (ось z) $\omega_z = \dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ тело вращается в сторону положительного направления отсчёта угла φ, при $\dot{\varphi} < 0$ – в обратную сторону. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Модуль алгебраического значения угловой скорости вращения тела называется угловой скоростью $\omega = |\omega_z| = |\dot{\varphi}|$.

Алгебраическим значением **углового ускорения** вращающегося тела называют проекцию вектора углового ускорения на ось вращения (ось z) $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$. Модуль алгебраического значения углового ускорения вращения тела называется угловым ускорением: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |\dot{\omega}_z| = |\ddot{\varphi}|$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Если $\varepsilon_z \omega_z > 0$ (вектора угловой скорости и углового ускорения сонаправлены), движение ускоренное, если $\varepsilon_z \omega_z < 0$ (векторы угловой скорости и углового ускорения противоположны по направлению), – замедленное.

При равномерном вращении угловая скорость тела (алгебраическое значение) – постоянная величина: ω_z = const. Угол поворота тела изменяется по линейному закону $\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$, где φ_0 – начальный угол поворота тела.

При равнопеременном вращении постоянной величиной является алгебраическое значение углового ускорения: ε_z = const. В этом случае справедливы уравнения движения: $\omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t$; $\varphi = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2}$.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки** вращающегося твердого тела **(**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Модуль скорости точки рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – угловая скорость тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону вращения тела.

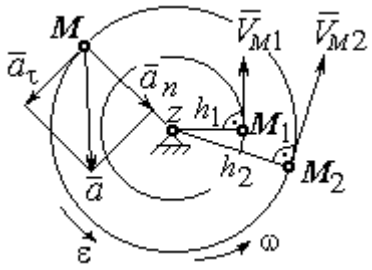


Рис. 2.6. Скорость и ускорение точек вращающегося тела

При вращении тела отношение скоростей двух точек тела равно отношению расстояний от этих точек до оси вращения: $\dfrac{V_{M_1}}{V_{M_2}} = \dfrac{h_1}{h_2}$ (рис. 2.6).

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений (см. рис. 2.6): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где модули векторов $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела, $\varepsilon = |\varepsilon_z|$; h – расстояние от точки до оси вращения. **Вектор касательного ускорения точки** $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к описываемой точкой окружности в сторону движения точки, если вращение тела ускоренное, и в противоположную сторо-

ну, если движение тела замедленное. **Вектор нормального ускорения точки** $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса описываемой точкой окружности к её центру.

При **передаче вращения** одного тела другому без проскальзывания соотношения между угловыми скоростями и угловыми ускорениями выражаются из равенства скоростей и касательных ускорений в точке контакта: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$; $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (рис. 2.7).

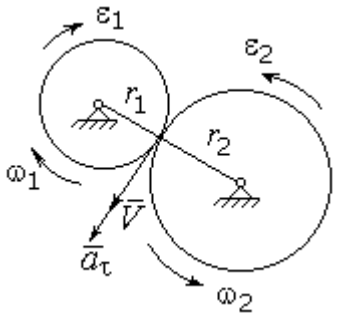


Рис. 2.7. Передача вращения одного тела другому

Примеры решения задач на вращательное движение тел

Задача 23. Вал, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, за первые 2 мин. сделал 3600 оборотов. Определить угловую скорость вала в конце 2-й минуты и угловое ускорение вала.

Решение

Допустим, вращение вала вокруг оси *z* происходит в сторону положительного направления отсчёта угла. Тогда алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения равны модулям соответствующих векторов $\omega_z = \omega$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Воспользуемся уравнениями равнопеременного вращения вала с нулевыми начальными условиями (начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ и начальная угловая скорость вала $\omega_0 = 0$). Имеем $\omega = \varepsilon t$; $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Подставим в уравнения параметры движения вала в момент времени $t = t_1 = 2$ мин = 120 с; $\varphi_1 = 3600$ об $= 7200\pi$ рад. Получим систему:

$$\omega_1 = \varepsilon \cdot 120, \quad 7200\pi = \frac{\varepsilon \cdot 120^2}{2}, \text{ откуда } \varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}; \quad \omega_1 = 120\pi \text{ с}^{-1}.$$

Задача 24. В механизме стрелочного индикатора (рис. 2.8) движение от рейки мерительного штифта 1 передаётся шестерне 2, скреплённой на одной оси с зубчатым колесом 3. Колесо 3 сцепляется, в свою очередь, с шестернёй 4, несущей стрелку-индикатор. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задаётся уравнением $x = 4\sin\pi t$ и радиусы зубчатых колёс: $r_2 = 6$ см, $r_3 = 10$ см, $r_4 = 4$ см.

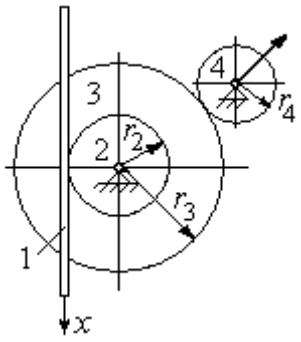


Рис. 2.8. Механизм стрелочного индикатора

Решение

Мерительный штифт движется поступательно вдоль оси x (см. рис. 2.8). Проекция скорости любой точки штифта на ось x $V_{1x} = \dot{x} = 4\pi\cos\pi t$ см/с. Такую же скорость имеет и точка касания штифта с шестернёй 2.

Полагая, что точка касания штифта с шестернёй 2 принадлежит и шестерне, найдём алгебраическое значение угловой скорости шестерни 2: $\omega_{2z} = \dfrac{V_{1x}}{r_2} = \dfrac{4\pi\cos\pi t}{6} = \dfrac{2\pi}{3}\cos\pi t$ рад/с. Зубчатое колесо 3 скреплено с шестернёй 2 на одной оси и имеет ту же угловую скорость $\omega_{3z} = \omega_{2z}$. Вращение колеса 3 через точку зацепления передаётся шестерне 4. Выразим соотношение между алгебраическими значениями угловых скоростей при передаче вращения одного тела другому: $\dfrac{\omega_{3z}}{\omega_{4z}} = \dfrac{r_4}{r_3}$. Отсюда получим: $\omega_{4z} = \dfrac{V_{1x} r_3}{r_2 r_4} = \dfrac{5\pi}{3}\cos\pi t$ с$^{-1}$. Угловая скорость стрелки равна угловой скорости шестерни 4.

Задача 25. Ведущее колесо 1 подъёмного устройства (рис. 2.9) передаёт движение шестерне 2. На одной оси с шестернёй 2 расположен шкив 3, жёстко скреплённый с шестернёй. Шкив 3 соединяется со шкивом 4 бесконечным

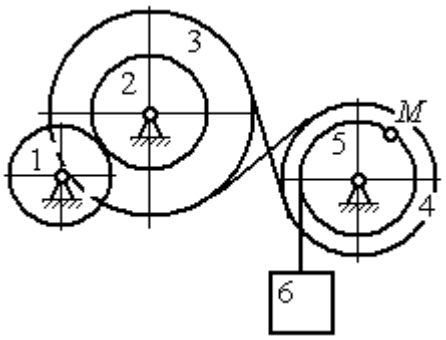


Рис. 2.9. Схема механизма подъёмного устройства

перекрёстным ремнём. Барабан 5 скреплён со шкивом 4 и находится с ним на одной оси. На барабан намотана нить, удерживающая груз 6. По заданному уравнению движения колеса 1 определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки M на ободе барабана 5 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение груза 6. Скольжение между звеньями механизма отсутствует.

Значения радиусов колёса, шкивов и барабана механизма: $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см, $r_3 = 40$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 8$ см. Уравнение вращения колеса 1: $\varphi_1 = 2t^2 - 5t$ рад.

Решение

Ведущим звеном в механизме является колесо 1. Выберем положительное направление отсчёта угла поворота колеса 1 в сторону, противоположную направлению вращения часовой стрелки. На рис. 2.10 это направление показано дуговой стрелкой φ_1.

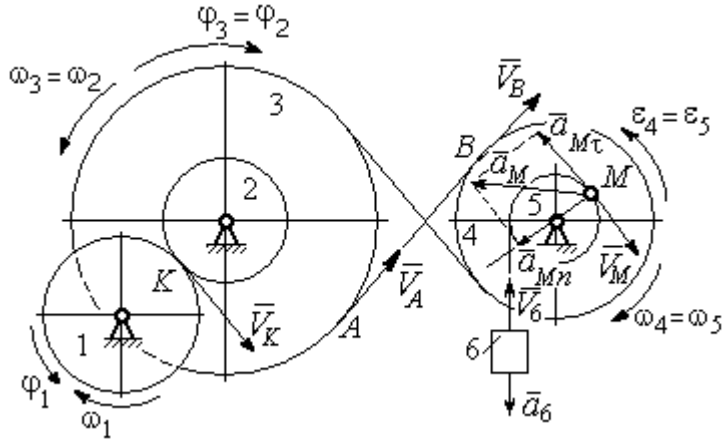


Рис. 2.10. Расчётная схема механизма

Продифференцировав по времени уравнение движения колеса 1, получим алгебраическое значение его угловой скорости: $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 4t - 5$ рад/с. В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 отрицательно: $\dot{\varphi}_1(1) = -1$ рад/с. Это означает, что в данный момент времени колесо 1 вращается в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла φ_1. Угловая скорость колеса 1 равна модулю: $\omega_1 = |\omega_{1z}| = 1$ рад/с. Направление угловой скорости ω_1 колеса 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано дуговой стрелкой ω_1.

Вращение колеса 1 передаётся шестерне 2 через точку контакта *K*. Из соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}$ найдём угловую скорость шестерни 2: $\omega_2=\frac{\omega_1 r_1}{r_2}$. Шкив 3, закреплённый на одной оси с шестернёй 2 имеет такую же угловую скорость, $\omega_3=\omega_2$. Направление угловых скоростей шестерни 2 и шкива 3 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_2.

Передача движения шкива 3 шкиву 4 производится с помощью ремённой передачи. На участке от точки *A*, где ремень сходит со шкива 3, и до точки *B*, где ремень набегает на шкив 4, ремень движется поступательно, поэтому скорости точек *A* и *B* равны: $V_A=V_B$. Выразив скорости точек через угловые скорости тел, имеем равенство $\omega_3 r_3=\omega_4 r_4$, откуда с учётом, что $\omega_3=\omega_2$, найдём угловую скорость шкива 4: $\omega_4=\frac{\omega_3 r_3}{r_4}=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}$. Угловая скорость барабана 5 равна угловой скорости шкива 4, $\omega_5=\omega_4$. Направление угловых скоростей шкива 4 и барабана 5 показано на рис. 2.10 дуговой стрелкой ω_4.

Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M=\omega_5 r_5$. В момент времени $t_1=1$ с $\omega_5=\frac{\omega_1 r_1 r_3}{r_2 r_4}=5$ рад/с и $V_M=20$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к ободу барабана в точке *M* и направлен в сторону вращения барабана 5 (см. рис. 2.10).

Нить, несущая груз 6, сматываясь с обода барабана, имеет скорость, равную скорости точек обода барабана, и, следовательно, равна скорости точки *M*: $V_6=V_M$. Направление скорости груза 6 определяется направлением вращения барабана 5. При $t_1=1$с груз поднимается со скоростью $V_6=20$ см/с.

Определим ускорение точки *M*. Вектор ускорения точки *M* равен сумме векторов: $\vec{a}_M=\vec{a}_M^{\tau}+\vec{a}_M^{n}$, где $\vec{a}_M^{\tau}$, $\vec{a}_M^{n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения.

Найдём алгебраическое значение угловой скорости барабана 5: $\omega_{5z} = \dfrac{\omega_{1z} r_1 r_3}{r_2 r_4} = 20t - 25$ рад/с. Алгебраическое значение углового ускорения барабана 5 ε_{5z} равно производной $\varepsilon_{5z} = \dot{\omega}_{5z} = 20$ рад/с^2. Так как в момент времени $t_1 = 1$ с знаки алгебраических значений угловой скорости барабана и его углового ускорения разные ($\omega_{5z} = -5$ рад/с $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\tau} + \vec{a}_M^{n}$ $\varepsilon_{5z} = +20$ рад/с^2), угловое ускорение (по величине равное модулю $\varepsilon_5 = |\varepsilon_{5z}|$) направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис. 2.10 направление углового ускорения барабана 5 показано дуговой стрелкой ε_5.

Касательное ускорение точки: $a_{M\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Вектор $\vec{a}_{M\tau}$ касательного ускорения точки M направлен по касательной к траектории в точке M в сторону углового ускорения ε_5 (см. рис. 2.10).

Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_5^2 r_5$, где угловая скорость барабана $\omega_5 = |\omega_{5z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_5 = 5$ рад/с и величина нормального ускорения: $\vec{a}_M^{\,n} = 100$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^{\,n}$ направлен по радиусу к центру барабана 5.

Модуль полного ускорения точки M в заданный момент времени: $a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = 128{,}06$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^{\,n}$ и $\vec{a}_M^{\tau}$ (см. рис. 2.10).

Ускорение a_6 груза 6 находится из условия, что груз движется прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. В результате, ускорение груза 6 $a_6 = a_6^{\tau} = \dot{V}_6 = \dot{V}_M = a_M^{\tau} = \varepsilon_5 r_5 = 80$ см/с^2. Направление вектора ускорения груза 6 определяется направлением углового ускорения барабана 5. На рис. 2.10 направление ускорения груза 6 показано вектором $\vec{a}_6$.

Задача 26. По заданному уравнению поступательного движения звена 1 механизма (рис. 2.11, *a*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* диска 3 в момент времени $t_1 = 1$ с, а также скорость и ускорение звена 4. Скольжение между звеньями механизма отсутствует. Значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: $R_2 = 20$ см, $r_2 = 5$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 4$ см, $x_1 = \cos\pi t + \sin\pi t$ см.

Решение

Звено 1 движется поступательно вдоль оси *x*. Положительное направление движения задаётся направлением оси *x* (рис. 2.11, *a*). Продифференцировав по времени уравнение движения звена 1, получим его алгебраическое значение скорости: $V_{1x}(t) = \dot{x}_1 = -\pi\sin\pi t + \pi\cos\pi t$.

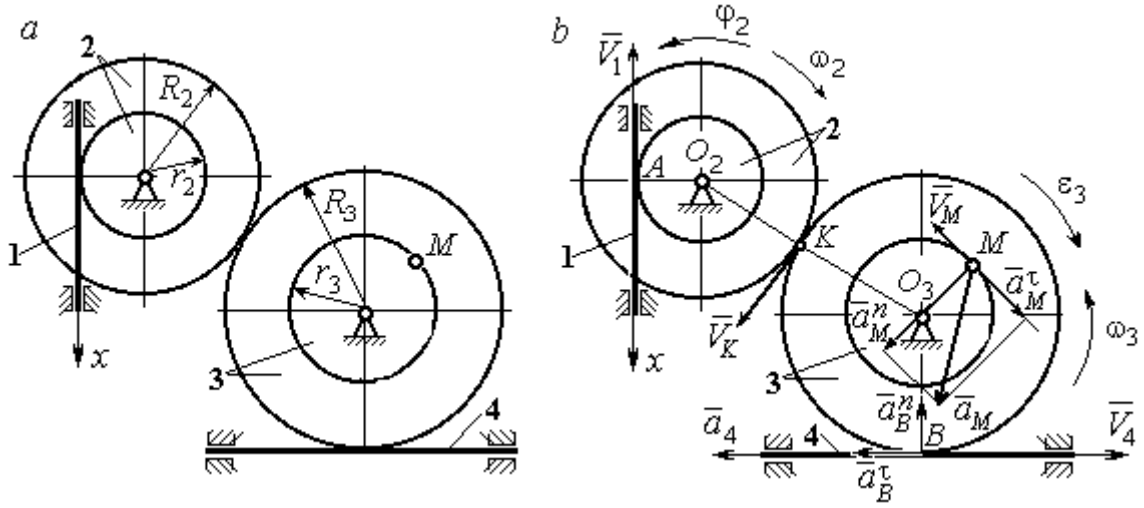


Рис. 2.11. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей
и ускорений точек механизма

В момент времени $t_1 = 1$ с алгебраическое значение скорости звена 1 отрицательное: $V_{1x}(1) = -\pi$ см/с. Это показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной $V_1(1) = |\dot{x}_1| = \pi$ см/с. На рис. 2.11, *b* показано направление вектора скорости $\vec{V}_1$.

Точка A соприкосновения звена 1 с диском 2 имеет ту же скорость, что и звено 1. Угловая скорость диска 2 определяется из равенства $\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$ рад/с. Направление угловой скорости вращения диска 2 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_2.

Передача вращения диска 2 диску 3 происходит в точке *K*. Из соотношения $\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$ находим угловую скорость диска 3: $\omega_3 = \frac{V_1 R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}$. Направление угловой скорости диска 3 показано на рис. 2.11, *b* дуговой стрелкой ω_3.

Модуль скорости точки M $V_M = \omega_3 r_3 = 2\pi$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ направлен по касательной к траектории движения точки *M* в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.11, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Величина и направление скорости звена 4 совпадают с величиной и направлением скорости точки *B* касания звена 4 с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с $V_4 = 4\pi$ см/с. Направление вектора скорости $\vec{V}_4$ определяется направлением вращения диска 3.

Определим ускорение точки *M*. Найдём алгебраическое значение ω_{3z} угловой скорости диска 3: $\omega_{3z} = \frac{V_{1x} R_2}{r_2 R_3} = \frac{\pi}{2}(-\sin\pi t + \cos\pi t)$. Алгебраическое значение ε_{3z} углового ускорения диска 3: $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{\pi^2}{2}(\cos\pi t + \sin\pi t)$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon_{3z} = \frac{\pi^2}{2}$. Разные знаки алгебраических значений угловой скорости и углового ускорения диска 3 ($\omega_{3z} = -\frac{\pi}{2}; \varepsilon_{3z} = +\frac{\pi^2}{2}$) показывают, что угловое ускорение направлено в сторону, противоположную угловой скорости. На рис 2.11, *b* направление углового ускорения диска 3 показано дуговой стрелкой ε_3.

Касательное ускорение точки M рассчитывается по формуле $a_M^{\tau} = \varepsilon_3 r_3$, где угловое ускорение $\varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $a_M^{\tau} = 2\pi^2$ см/с^2. Вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_M^{\tau}$ направлен по касательной к траектории точки M в сторону углового ускорения ε_3 (см. рис. 2.11, *b*).

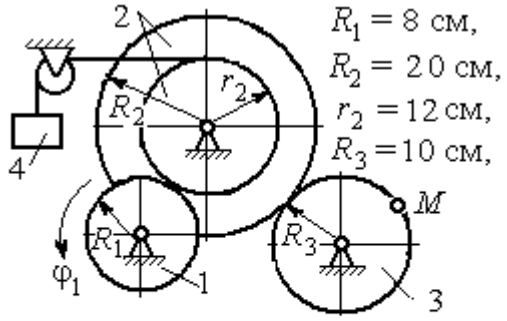
Нормальное ускорение точки M рассчитывается как $a_M^n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения $a_M^n = \pi^2$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_M^n$ направлен по радиусу к центру диска 3.

Модуль полного ускорения точки M: $a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^{\tau})^2} = \pi^2\sqrt{5}$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_M^n$ и $\vec{a}_M^{\tau}$.

Звено 4 движется поступательно и прямолинейно. Ускорение звена 4 равно проекции ускорения точки B (касания диска 3 со звеном 4) на линию движения звена 4: $a_4 = a_B^{\tau} = \varepsilon_3 R_3 = 4\pi^2$ см/с^2. Направление ускорения звена 4 совпадает с касательным ускорением точки B.

Упражнения

Упражнение 2.1

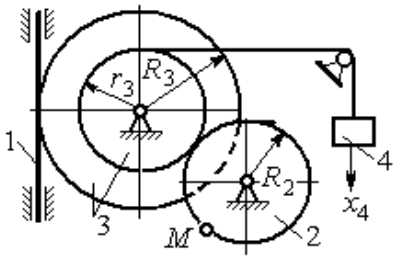


$R_1 = 8$ см,
$R_2 = 20$ см,
$r_2 = 12$ см,
$R_3 = 10$ см,

$\varphi_1 = 3t + 2\sin\frac{\pi t}{2}$ рад,

Найти скорость и ускорение точки M и груза 4 в момент $t = 1$ с

Упражнение 2.2



$R_2 = 0{,}2$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $r_3 = 0{,}3$ м,

$x_4 = t - 1 - \sin\frac{\pi t}{3} + \cos\frac{\pi t}{3}$ м.

Найти скорость и ускорение точки M и звена 1 в момент $t = t_1 = 3$ с.

Рис. 2.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.1, 2.2

2.3. Скорости точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

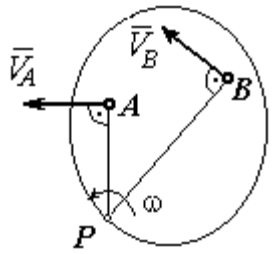
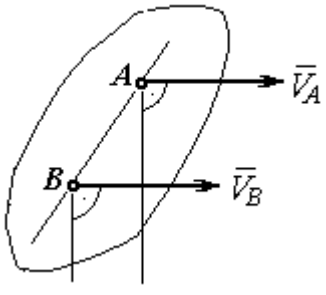
Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной (основной) плоскости.

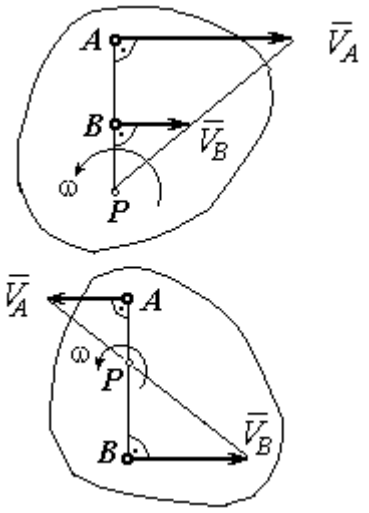
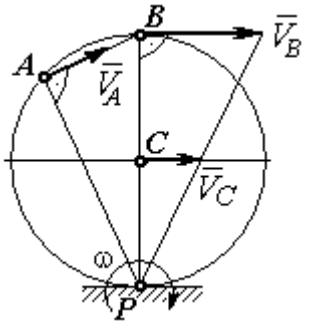
Для скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ двух точек A и M тела, совершающего плоское движение, справедливо утверждение: **проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу:** $V_A\cos\alpha = V_M\cos\beta$, где α, β – углы между векторами скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_M$ и осью, проходящей через точки A и M.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. При известном положении МЦС скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы движение фигуры было мгновенно вращательным вокруг мгновенного центра скоростей с угловой скоростью, равной угловой скорости плоской фигуры. Способы построения мгновенного центра скоростей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей.	
2. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то, как видно из рисунка, мгновенный центр P бесконечно удалён. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$ и тело в данный момент движется поступательно (движение является мгновенным поступательным). При таком движении скорость любой точки тела равна $\vec{V}_A$.	

3. Если скорости двух точек $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то мгновенный центр скоростей P находится как пересечение прямой, соединяющей точки A и B и линии, проходящей через концы векторов, изображающих скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.	
4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей P расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью.	

Примеры решения задач на плоскопараллельное движение тела

Задача 27. Приводной механизм насоса находится в положении, показанном на рис. 2.13. Кривошип O_1C вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1C} = 2$ рад/с вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости чертежа. Определить скорость поршня D и угловые скорости шатуна BC, коромысла AB и штока AD, если O_1C = 20 см, $OB = 2 \cdot OA$ = 40 см, AD = 60 см.

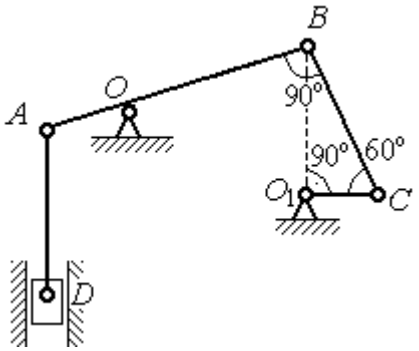


Рис. 2.13. Приводной механизм насоса

Решение

Предположим для определённости, что кривошип O_1C вращается в направлении по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C направлен

перпендикулярно кривошипу O_1C, в сторону его вращения (рис. 2.14). Модуль скорости $V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 40$ см/с.

Коромысло AB качается (вращается) вокруг оси, проходящей через точку O, параллельно оси вращения кривошипа. Скорость точки B направлена перпендикулярно коромыслу AB вдоль шатуна BC (рис. 2.14).

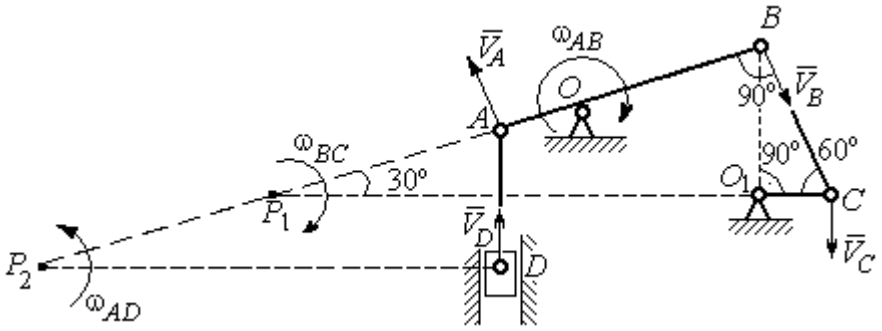


Рис. 2.14. Расчётная кинематическая схема механизма привода насоса

Шатун BC совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей шатуна P_1 расположен в точке пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B шатуна. Находим $P_1C = 4O_1C = 80$ см. Угловая скорость вращения шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_1} = 0{,}5$ рад/с. Направление угловой скорости вращения шатуна BC определяется направлением вращения кривошипа O_1C и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость V_B найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем вектора скоростей $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек C и B на линию BC. Получим $V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 30^\circ$. Отсюда $V_B = 20\sqrt{3}$ см/с.

Угловая скорость коромысла AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_B}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости коромысла определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{AB}.

Скорость точки A коромысла равна половине скорости точки B: $V_A = \frac{1}{2}V_B = 10\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно коромыслу AB в сторону его вращения.

Точка P_2 пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$ является мгновенным центром скоростей штока AD. Тогда угловая скорость штока $\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ рад/с. Направление угловой скорости штока определяется по направлению скорости точки A и на рис. 2.14 показано дуговой стрелкой ω_{AD}.

Скорость поршня $V_D = \omega_{AD} \cdot P_2D = 15$ см/с.

Задача 28. Механизм качалки (рис. 2.15) состоит из кривошипа OA, вращающегося вокруг оси O и несущего в точке A ось подвижной шестерни 2, которая катится по неподвижной шестерне 1. Вращение кривошипа происходит с угловой скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с. Радиусы шестерён $r_1 = r_2 = 6$ см. К ободу шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплён шатун BC длиной $BC = 8$ см, который в точке C передаёт движение коромыслу CO_1 длиной $CO_1 = 16$ см.

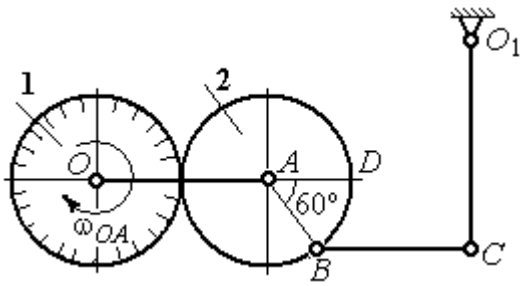


Рис. 2.15. Схема механизма качалки

Определить угловые скорости шестерни 2, шатуна BC, коромысла CO_1, а также скорости точек A, B, C, D в момент, когда кривошип OA и шатун BC горизонтальны и угол $\angle DAB = 60^\circ$.

Решение

Найдём скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 24$ см/с. Вектор скорости точки $\vec{V}_A$ расположен перпендикулярно кривошипу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис. 2.16).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится в точке касания с неподвижной поверхностью шестерни 1. Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = 4$ рад/с. Направление угловой скорости шестерни 2 определяется направлением вектора скорости $\vec{V}_A$ и на рис. 2.16 показано дуговой стрелкой ω_2.

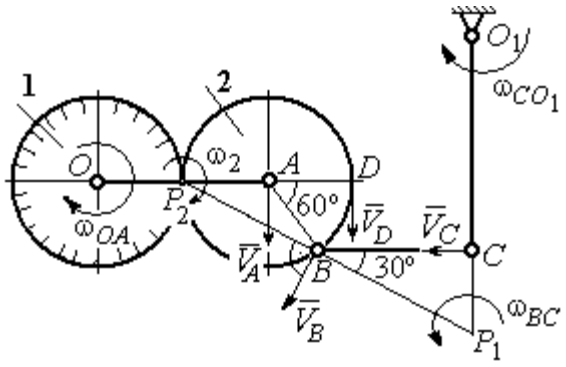


Рис.2.16. Расчётная кинематическая схема механизма качалки

Найдём расстояние P_2B из равнобедренного треугольника P_2AB по теореме косинусов: $P_2B = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos 120^\circ} = 6\sqrt{3}$ см. Скорость точки B $V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 24\sqrt{3}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Скорость точки D: $V_D = \omega_2 \cdot P_2D = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен линии P_2D и направлен в ту же сторону (см. рис. 2.16).

Скорость точки C перпендикулярна линии CO_1. Восстанавливая перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$, получим точку пересечения P_1, которая будет мгновенным центром скоростей шатуна BC. Расстояние $P_1B = \dfrac{BC}{\cos 30^\circ} = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$ см.

Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = \dfrac{9}{2}$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по направлению скорости $\vec{V}_B$ и показано дуговой стрелкой ω_{BC}.

Скорость точки C: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_1C = \dfrac{36}{\sqrt{3}}$ см/с. Направление вектора скорости определяется направлением вращения шатуна BC.

Угловая скорость коромысла CO_1: $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = \dfrac{9}{4\sqrt{3}}$ рад/с.

Задача 29. В планетарном механизме (рис. 2.17) кривошип OA длиной OA = 25 см вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью ω_{OA} = 3,6 рад/с. На конец A кривошипа насажена шестерёнка 2, находящаяся во внутреннем зацеплении с колесом 1 радиуса r_1 = 45 см, соосным с кривошипом OA и вращающимся с угловой скоростью ω_1 = 1 рад/с. Шатун BC, шарнирно соединённый с шестерёнкой 2 на её ободе в точке B, приводит в движение кривошип CO_1. Определить угловые скорости шестерёнки 2, шатуна BC и кривошипа CO_1, скорости точек A, B, C в положении, показанном на рис.2.17, если длина шатуна BC = 100 см, длина кривошипа CO_1 = 50 см.

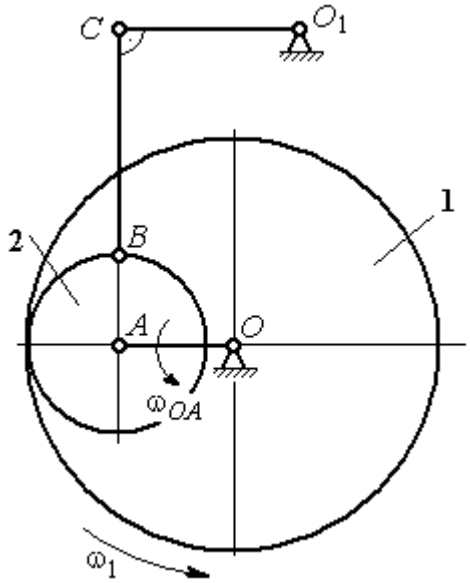


Рис. 2.17. Планетарный механизм

Решение

Найдём скорости точек A и D

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 90 \text{ см/с}; \quad V_D = \omega_1 \cdot r_1 = 45 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен радиусу OD колеса 1 и направлен в сторону вращения колеса (рис. 2.18).

Мгновенный центр скоростей P_2 шестерни 2 находится на пересечении прямой, соединяющей точки A и D, и линии, проходящей через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, изображающих скорости точек A и D Расстояние P_2D от центра скоростей до точки D находится из пропорции $\frac{V_A}{V_D} = \frac{AP_2}{DP_2} = \frac{DP_2 + 20}{DP_2}$, откуда P_2D = 20 см.

Угловая скорость шестерёнки 2 $\omega_2 = \dfrac{V_D}{P_2 D} = 2{,}25$ рад/с. Направление угловой скорости ω_2 показано на рис. 2.18 дуговой стрелкой ω_2.

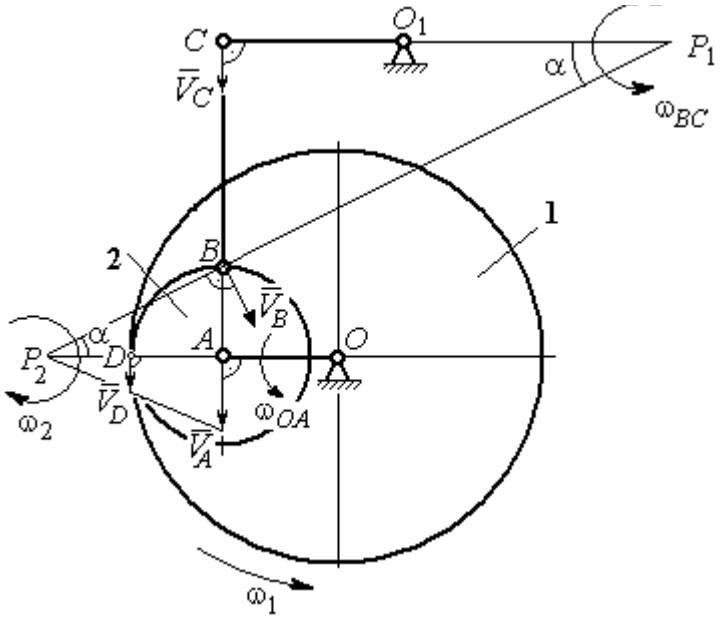


Рис. 2.18. Расчётная кинематическая схема планетарного механизма

Скорость точки *B,* которая находится на ободе шестеренки, $V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = = 45\sqrt{5}$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_2B и направлен в сторону вращения шестерни 2.

Направим вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярно кривошипу CO_1 и восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$. Точка P_1 пересечения перпендикуляров является мгновенным центром скоростей шатуна *BC*. Расстояние P_1B найдём из треугольника P_1BC: $P_1B = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha = \dfrac{AB}{P_2B} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда $P_1B = 100\sqrt{5}$ см. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{P_1B} = 0{,}45$ рад/с. Скорость точки *C* шатуна *BC* найдём по теореме о проекциях скоростей. Спроектируем скорости $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_B$ точек *C* и *B* на линию, проходящую через эти точки Имеем: $V_C \cos 0^\circ = V_B \cos\alpha$, откуда $V_C = 90$ см/с.

Угловая скорость кривошипа CO_1 $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{O_1C} = 1{,}8$ рад/с.

Задача 30. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA}. На конец A кривошипа насажена шестерня 2, находящаяся во внешнем зацеплении с неподвижным колесом 1. Радиусы колеса и шестерни r_1 и r_2. Шестерня 2 соединяется с колесом 3 шатуном BC, закреплённым на шестерне в точке B и на колесе в точке C. Колесо 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Все соединения шарнирные. Качение шестерни 2 по неподвижному колесу 1 без проскальзывания. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить скорости точек A, B, C и угловые скорости шатуна BC, шестерни 2 и колеса 3, если ω_{OA}= 4 рад/с; r_1= 4 см; $r_2 = r_3$= 8 см.

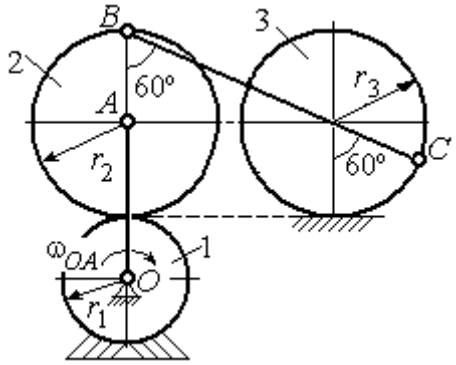


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A кривошипа: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA$= 48 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.20).

При качении шестерни 2 по неподвижной поверхности колеса 1 точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни.

Угловая скорость шестерни 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2}$= 6 рад/с.

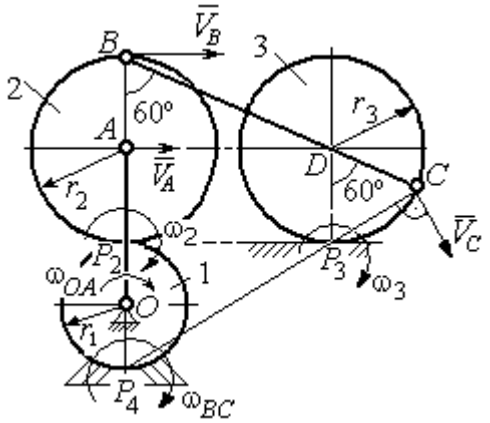


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Скорость точки B шестерни 2 $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 96 см/с.

Точка P_3 касания колеса 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Вектор $\vec{V}_C$ скорости точки C колеса 3 перпендикулярен линии P_3C и направлен в сторону качения колеса (см. рис. 2.20).

Мгновенный центр скоростей шатуна BC – точка P_4 находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек B и C. По построению $BP_4 = BC = BD + DC = 2r_2 + r_3 = 24$ см. Угловая скорость шатуна BC $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_4} = 4$ рад/с. Так как $BP_4 = CP_4$, скорости точек C и B $V_C = 96$ см/с.

Угловая скорость колеса 3 $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с.

Задача 31. В плоском механизме (рис. 2.21) кривошип OC, вращаясь вокруг неподвижной оси O, приводит в движение два шатуна CD и CE, присоединённых к кривошипу в точке C. Шатун CE прикреплён в точке E к ободу цилиндрического выступа диска 1, который катится без проскальзывания своим выступом по неподвижному горизонтальному рельсу. К другому шатуну CD в точке D прикреплён ползун, перемещающийся вдоль направления вертикального диаметра диска 1. Все соединения шарнирные. Радиусы диска и цилиндрического выступа $R_1 = 3$ см, $r_1 = 2$ см. Длина шатуна $CE = 4$ см. В заданном положении механизма (см. рис. 2.21) шатун CE горизонтален.

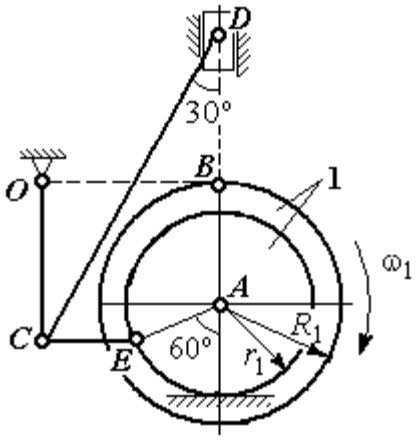


Рис. 2.21. Схема движения плоского механизма

Определить скорости точек A, E, C, D и угловые скорости диска 1, шатунов CE, CD и кривошипа CO, если известна скорость точки B на ободе диска 1 $V_B = 10$ см/с и направление ω_1 угловой скорости диска.

Решение

Изобразим вектор скорости точки B диска 1 в соответствии с заданным направлением его движения. При качении диска 1 по неподвижной поверхности рельса точка P_1 касания обода выступа с поверхностью рельса является его мгновенным центром скоростей (рис. 2.22).

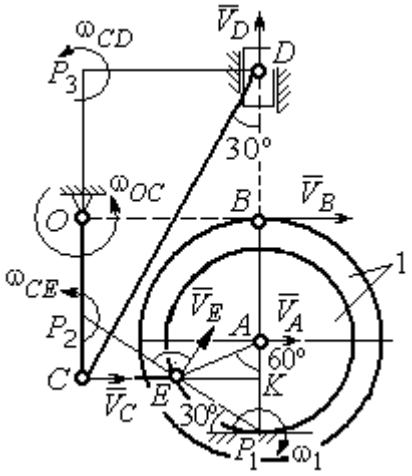


Рис. 2.22. Расчётная схема для определения скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{BP_1} = 2$ рад/с. Скорость точки A $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = 4$ см/с. Скорость точки E $V_E = \omega_1 \cdot EP_1 = 4$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ и вектор скорости $\vec{V}_E$ перпендикулярны, соответственно, линиям AP_1 EP_1 и направлены в сторону вращения диска.

Шатун CE совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки C шатуна неизвестна по величине, но известно, что вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен кривошипу OC и направлен вдоль CE в сторону точки E. Мгновенный центр скоростей P_2 шатуна CE находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_E$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 2.22).

Расстояние $EP_2 = \dfrac{EC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см. Угловая скорость шатуна CE $\omega_{CE} = \dfrac{V_E}{EP_2} = 0{,}86$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна, определяемое по направлению скорости точки E, на рис. 2.22 показано дуговой стрелкой ω_{CE}. Скорость точки C шатуна CE $V_C = \omega_{CE} \cdot CP_2 = \dfrac{V_E}{2} = 2$ см/с.

Длина кривошипа $OC = BK = R_1 + r_1 \sin 30^\circ = 4$ см. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OC} = \dfrac{V_C}{OC} = 0{,}5$ рад/с.

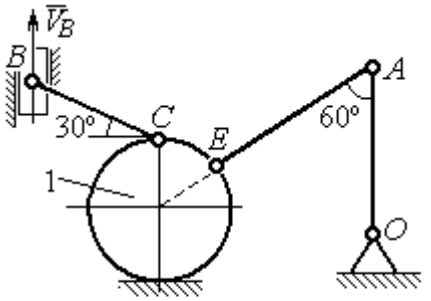
Для шатуна CD известны величина и направление вектора $\vec{V}_C$ скорости точки C и направление вектора $\vec{V}_D$ скорости точки D. Мгновенный центр скоростей шатуна CD находится в точке P_3, полученной на пересечении перпендикуляров, восстановленных к скоростям $\vec{V}_C$ и $\vec{V}_D$.

Расстояние $CP_3 = DK = (CE + r_1 \cos 30^\circ)\operatorname{ctg} 30^\circ = 9{,}92$ см (см. рис. 2.22). Угловая скорость шатуна CD: $\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}21$ рад/с.

Скорость ползуна D: $V_D = \omega_{CD} DP_3 = \omega_{CD}(CE + r_1 \cos 30^\circ) = 1{,}2$ см/с.

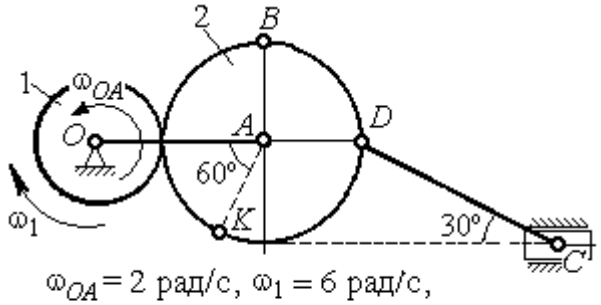
Упражнения

Упражнение 2.3



$R_1 = 2$ см, $OA = AE = 6$ см,
$BC = 5$ см, $V_B = 5$ см/с.
Найти: $\omega_{OA}, \omega_{AE}, \omega_{CB}, \omega_1, V_C, V_A, V_E$

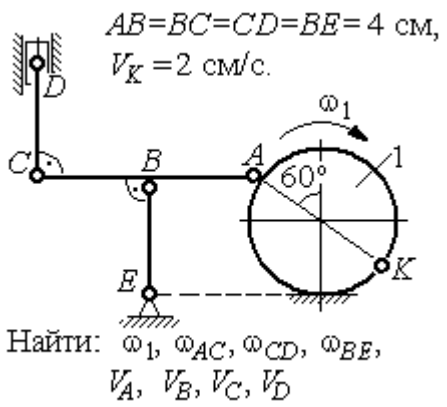
Упражнение 2.4



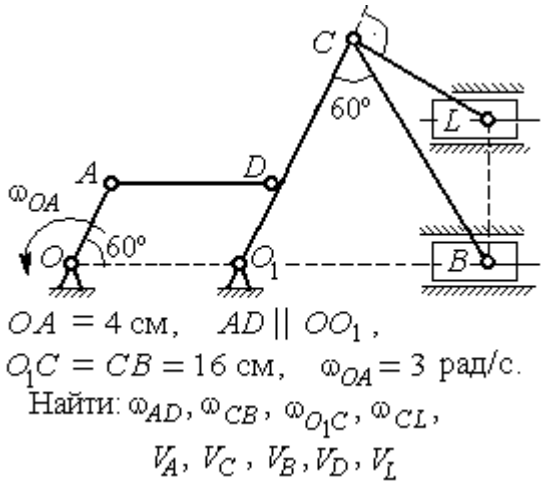
$\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с,
$r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см.
Найти: $\omega_2, \omega_{DC}, V_B, V_K, V_D, V_C$

Рис. 2.23. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.3, 2.4

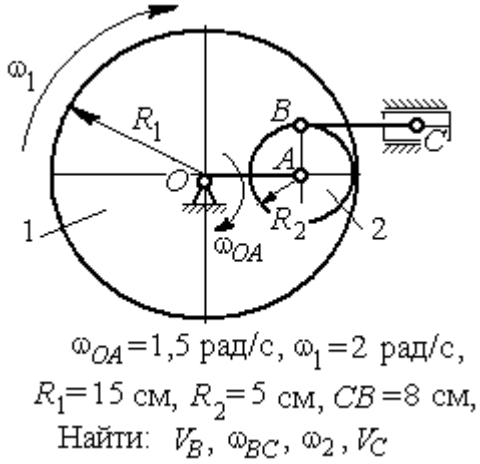
Упражнение 2.5



Упражнение 2.6



Упражнение 2.7



Упражнение 2.8

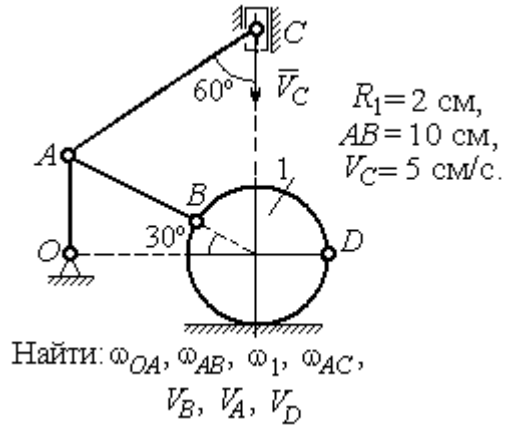


Рис. 2.24. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.5 – 2.8

2.4. Ускорения точек при плоскопараллельном движении твёрдого тела

Ускорение любой точки M плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и

нормальная составляющие ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса *A* (рис. 2.25).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки *M* к полюсу *A*. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку *AM* в сторону вращения, если оно ускоренное (см. рис. 2.25, *a*), и против вращения, если оно замедленное (см. рис. 2.25, *b*). Величины касательного и нормального составляющих ускорения точки *M* определяются по формулам:

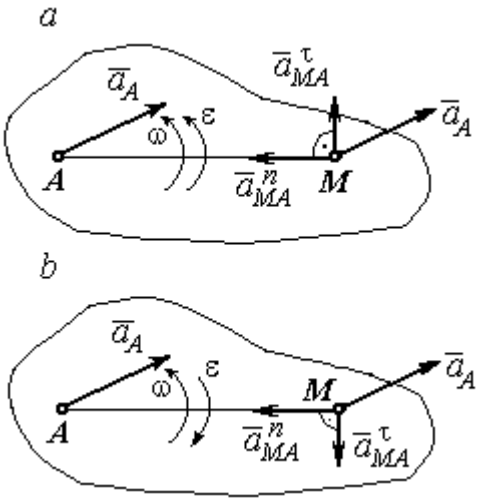


Рис. 2.25. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM$; $a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки *M* до полюса *A*.

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса *A* и точки *M*, то для определения ускорения точки *M* используется векторное равенство $\vec{a}^{\,\tau}_{M} + \vec{a}^{\,n}_{M} = \vec{a}^{\,\tau}_{A} + \vec{a}^{\,n}_{A} + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA}$, где $\vec{a}^{\,\tau}_{M}$, $\vec{a}^{\,n}_{M}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{A}$, $\vec{a}^{\,n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *M* и полюса *A* при движении их по заданным траекториям.

Примеры решения задач на определение ускорений точек

Задача 32. Поршень *D* гидравлического пресса приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом *OABD*. В положении механизма, указанном на рис. 2.26, точка *L* рычага имеет скорость $V_L = 0{,}6$ м/с и ускорение $a_L = 0{,}5$ м/с^2. Длина рычага $OA = 2 \cdot AL = 0{,}6$ м, длина звена $AB = 0{,}4$ м. Определить скорость и ускорение поршня *D*, угловую скорость и ускорение звена *AB*.

Решение

Найдём угловую скорость рычага OL: $\omega_{OL} = \dfrac{V_L}{OL} = \dfrac{2}{3}$ рад/с.

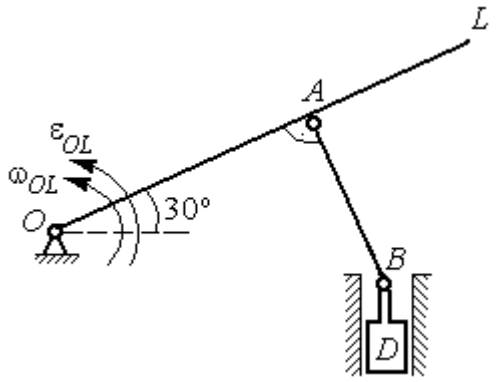


Рис. 2.26. Шарнирно-рычажный механизм гидравлического пресса

Ускорение точки L представляется в виде суммы векторов нормального и касательного ускорений: $\vec{a}_L = \vec{a}_L^{\,\tau} + \vec{a}_L^{\,n}$ (рис. 2.27). Модуль нормального ускорения точки L $a_L^n = \omega_{OL}^2 \cdot OL = 0{,}4$ м/с^2. Модуль её касательного ускорения и угловое ускорение рычага, соответственно, равны:

$$a_L^{\tau} = \sqrt{a_L^2 - (a_L^n)^2} = 0{,}3 \text{ м/с}^2, \quad \varepsilon_{OL} = \frac{a_L^{\tau}}{OL} = \frac{1}{3} \text{ рад/с}^2.$$

Скорость $\vec{V}_A$ точки A перпендикулярна рычагу OL и направлена в сторону вращения рычага. Её модуль $V_A = \omega_{OL} \cdot OA = 0{,}4$ м/с. Скорость $\vec{V}_B$ точки B направлена вертикально вверх вдоль линии движения поршня. Направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ показаны на рис. 2.27. Точка P_1 – пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ - определяет положение мгновенного центра скоростей звена AB. Расстояние $AP_1 = P_1B \cdot \cos 30^\circ = 0{,}4\sqrt{3}$ м.

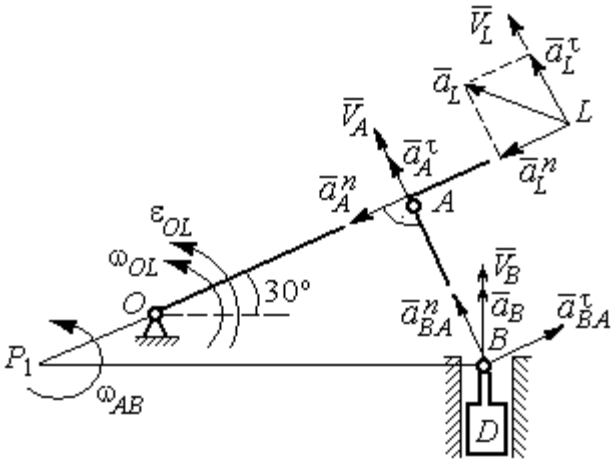


Рис. 2.27. Расчётная кинематическая схема механизма

Угловая скорость звена AB $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{P_1A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ рад/с.

Представим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{BA}$, $\vec{a}^{n}_{BA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении звена AB вокруг полюса A. Так как траекторией точки A является окружность с центром в точке O, ускорение этой точки может быть разложено на две составляющие: $\vec{a}_A = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A}$. В результате ускорение точки B представляется в виде векторной суммы $\vec{a}_B = \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}$. Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.27.

Модули ускорений:

$$a^{n}_{A} = \omega^{2}_{OL} \cdot OA = 0{,}27 \text{ см/с}^2;\ a^{n}_{BA} = \omega^{2}_{AB} \cdot AB = 0{,}13 \text{ см/с}^2;$$

$$a^{\tau}_{A} = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 0{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ остаётся неизвестной величиной, так как угловое ускорение ε_{AB} звена AB неизвестно.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки B на оси x, y, где ось x проходит вдоль линии звена AB, ось y – перпендикулярна ей (рис. 2.28). Получим равенства:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a^{\tau}_{A} + a^{n}_{BA};\ \ a_B \cdot \cos 60^\circ = -a^{n}_{A} + a^{\tau}_{BA}.$$

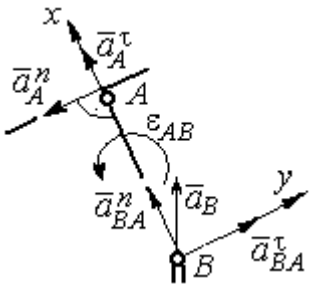


Рис. 2.28. Вычисление проекций векторов ускорений

Решая систему уравнений, находим модуль ускорения точки B: $a_B = 0{,}38$ см/с^2 и величину касательного ускорения: $a^{\tau}_{BA} = 0{,}46$ см/с^2. Угловое ускорение стержня AB $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a^{\tau}_{BA}}{AB} = 1{,}15$ рад/с^2. Направление углового ускорения ε_{AB} звена AB определяется направлением вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ касательного ускорения точки B при вращении звена вокруг полюса A (см. рис. 2.28).

Ускорение поршня D равно ускорению точки B: $a_D = a_B = 0{,}38$ см/с^2.

Задача 34. Колесо 1 радиуса $r_1 = 0{,}6$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути и приводит в движение шатун 2, соединённый шарнирно с колесом в точке B на его ободе. На другом конце шатуна в точке C к нему присоединён ползун, перемещающийся горизонтально (рис. 2.29).

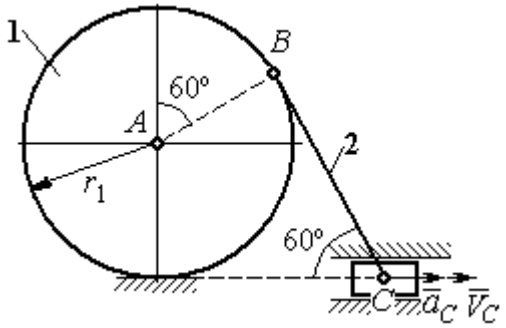


Рис. 2.29. Механизм, связывающий качение колеса с поступательным движением ползуна

В положении механизма, показанном на рис. 2.29, найти ускорение центра A колеса 1, его угловое ускорение, а также угловое ускорение шатуна 2, если заданы скорость и ускорение ползуна C: $V_C = 9$ м/с; $a_C = 4$ м/с^2.

Решение

При качении диска 1 по неподвижной поверхности точка P_1 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей диска. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B. Восстановим перпендикуляры к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$. Их пересечение в точке P_2 определяет положение мгновенного центра скоростей шатуна 2 (рис. 2.30).

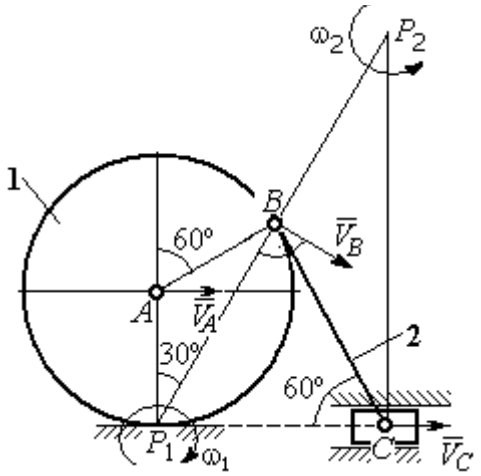


Рис. 2.30. Расчётная схема механизма для определения скоростей точек

Вычислим необходимые расстояния.

Расстояние P_1B (см. рис. 2.30) найдём из треугольника P_1AB по теореме косинусов: $P_1B = r_1\sqrt{3} = 1{,}04$ м. Из построения мгновенных центров скоростей P_1 и P_2 следует: $P_1B = BP_2 = BC$. Расстояние P_2C определяется из треугольника P_1P_2C: $P_2C = P_1P_2 \cdot \cos 30^\circ = 1{,}8$ м.

Угловая скорость шатуна 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{P_2C}$ = 5рад/с. Направление угловой скорости ω_2 определяется направлением скорости $\vec{V}_C$.

Скорость точки *B* найдём по формуле $V_B = \omega_2 \cdot P_2B$ = 5,2 м/с.

Угловая скорость диска 1 $\omega_1 = \dfrac{V_B}{P_1B}$ = 5 рад/с. Скорость центра колеса 1 $V_A = \omega_1 \cdot P_1A$ = 3 м/с.

Найдём ускорение точки *A*.

Примем точку *B* за полюс и выразим ускорение точки *A* через полюс *B*: $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса *B*; $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$, $\vec{a}^{\,n}_{AB}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *A* при вращении диска 1 вокруг полюса *B* (рис. 2.31). Направления ускорения точки $\vec{a}_A$ и касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{AB}$ точки *A* выбраны в предположении ускоренного движения диска.

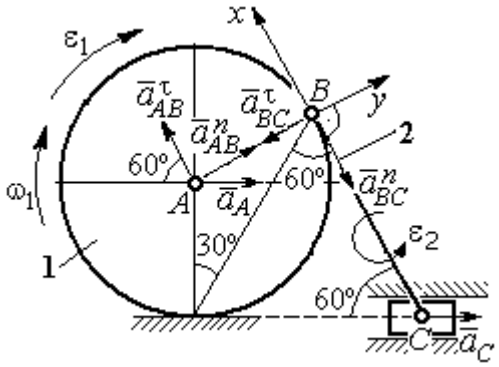


Рис. 2.31. Расчётная схема механизма для определения ускорений точек

Ускорение полюса *B* выразим через полюс *C*: $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение полюса *C*; $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$, $\vec{a}^{\,n}_{BC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки *B* при вращении шатуна 2 вокруг полюса *C*. Направление касательной составляющей ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{BC}$ точки *B* выбрано в направлении вращения шатуна 2 (см. рис. 2.30) исходя из предположения его ускоренного движения. В результате ускорение точки *A* выражается векторной суммой:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\,\tau}_{AB} + \vec{a}^{\,n}_{AB} + \vec{a}^{\,\tau}_{BC} + \vec{a}^{\,n}_{BC} + \vec{a}_C.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.31.

Заметим, что в любой момент времени движения колеса 1 расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей колеса P_1 остаётся постоянным, равным радиусу колеса. Дифференцируем выражение $V_A = \omega_1 \cdot P_1A = \omega_1 \cdot r_1$. Получим $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} r_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1$, откуда с учётом $\frac{dV_A}{dt} = a_A$ (прямолинейное движение точки A) угловое ускорение диска 1 $\varepsilon_1 = \frac{a_A}{r_1}$. В результате, касательное ускорение a^{τ}_{AB} точки A при вращении диска 1 вокруг полюса B $a^{\tau}_{AB} = \varepsilon_1 \cdot AB = a_A$.

Найдём модули векторов ускорений:

$$a^n_{AB} = \omega_1^2 \cdot AB = 15 \text{ м/с}^2;\ a^n_{BC} = \omega_2^2 \cdot BC = 26 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение $a^{\tau}_{BC} = \varepsilon_2 \cdot BC$ остаётся неизвестным. Применить здесь способ дифференцирования выражения $V_C = \omega_2 \cdot P_2C$ для определения углового ускорения ε_2 невозможно, так как расстояние P_2C от мгновенного центра скоростей P_2 шатуна 2 до точки C меняется во время движения механизма неизвестным образом.

Спроектируем векторное равенство ускорения точки A на оси x, y, выбранные, как показано на рис. 2.31. Получим систему уравнений:

$$\text{проекция на ось } x\text{: } -a_A\cos60^\circ = a^{\tau}_{AB} - a^n_{BC} - a_C\cos60^\circ;$$

$$\text{проекция на ось } y\text{: } a_A\cos30^\circ = a^n_{AB} - a^{\tau}_{BC} + a_C\cos30^\circ.$$

Из первого уравнения с учётом того, что $a^{\tau}_{AB} = a_A$, найдём ускорение точки A: a_A = 18,67 м/с^2. Положительное значение ускорения точки A означает, что вектор $\vec{a}_A$ направлен так, как показано на рис. 2.31, – в сторону направления вектора скорости $\vec{V}_A$. Из этого следует, что диск 1 движется ускоренно и угловое ускорение направлено в сторону его угловой скорости.

Из второго уравнения получим: $a_{BC}^{\tau} = 2{,}29$ м/с^2. Угловое ускорение шатуна 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{\left|a_{BC}^{\tau}\right|}{BC} = 2{,}2$ рад/с^2. Из того, что касательное ускорение a_{BC}^{τ} положительно, следует, что направление вектора $\vec{a}_{BC}^{\tau}$ совпадает с направлением, указанным на рис. 2.31. Это, в свою очередь, означает, что в данном положении механизма угловое ускорение шатуна 2 направлено так, как показано на рис. 2.31, – по направлению его угловой скорости, то есть шатун 2 вращается ускоренно.

Задача 35. По неподвижной шестерне 1 радиуса r_1 обкатывается шестерня 2 радиуса r_2, насаженная в центре на кривошип OA (рис. 2.32). Кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. На ободе шестерни 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный другим концом с центром C диска 3, катящегося без скольжения вдоль горизонтальной прямой. Радиус диска 3 равен радиусу шестерни 2: $r_3 = r_2$. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.32, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $r_1 = 0{,}2$ м, $r_2 = 0{,}4$ м, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2. Длина стержня $BC = 1$ м.

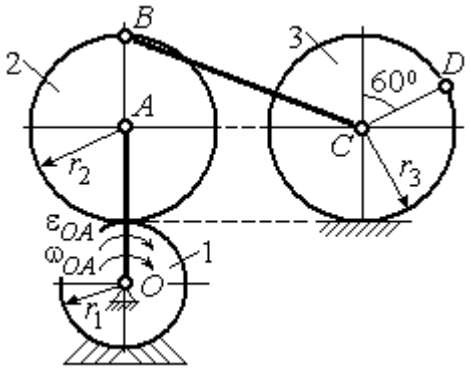


Рис. 2.32. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость его точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2{,}4$ м/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону его вращения (рис. 2.33).

При качении подвижной шестерни 2 по неподвижной 1, точка их соприкосновения P_2 является мгновенным центром скоростей шестерни 2. Угловая скорость шестерни 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} =$ 6 рад/с. Скорость точки B шестерни 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2 =$ 4,8 м/с.

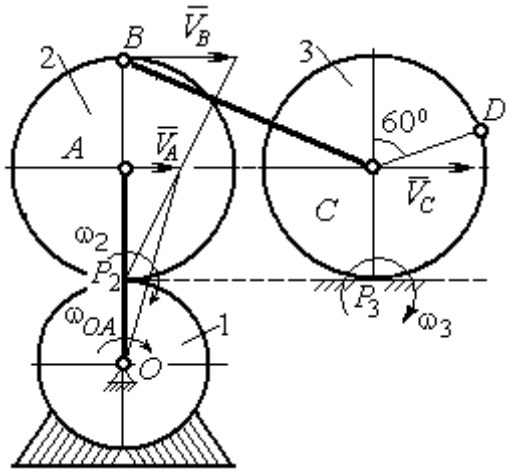


Рис. 2.33. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (или бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю и стержень совершает мгновенное поступательное движение. При таком движении мгновенные скорости всех точек стержня BC одинаковы по величине и направлению. Таким образом, $\omega_{BC} = 0$; $V_C = V_B =$ 4,8 м/с.

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания диска с поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} =$ 12 рад/с. Направление угловой скорости ω_3 определяется направлением вектора $\vec{V}_C$.

Найдём ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма.

Выразим ускорение $\vec{a}_C$ точки C, направленное вдоль линии движения центра колеса 3, через полюс B. Ускорение представляется векторной суммой: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – вектор ускорения полюса B; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении

стержня BC вокруг полюса B. Вектор $\vec{a}^{n}_{CB}$ направлен вдоль стержня от точки C к полюсу B, вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ перпендикулярен стержню BC. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ выбрано по предполагаемому угловому ускорению стержня BC, показанному на рис. 2.34 дуговой стрелкой ε_{CB}.

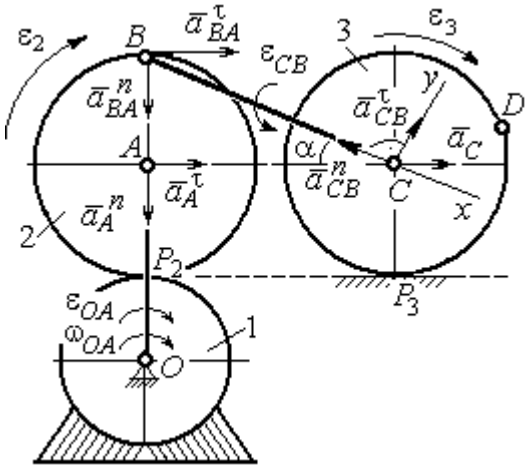


Рис. 2.34. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

Рассмотрим плоскопараллельное движение шестерни 2 и выразим ускорение точки B через полюс A в виде векторного равенства: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении шестерни 2 вокруг полюса A. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса шестерни от точки B к полюсу A, вектор $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярен линии BA. Направление вектора $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ соответствует ускоренному вращению шестерни 2.

Рассмотрим вращение кривошипа OA. Вектор ускорения точки A кривошипа при вращении его вокруг неподвижной оси O представляется в виде суммы: $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A}$, где $\vec{a}^{n}_{A}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A}$ – вектора нормальной и касательной составляющих ускорения точки A. Вектор $\vec{a}^{n}_{A}$ направлен вдоль кривошипа по направлению к оси вращения, вектор $\vec{a}^{\tau}_{A}$ перпендикулярен кривошипу и направлен в сторону углового ускорения ε_{OA} вращения кривошипа.

В результате для определения ускорения точки C имеем векторное равенство:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{CB} + \vec{a}^{\tau}_{CB}.$$

Направления всех векторов ускорений показаны на рис. 2.34.

Вычислим модули векторов, составляющих векторную сумму:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 9{,}6 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1{,}2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = 14{,}4 \text{ м/с}^2; \quad a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = 0.$$

Заметим, что во время движения шестерни 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным r_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 r_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} r_2$. При криволинейном движении точки A производная от скорости равна касательному ускорению: $\frac{dV_A}{dt} = a_A^\tau$. С учётом, что $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$, получим: $a_A^\tau = \varepsilon_2 r_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r_2} = 3$ рад/с^2 и $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 1{,}2$ м/с^2.

Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.34, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроектируем на них векторное равенство ускорения точки C. Получим систему уравнений:

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha - a_{CB}^n;$$

$$a_C \sin\alpha = -a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha - a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC, $\sin\alpha = \frac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$.

Находим из первого уравнения ускорение точки C: $a_C = 12{,}83$ м/с^2, из второго – касательное ускорение точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B: $a_{CB}^\tau = 33{,}95$ м/с^2. Величина углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \frac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 33{,}95$ рад/с^2. Положительное значение a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ направлен так, как показано на рис. 2.34. Тогда и

направление углового ускорения ε_{CB} стержня BC совпадает с направлением, показанным дуговой стрелкой на рис. 2.34.

При качении диска 3 точка C движется по прямой и расстояние CP_3 остается постоянным, равным радиусу диска 3. В этом случае равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 r_3$ можно продифференцировать по времени. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} r_3$. Так как движение точки C является прямолинейным, производная от скорости точки C равна ускорению этой точки: $\frac{dV_C}{dt} = a_C$. Тогда с учётом $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ имеем равенство $a_C = \varepsilon_3 r_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{r_3} = 32{,}07$ рад/с^2.

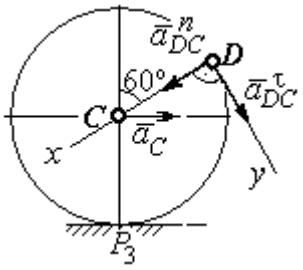


Рис.2.35. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Выразим ускорение точки D через полюс C, ускорение которого известно и по величине, и по направлению: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{DC} + \vec{a}^\tau_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C; $\vec{a}^n_{DC}$, $\vec{a}^\tau_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Модули ускорений

$$a_C = 12{,}83 \text{ м/с}^2;\ a^n_{DC} = \omega_3^2 DC = 57{,}6 \text{ м/с}^2;\ a^\tau_{DC} = \varepsilon_3 DC = 12{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.34, и спроектируем векторное равенство ускорения точки D на оси. Получим систему уравнений:

$$a_{Dx} = -a_C \cos 30^\circ + a^n_{DC};\quad a_{Dy} = a_C \cos 60^\circ + a^\tau_{DC}.$$

Подставляя в уравнения проекций значения модулей ускорений, найдём: $a_{Dx} = 46{,}49$ м/с^2; $a_{Dy} = 19{,}25$ м/с^2.

Величина ускорения точки D: $a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 50{,}32$ м/с^2.

Заметим, что для определения ускорения точки D невозможно было сразу использовать приём с последовательным выражением ускорения точки D через

ускорения полюсов C, B и A, так как в полученной в результате проекций системе двух уравнений будет три неизвестных величины - a_{Dx}, a_{Dy} и величина ускорения a_{CB}^{τ}.

Задача 36. Механизм качалки (рис. 2.36) включает в себя кривошип OA, вращающийся вокруг неподвижной оси O, шестерню 1 радиуса r_1, насаженную на кривошип в точке A и обкатывающуюся по неподвижной цилиндрической поверхности, и шатун BC, присоединённый одним концом в точке B к шестерне, а другим – в точке C к коромыслу CO_1. В положении, указанном на рис. 2.36, определить угловую скорость и угловое ускорение коромысла CO_1, если ω_{OA} = 2 рад/с; ε_{OA} = 4 рад/с^2; OA = 0,8 м; r_1 = 0,4 м; AB = 0,2 м; BC = 0,6 м. Для этого же положения определить ускорение точки C.

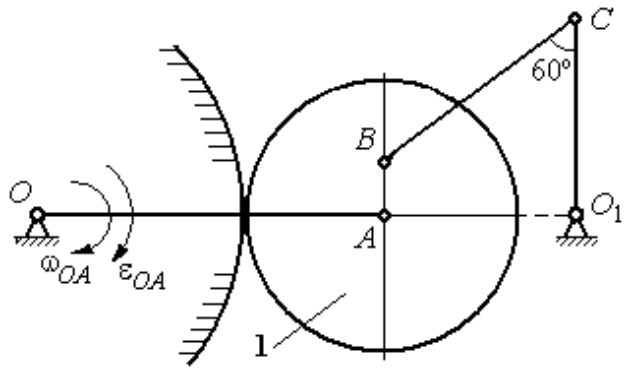


Рис. 2.36. Механизм качалки

Решение

Найдём угловые скорости звеньев механизма.

Скорость точки A кривошипа $V_A = \omega_{OA} \cdot OA$ = 1,6 м/с. Вращаясь, кривошип передаёт движение шестерне 1, которая катится по неподвижной поверхности. Точка касания P_1 шестерни с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей шестерни. Тогда её угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1}$ = 4 рад/с. Направление угловой скорости показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_1.

Расстояние от мгновенного центра скоростей шестерни до её точки B P_1B = 0,45 м. Скорость точки B: $V_B = \omega_1 \cdot P_1B$ = 1,8 м/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии P_1B и направлен в сторону вращения шестерни.

При вращении коромысла CO_1 вокруг неподвижной оси O_1 вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен коромыслу. Точка P_2, лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ – скоростей точек B и C, является мгновенным центром скоростей шатуна BC (рис. 2.37). Расстояние $BK = BC\cos 30^\circ = 0{,}52$ м; $\cos\alpha = \dfrac{AP_1}{BP_1} = 0{,}89$; $P_2B = \dfrac{BK}{\cos\alpha} = 0{,}58$ м. Угловая скорость шатуна $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{BP_2} = 3{,}1$ рад/с. Направление угловой скорости шатуна показано на рис. 2.37 дуговой стрелкой ω_{BC}.

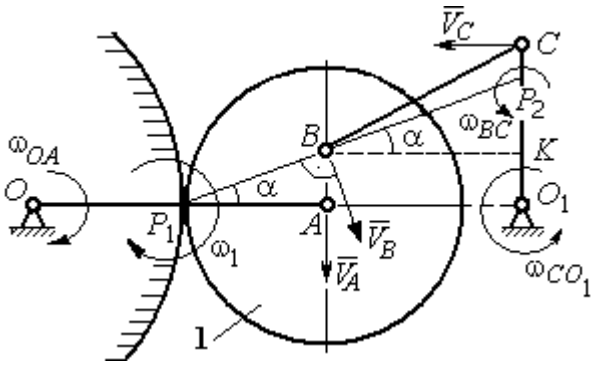


Рис. 2.37. Расчётная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

Расстояние $P_2C = BC \cdot \sin 30^\circ - P_2B \cdot \sin\alpha = 0{,}04$ м. Скорость точки C шатуна BC: $V_C = \omega_{BC} \cdot P_2C = 0{,}12$ м/с. Длина коромысла $CO_1 = CK + KO_1 = 0{,}5$ м, угловая скорость коромысла $\omega_{CO_1} = \dfrac{V_C}{CO_1} = 0{,}24$ рад/с.

Найдём ускорения звеньев механизма.

Считая, что точка C принадлежит шатуну BC, выразим ускорение точки C через полюс B: $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение полюса B; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении шатуна вокруг полюса B.

Полагая, что точка B принадлежит шестерне 1, выразим её ускорение через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A шестерни; $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки B при вращении шестерни вокруг полюса A.

Поскольку точка A принадлежит и кривошипу OA, а точка C – коромыслу CO_1, вращающихся вокруг своих неподвижных осей, вектора ускорений этих точек можно представить в виде сумм векторов:

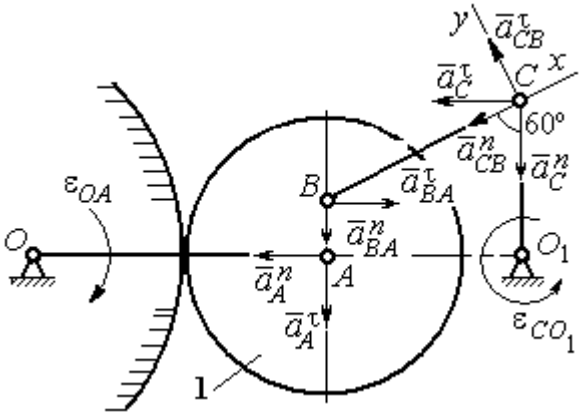


Рис. 2.38. Расчётная схема для определения ускорений точек механизма

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},\ \vec{a}_C = \vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau},$$

где $\vec{a}_A^{\,n}$, $\vec{a}_A^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки A при вращении кривошипа вокруг оси O; $\vec{a}_C^{\,n}$, $\vec{a}_C^{\,\tau}$ – нормальная и касательная составляющие вектора ускорения точки C при вращении коромысла вокруг оси O_1.

В результате подстановок получим полное векторное равенство, связывающее ускорения точек механизма:

$$\vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau} = \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau}.$$

Направления векторов ускорений показаны на рис. 2.38.

Модули векторов ускорений:

$$a_C^n = \omega_{CO_1}^2 \cdot CO_1 = 0{,}03 \text{ м/с}^2;\ \ a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 5{,}77 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3{,}2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot BA = 3{,}2 \text{ м/с}^2;\ \ a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot BA.$$

Для определения ε_1 углового ускорения шестерни 1 продифференцируем равенство $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 r_1$. Получим: $a_A^\tau = \varepsilon_1 r_1$, откуда $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A^\tau}{r_1} = 8$ рад/с^2.

Тогда $a_{BA}^\tau = 1{,}6$ м/с^2.

Неизвестными в векторном равенстве ускорений остаются модули векторов $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ и $\vec{a}^{\tau}_{C}$. Выберем ось x вдоль шатуна BC, как показано на рис. 2.38, и спроектируем на неё полное векторное равенство.

Получим уравнение:

$$-a^{n}_{C}\cos 60^{\circ} - \vec{a}^{\tau}_{C}\cos 30^{\circ} = -a^{n}_{CB} - a^{n}_{BA}\cos 60^{\circ} + a^{\tau}_{BA}\cos 30^{\circ} - a^{n}_{A}\cos 30^{\circ} - a^{\tau}_{A}\cos 60^{\circ},$$

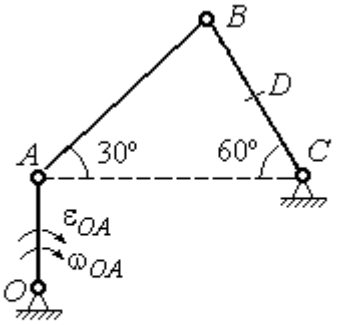
откуда найдём ускорение a^{τ}_{C} = 11,94 м/с^2. Угловое ускорение качалки

$$\varepsilon_{CO_1} = \frac{\left|a^{\tau}_{C}\right|}{CO_1} = 23{,}88 \text{ рад/с}^2.$$

Положительное значение касательного ускорения a^{τ}_{C} свидетельствует о том, что направление вектора ускорения $\vec{a}^{\tau}_{C}$ совпадает с направлением, показанным на рис. 2.38. В эту же сторону направлена и скорость $\vec{V}_C$ точки C (см. рис. 2.37). Следовательно, в данном положении движение качалки ускоренное и угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости.

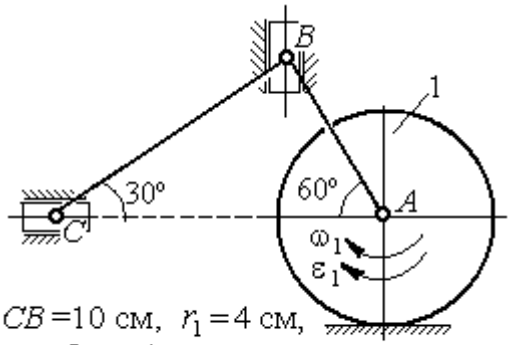
Упражнения

Упражнения 2.9



$OA = 4$ см, $BD = DC = 4$ см,
$\omega_{OA} = 3$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки D

Упражнения 2.10



$CB = 10$ см, $r_1 = 4$ см,
$\omega_1 = 3$ рад/с, $\varepsilon_1 = 2$ рад/с^2.
Найти ускорение точки C

Рис. 2.39. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 2.9, 2.10

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия и определения сложного движения точки

Рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Неподвижная система координат, относительно которой определяются движения точки и тела, называется **основной**. Связанная с телом и движущаяся вместе с ним система координат называется **подвижной.**

Движение точки относительно подвижной системы координат (фактически движение точки относительно тела) называется **относительным**. **Переносным** движением называют движение, которое совершает точка вместе с подвижной системой координат (фактически вместе с телом). Движение точки относительно основной (неподвижной) системы координат называется **абсолютным.**

Скорость точки относительно подвижной системы координат называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Переносной скоростью точки и **переносным ускорением** называют скорость и ускорение той точки тела, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Скорость и ускорение точки относительно основной системы называют **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса:** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ –

вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_{\text{к}}$ – вектор ускорения Кориолиса.

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением: $\vec{a}_{\text{к}} = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_{\text{к}}| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ и вектором относительной скорости точки $\vec{V}_r$ (рис. 3.1).

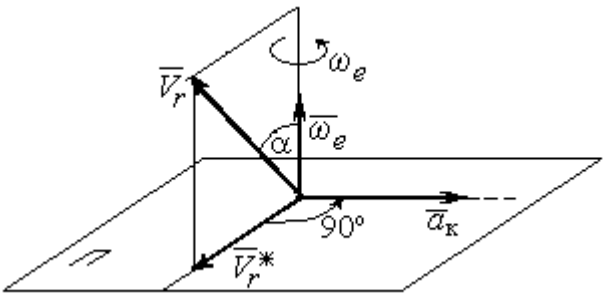


Рис. 3.1. Определение ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

На рис. 3.1 показан способ определения вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем. Построим плоскость *П*, перпендикулярную вектору угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроектируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости *П* вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. При этом модуль ускорения Кориолиса $a_{\text{к}} = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r$.

Примеры решения задач на сложное движение точки

Задача 37. Компрессор с криволинейными каналами (рис. 3.2) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с вокруг оси *O*, перпендикулярной плоскости рисунка. Воздух перемещается по каналу *AB* с постоянной относительной скоростью $V_r = 4$ м/с. Найти ускорение частицы воздуха в начале канала в точке *A* и проекции этого ускорения на оси неподвижной системы координат *xOy*, если радиус $OA = 0{,}5$ м, радиус кривизны канала в точке *A* $\rho = 0{,}8$ м, угол между нормалью *n* к кривой *AB* в точке *A* и радиусом *OA* $\alpha = 30^\circ$.

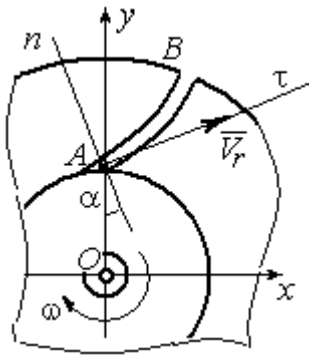


Рис.3.2. Движение воздуха по каналу компрессора

Решение

Переносным движением для частицы воздуха будет вращательное движение компрессора, а скорость точки *A* компрессора, где по условию находится частица воздуха, будет её переносной скоростью: $V_e = \omega \cdot OA = 5$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости частицы перпендикулярен радиусу *OA* и направлен в сторону угловой скорости вращения компрессора (рис. 3.3).

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости частицы воздуха направлен вдоль касательной к кривой *AB* (стенки канала) в точке *A*.

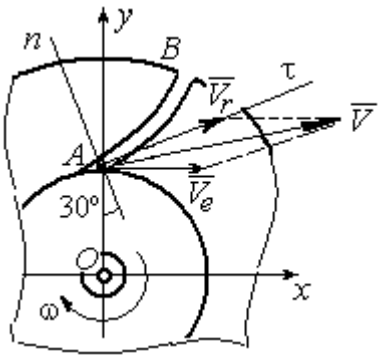


Рис. 3.3. Построение вектора абсолютной скорости частицы

Вектор абсолютной скорости частицы воздуха равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (см. рис. 3.3). Спроектируем это векторное равенство на оси *x*, *y*. Получим систему уравнений:

$$V_x = V_e + V_r \cos 30^\circ = 8{,}46 \text{ м/с}; \; V_y = V_r \cos 60^\circ = 2 \text{ м/с}.$$

Модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 8{,}69$ м/с.

Найдём ускорение частицы воздуха.

Абсолютное ускорение частицы определяется по теореме сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{к}}.$$

В относительном движении частица движется между стенками канала по криволинейной траектории, и её ускорение $\vec{a}_r$ представляется суммой: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих относительного ускорения частицы.

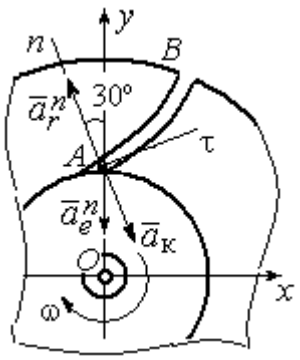


Рис. 3.4. Составляющие ускорения частицы в сложном движении

Переносное ускорение частицы $\vec{a}_e$ есть ускорение точки *A* вращающегося компрессора, которое выражается суммой $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$, где $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$ – вектора нормальной и касательной составляющих переносного ускорения частицы.

В результате абсолютное ускорение частицы воздуха в точке А выражается векторной суммой:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Вычислим модули ускорений:

$$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = 0,\ a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 20 \text{ м/с}^2;\ a_e^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_e^n = \omega^2 r = 50 \text{ м/с}^2;\ a_{\text{к}} = 2\omega V_r = 80 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения Кориолиса определяется простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения. Вектора ускорений показаны на рис. 3.4.

Спроектируем векторное равенство ускорения частицы на оси неподвижной системы координат *xOy*. Получим:

$$a_x = -a_r^n \cos 60^\circ + a_к \cos 60^\circ = 30 \text{ м/с}^2 ;$$

$$a_y = a_r^n \cos 30^\circ - a_e^n - a_к \cos 30^\circ = -101{,}96 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 106{,}28$ м/с^2.

Задача 38. При совмещении работы механизмов подъёма груза и поворота крана (рис. 3.5) груз *A* перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. На участке разгона барабан *B* радиуса $r_1 = 0{,}5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз, вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 3$ рад/с^2, а кран разворачивается вокруг оси O_1O_2 с угловым ускорением $\varepsilon_2 = 0{,}5$ рад/с^2.

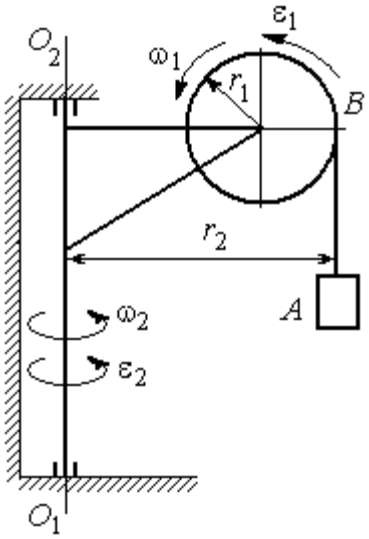


Рис. 3.5. Механизм поворотного крана

Пренебрегая отклонением каната от вертикали, определить скорость и ускорение груза в момент времени $t_1 = 1$ с, если вылет стрелы крана до линии подвеса груза $r_2 = 10$ м.

Решение

Подъём груза *A* на канате является для груза относительным движением, а вращение крана – переносным. Вектор абсолютной скорости груза равен сумме $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где вектора относительной $\vec{V}_r$ и переносной $\vec{V}_e$ скоростей.

При равноускоренном вращении барабана *B* из состояния покоя его угловая скорость $\omega_1 = \varepsilon_1 t$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_1 = 3$ рад/с. Скорость подъёма груза *A* в этот момент $V_r(1) = \omega_1(1) r_1 = 1{,}5$ м/с. Вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ направлен вдоль линии движения груза, в сторону его подъёма (рис. 3.6).

Угловая скорость крана при постоянном угловом ускорении $\omega_2 = \varepsilon_2 t$. При $t_1 = 1$ с $\omega_2 = 0{,}5$ рад/с. Переносная скорость груза A равна скорости груза, движущегося вместе со стрелой крана по окружности радиуса r_2: $V_e = \omega_2 r_2 = 5$ м/с. Вектор переносной скорости груза $\vec{V}_e$ направлен по касательной к траектории переносного движения груза в сторону угловой скорости вращения крана (см. рис. 3.6).

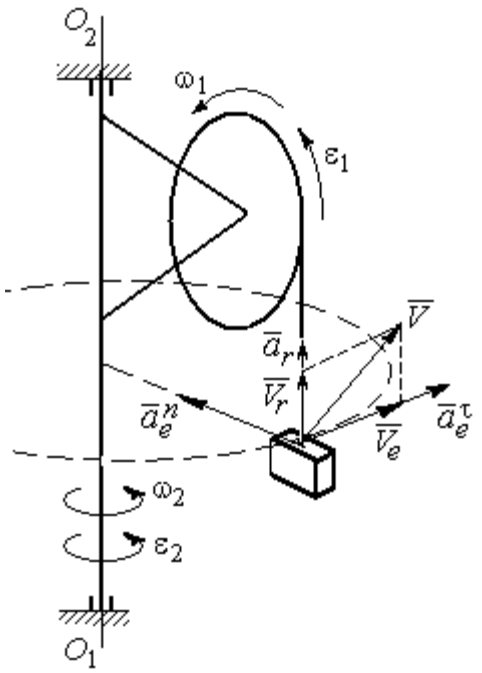


Рис. 3.6. Расчётная схема для определения скорости и ускорения груза на поворотном кране

Так как вектора относительной и переносной скоростей груза взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 5{,}22$ м/с.

Найдём абсолютное ускорение груза.

Теорема сложения ускорений имеет вид векторной суммы: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_\text{к} = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_\text{к}$, где $\vec{a}_r^{\,n}$, $\vec{a}_r^{\,\tau}$, $\vec{a}_e^{\,n}$, $\vec{a}_e^{\,\tau}$, $\vec{a}_\text{к}$ – вектора нормального и касательного ускорений груза в относительном и переносном движениях и ускорение Кориолиса. Найдём модули векторов ускорений.

Нормальное относительное ускорение a_r^n груза, движущегося прямолинейно, равно нулю: $a_r^n = 0$, а касательное a_r^τ равно по величине касательному ускорению точки на поверхности барабана: $a_r^\tau = \varepsilon_1 r_1 = 1{,}5$ м/с^2. Направление вектора $\vec{a}_r^{\,\tau}$ относительного касательного ускорения груза определяется направлением углового ускорения барабана.

Переносные нормальное a_e^n и касательное a_e^τ ускорения груза: $a_e^n = \omega_2^2 r_2$ = 2,5 м/с^2; $a_e^\tau = \varepsilon_2 r_2$ = 5 м/с^2. Вектор касательного ускорения $\vec{a}_e^\tau$ направлен в сторону углового ускорения вращения крана.

Ускорение Кориолиса $a_к$ равно нулю, так как вектор $\vec{V}_r$ параллелен вектору $\vec{\omega}_2$: $a_к = 0$.

Направления векторов ускорений, модули которых отличны от нуля, показаны на рис. 3.6. В результате вектор абсолютного ускорения груза представлен в виде разложения на три взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^\tau$, поэтому модуль абсолютного ускорения груза $a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (\vec{a}_e^\tau)^2 + (\vec{a}_r)^2}$ = 5,79 м/с^2.

Задача 39. Фигура, состоящая из половины диска и построенного на его диаметре равнобедренного треугольника (рис. 3.7), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника, по закону $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад. Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ.

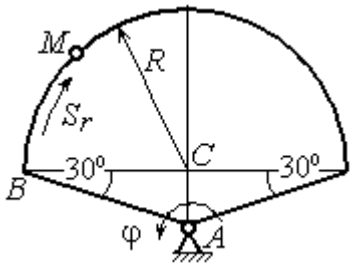


Рис. 3.7. Схема сложного движения точки

По ободу диска из начального положения B движется точка M. Уравнение движения точки: $\breve{BM} = S_r = 9\pi t^2$, см.. Положительное направление отсчёта дуги BM показано дуговой стрелкой S_r (см. рис. 3.7). Радиус диска R = 9 см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1 с.

Решение

Переносным движением точки M является вращение фигуры вокруг оси A, относительным – её движение по окружности обода диска.

Положение точки M на окружности определяется центральным углом: $\alpha = \dfrac{S_r}{R}$, где S_r – длина дуги окружности, пройденная точкой. В момент времени $t_1 = 1$ с $S_r = 9\pi$ см и $\alpha = \pi$. Расчётное положение точки M на рис. 3.8 обозначено M_1.

Угловая скорость вращения фигуры равна модулю производной $\omega_e = |\dot{\varphi}_e| = |5 - 4t|$. При $t_1 = 1$ с $\omega_e(1) = 1$ рад/с. Направление угловой скорости определяется знаком производной $\dot{\varphi}_e$. Положительная на данный момент времени величина производной ($\dot{\varphi}_e = 1$) показывает, что вращение фигуры происходит в положительном направлении отсчёта угла φ_e и отмечено на рис. 3.8 дуговой стрелкой ω_e.

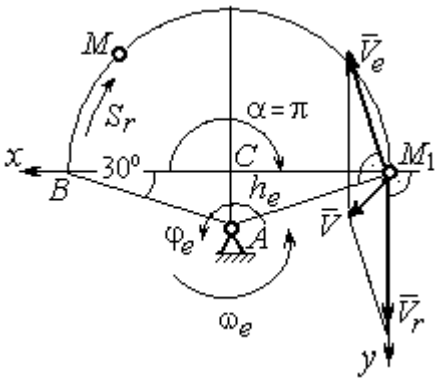


Рис. 3.8. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки

Переносная скорость точки V_e – это скорость расчётного положения точки M вращающейся фигуры: $V_e = \omega_e h_e = = \omega_e AM_1 = \dfrac{\omega_e R}{\cos 30^\circ} = 10{,}39$ см/с. Вектор переносной скорости точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен отрезку AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.8).

Скорость точки в относительном движении определяется как модуль производной: $V_r = |\dot{S}_r| = |18\pi t|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 56{,}5$ см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r = 18\pi > 0$ указывает, что в этот момент времени относительное движение точки происходит в положительном направлении отсчёта дуги окружности, по которой движется точка. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки перпендикулярен отрезку CM_1 и направлен в сторону её движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти абсолютную скорость

точки, выберем оси координат M_1x, M_1y, как показано на рис. 3.8, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси:

$$V_x = V_e\cos 60^\circ = 5{,}2 \text{ см/с}, \; V_y = -V_e\cos 30^\circ + V_r = 47{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 47{,}8$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяется по теореме сложения ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_\text{к}$.

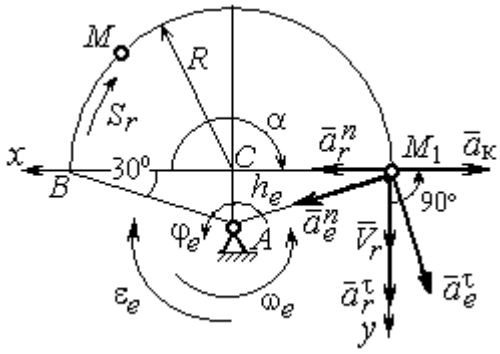


Рис. 3.9. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Переносное ускорение точки представляется в виде суммы: $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n}$, где $\vec{a}_e^{\,\tau}$ и $\vec{a}_e^{\,n}$ – переносные касательное и нормальное ускорения. В относительном движении точки (по дуге окружности) ускорение также может быть разложено на две составляющие – относительные касательное и нормальное ускорения: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$. В результате теорема о сложении ускорений приобретает вид: $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_\text{к}$.

Вычислим модули и направления векторов ускорений в расчётном положении точки M_1.

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$, где $\ddot{S}_r = 18\pi = 56{,}5$ см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,\tau}$ направлен по касательной в сторону положительного отсчёта траектории относительного движения. Относительное нормальное ускорение точки a_r^n вычисляется по формуле: $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно 355,3 см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^{\,n}$ направлен по радиусу диска к центру C (рис. 3.9).

Угловое ускорение фигуры в момент времени $t_1 = 1$ с, $\varepsilon_e = |\ddot{\varphi}_e| = 4$ рад/с^2. Поскольку значение второй производной угла поворота отрицательное ($\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2), то угловое ускорение направлено в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота фигуры, как показано на рис. 3.9 дуговой стрелкой ε_e. Модуль переносного касательного ускорения a_e^τ определяется по формуле $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = \varepsilon_e \cdot AM_1$ и в момент времени $t_1 = 1$ с равен 41,6 см/с^2. Вектор переносного касательного ускорения точки $\vec{a}_e^\tau$ перпендикулярен AM_1 и направлен в сторону углового ускорения фигуры ε_e (см. рис. 3.9). Переносное нормальное ускорение вычисляется по формуле $a_e^n = \omega_e^2 h_e = \omega_e^2 \cdot AM_1$ и на момент времени $t_1 = 1$ с: $a_e^n = 10{,}4$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен вдоль отрезка M_1A к оси вращения тела (см. рис. 3.9).

Модуль ускорения Кориолиса в момент времени $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega V_r =$ $=113{,}1$ см/с^2. По условию задачи вектор $\vec{V}_r$ скорости относительного движения точки перпендикулярен вектору $\vec{\omega}_e$ угловой скорости переносного движения. В этом случае для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения (см. рис. 3.9).

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси M_1x и M_1y, как показано на рис. 3.9, и спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на эти оси. Получим:

$$a_x = -a_e^\tau \cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 230{,}4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^\tau = 97{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 250{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Задача 40. Диск (рис. 3.10) вращается вокруг оси O_1O_2, проходящей вдоль вертикального диаметра, с угловой скоростью $\omega = 2t^2 + 4\cos\pi t$ рад/с. Положительное направление отсчёта угла поворота диска отмечено на схеме дуговой стрелкой φ. Вдоль другого диаметра диска, наклоненного под углом 30º к вертикальному, движется точка M по закону $CM = S_r = (4t-1)^2 - 1$ см. Расстояние отсчитывается от точки C на краю диска. Положительное направление движения точки M показано стрелкой S_r. Радиус диска $R = 4$ см. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

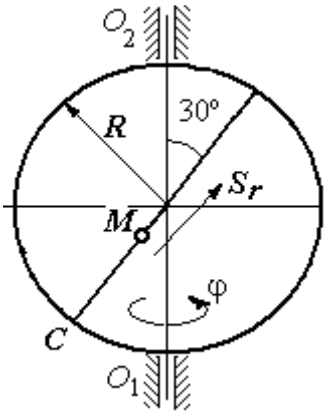


Рис. 3.10. Схема сложного движения точки

Решение

Переносным движением точки M является вращение диска вокруг вертикального диаметра, относительным – её прямолинейное движение вдоль наклонного диаметра диска.

Расстояние S_r, пройденное точкой, к моменту времени $t_1 = 1$ с равно 8 см. При радиусе диска $R = 4$ см точка M в данный момент времени находится на противоположном от точки C конце диаметра. На рис. 3.11 это положение обозначено буквой M_1.

Угловая скорость диска равна модулю производной: $\omega = |\dot{\varphi}| = |2 + 4\cos\pi|$ и при $t_1 = 1$ с $\omega = 2$ рад/с. Направление угловой скорости определяется по знаку производной $\dot{\varphi}$. В данном случае производная имеет отрицательное значение ($\dot{\varphi} = -2$ рад/с). Это означает, что вращение диска происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта угла поворота. Направление угловой скорости диска в данный момент времени отмечено на рис. 3.11 дуговой стрелкой ω.

Переносная скорость точки V_e – это скорость точки M_1 на вращающемся диске: $V_e = \omega h_e = \omega \cdot KM_1$, где $KM_1 = h_e$ – расстояние от оси вращения диска до точки M_1. Очевидно, $KM_1 = 0{,}5R = 2$ см. При $t_1 = 1$ с величина переносной скорости $V_e = 4$ см/с. Вектор переносной скорости $\vec{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ и направлен в сторону вращения диска (рис. 3.11, *a*).

(На рис. 3.11, *a* символ ⊙ рядом с вектором означает, что данный вектор направлен перпендикулярно плоскости рисунка «к нам», символ ⊕ – «от нас».)

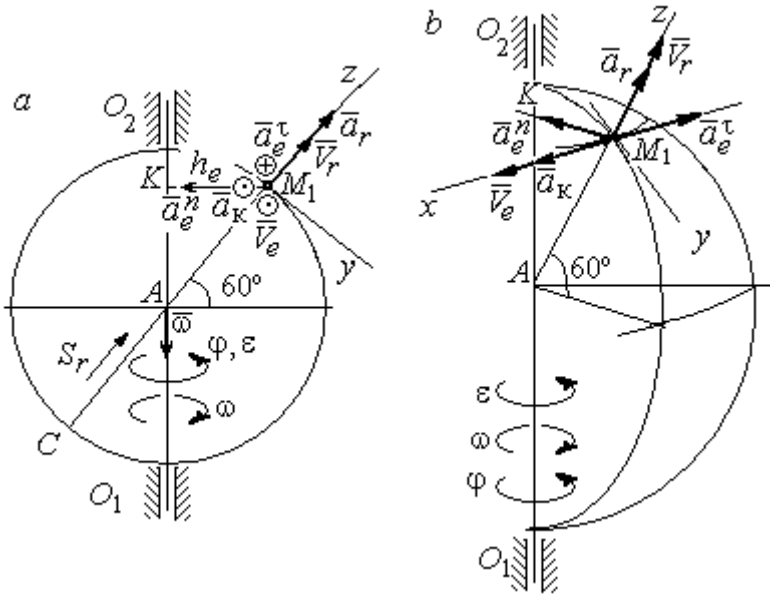


Рис. 3.11. Расчётная схема определения абсолютной скорости и ускорения точки:
a – плоская модель движения;
b – пространственная модель движения

Относительная скорость точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|8(4t - 1)\right|$. При $t_1 = 1$ с $V_r = 24$ см/с. Положительное значение самой производной $\dot{S}_r$ указывает, что относительное движение точки в данный момент времени происходит в положительном направлении. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен вдоль диаметра диска CM_1 в сторону движения.

Абсолютная скорость точки равна сумме векторов переносной и относительной скоростей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Так как векторы $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости $V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 24{,}33$ см/с. Вектор абсолютной скорости на рис. 3.11 не показан.

Абсолютное ускорение точки определяется векторной суммой, которая при прямолинейном относительном и вращательном переносном движениях представляется в виде: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}$.

Относительное ускорение точки $a_r = \left|\ddot{S}_r\right| = 32$ см/с^2. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r$ в точке M_1 направлен по линии движения точки в сторону положительного направления (см. рис. 3.11).

Угловое ускорение диска $\varepsilon = \left|\dot{\omega}\right| = \left|4t - 4\pi\sin\pi t\right|$. В момент времени $t_1 = 1$ с $\varepsilon = 4$ рад/с^2. Положительное значение производной в данный момент времени ($\dot{\omega} = 4$ рад/с^2) означает, что угловое ускорение ε направлено в сторону положительного направления отсчёта угла поворота диска. Направление углового ускорения показано на рис. 3.11 дуговой стрелкой ε. Модуль переносного касательного ускорения a_e^{τ} определяется по формуле $a_e^{\tau} = \varepsilon h_e$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{\tau} = 8$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_e^{\tau}$ перпендикулярен плоскости диска $O_1M_1O_2$ в точке M_1 и направлен в сторону углового ускорения (противоположно вектору скорости).

Переносное нормальное ускорение a_e^{n} рассчитывается по формуле $a_e^{n} = \omega^2 h_e = \omega^2 \cdot KM_1$, и при $t_1 = 1$ с $a_e^{n} = 8$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^{n}$ направлен вдоль отрезка M_1K к оси вращения диска (см. рис. 3.11).

Вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ составляет с вектором угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}$ угол 150º. Модуль ускорения Кориолиса на момент времени $t_1 = 1$ с $a_{\text{к}} = 2\left|\omega\right\|V_r\left|\sin 150^\circ = 48\right.$ см/с^2. Направление вектора ускорения Кориолиса определяем по правилу Жуковского. Так, вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ проектируем на плоскость, перпенди-

кулярную вектору $\vec{\omega}$ (т. е. на плоскость, перпендикулярную оси вращения тела). На рис 3.11, *а* это будет проекция на линию KM_1. Далее следует повернуть вектор проекции относительной скорости вокруг оси вращения на 90° в сторону угловой скорости вращения диска. На рис 1.11, *а* вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости рисунка в точке M_1 и направлен «на нас».

Для определения абсолютного ускорения точки выберем оси координат M_1x, M_1y и M_1z, как показано на рис. 3.11 (на рис. 3.11, *а* ось M_1x направлена перпендикулярно рисунку «к нам» и на рисунке не показана). Спроектируем обе части векторного равенства теоремы сложения ускорений на оси

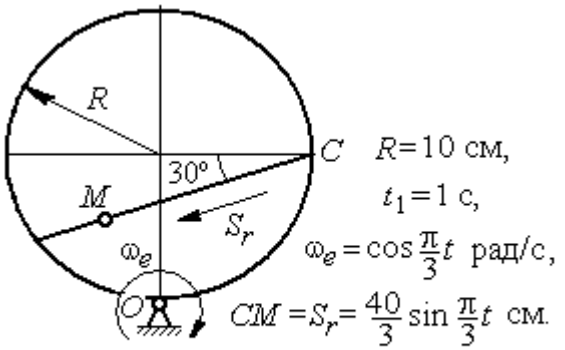
$$a_x = -a_e^{\tau} + a_{\text{к}} = 40 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -a_e^n \cos 30^\circ = 6{,}93 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_r - a_e^n \cos 60^\circ = 28 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 49{,}32$ см/с^2.

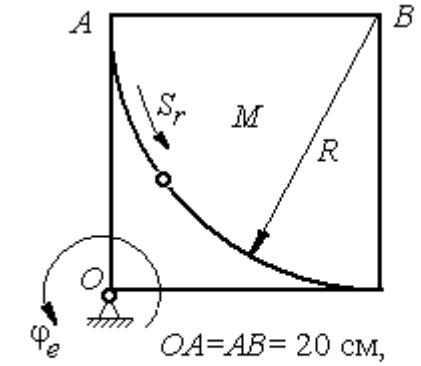
Упражнения

Упражнение 3.1



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1$

Упражнение 3.2



Найти скорость и ускорение точки M в момент $t = t_1 = 1$ с

Рис. 3.12. Задания для самостоятельного решения. Упражнения 3.1, 3.2

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение материальной точки под действием системы сил $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ldots,\ \vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}\ ,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}\ ,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}\ .$$

Обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнения движения можно записать в виде:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\ ;\ m\ddot{y} = \sum F_{ky}\ ;\ m\ddot{z} = \sum F_{kz}\ ,$$

где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат.

Для удобства интегрирования дифференциальные уравнения движения иногда представляют в виде:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}\ ;\ \ m\frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky}\ ;\ \ m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}\ ,$$

где $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат.

В естественной системе координат движение материальной точки описывается уравнениями в естественной форме:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}\ ;\ \ m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}\ ;\ 0 = \sum F_{kb}\ ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории; τ, n, b – оси естественного трехгранника – касательная, нормаль и бинормаль.

В общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени, положения и скорости точки. Интегрирование дифференциальных

уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

Примеры решения задач на интегрирование уравнений движения

Задача 41. При обогащении по трению разделение частиц производится следующим образом. Барабанный питатель (рис. 4.1) сообщает частице в точке A сортировочного стола AB начальную скорость V_0, направленную вдоль поверхности стола, наклоненного под углом α к горизонту. Нижний край стола в точке B поднят на высоту h над уровнем пола. Частица скользит по столу, испытывая силу трения скольжения с коэффициентом трения f. Дойдя до края стола в точке B, частица отрывается от него и совершает свободное падение с высоты h. На каком расстоянии $CK = \ell$ на полу нужно установить стенку приёмного устройства, чтобы частицы с коэффициентом трения меньше заданного $f < f_1$ перелетали за точку C и попадали в приёмник, а с большим коэффициентом $f > f_1$ – не долетали до него.

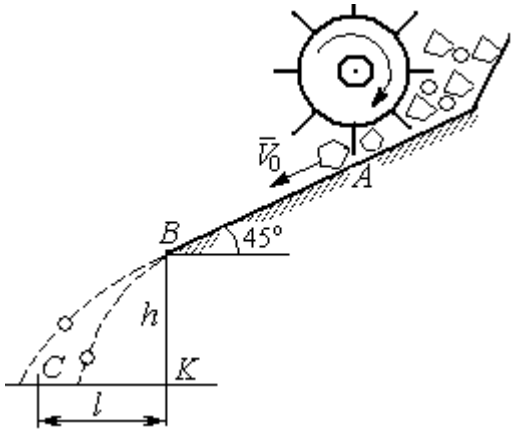


Рис. 4.1. Разделение частиц по трению

Начальная скорость частицы $V_0 = 1$ м/с, длина сортировочного стола $AB = S = 1{,}2$ м, угол наклона $\alpha = 45°$, высота точки отрыва $BK = h = 1{,}5$ м, заданный коэффициент трения для разделения частиц $f_1 = 0{,}4$.

Решение

Из условия задачи следует, что частица с коэффициентом трения, равным заданному, $f = f_1$ в конце своего движения (скольжение по столу + свободное падение) должна попасть ровно в точку C (см. рис. 4.1).

Рассмотрим первый участок движения такой частицы – прямолинейное движение по шероховатой поверхности наклонного стола. На частицу действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Выберем систему координат *xAy*, направив ось *x* вдоль линии движения, а ось *y* – перпендикулярно ей (рис. 4.2). Движение частицы описывается уравнениями:

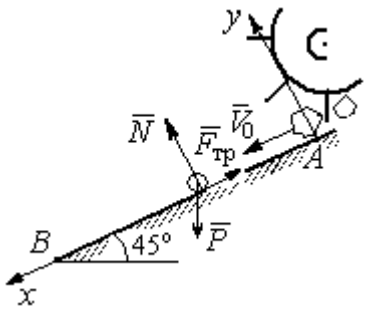


Рис. 4.2. Движение частицы по наклонной плоскости

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45^\circ - F_{\text{тр}};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P\cos 45^\circ + N.$$

Поскольку вдоль оси *y* частица не перемещается, то $\ddot{y} = 0$. Тогда второе уравнение движения представляется в виде: $-P\cos 45^\circ + N = 0$, откуда реакция опоры частицы $N = mg\cos 45^\circ$. Сила трения, которую испытывает частица, двигаясь по сортировочному столу: $F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 45^\circ$, где f – коэффициент трения.

Подставляя в уравнение движения частицы, выражение силы трения и полагая ускорение $\ddot{x} = \dfrac{dV_x}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV_x}{dt} = g(1-f)\cos 45^\circ \text{ или при } f = f_1 = 0{,}4: \ \frac{dV_x}{dt} = 4{,}18.$$

После интегрирования найдём скорость и закон движения частицы как функции времени: $V_x = 4{,}18t + C_1$; $x = 2{,}09t^2 + C_1 t + C_2$.

Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий движения. Подставляя начальные условия $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_x(0) = V_0$ в уравнение движения частицы, найдём $C_2 = 0$, $C_1 = V_0$.

Окончательно движение частицы на прямолинейном участке *AB* сортировочного стола описывается системой уравнений: $V_x = 4{,}18t + 1$; $x = 2{,}09t^2 + t$.

Допустим частица достигает края стола B в момент времени $t = t_B$. Её координата равна длине сортировочного стола: $x(t_B) = S$, а скорость равна скорости отрыва её от стола: $V_x(t_B) = V_B$. Подставим эти условия в уравнения движения, получим систему: $V_B = 4{,}18t_B + 1$, $S = 2{,}09t_B^2 + t_B$, откуда скорость частицы в точке отрыва её от стола $V_B = \sqrt{1 + 8{,}36S}$. При длине стола S = 1,2 м скорость отрыва V_B = 3,32 м/с.

Рассмотрим участок BC свободного падения частицы, брошенной с высоты h с начальной скоростью V_B, направленной под углом 45° к горизонту (рис. 4.3). В полёте на частицу действует только сила тяжести $\vec{P}$. Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом координат в точке K (см. рис. 4.3). Дифференциальные уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = -P = -mg \text{ или } \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g.$$

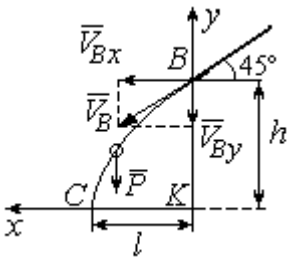


Рис. 4.3. Свободное падение частицы

Интегрируя первое уравнение, получим, что движение частицы вдоль оси x описывается уравнениями $\dot{x} = C_3;\ x = C_3t + C_4$. Константы интегрирования C_3 и C_4. определяются из начальных условий движения: при t = 0 , $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_{Bx}$, где V_{Bx} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось x, $V_{Bx} = V_B\cos45^\circ$ = 2,35 м/с. После подстановки начальных условий в уравнение движения частицы получим: C_4 = 0, C_3 = 2,35. В результате, движение частицы вдоль оси x при её свободном падении описывается уравнением $x = 2{,}35t$.

Проинтегрируем уравнение движения частицы в направлении оси y. Получим: $\dot{y} = -gt + C_5$ и $y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_5t + C_6$. Начальные условия движения частицы вдоль оси y: при t = 0 , $y(0) = h$ = 1,5 м, $\dot{y}(0) = V_{By} = -V_B\cos45^\circ = -2{,}35$ м/с, где V_{By} – проекция вектора скорости $\overline{V}_B$ на ось y. Подставляя начальные

условия в уравнение движения, найдём: $C_6 = h$; $C_5 = V_{By} = -2{,}35$. Таким образом, движение частицы вдоль оси y при её свободном падении описывается уравнением $y = -4{,}91t^2 - 2{,}35t + 1{,}5$.

В момент $t = t_{\text{п}}$ падения частицы на пол её вертикальная координата обращается в нуль: $y = 0$, а горизонтальная – равна дальности полёта: $x = \ell$. Подставляя эти условия в уравнения движения частицы, получим систему:

$$\ell = 2{,}35t_{\text{п}},\ 0 = -4{,}91t_{\text{п}}^2 - 2{,}35t_{\text{п}} + 1{,}5.$$

Исключая в системе время $t_{\text{п}}$, выразим уравнение для определения дальности горизонтального полёта: $\ell^2 + 1{,}12\ell - 1{,}68 = 0$. Отсюда находим: $\ell = 0{,}85$ м.

Таким образом, частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}4$ в конце своего движения падают на горизонтальную поверхность на расстоянии 0,85 м от края стола. Очевидно, именно здесь необходимо установить разделительную стенку приёмного устройства. Частицы с меньшим коэффициентом трения ($f < 0{,}4$) будут улетать за стенку, а при большем ($f > 0{,}4$) – недолетать. К примеру, длина горизонтального полёта частицы с коэффициентом трения $f = 0{,}3$ составляет 0,89 м, а при $f = 0{,}5$ равна 0,61 м.

Задача 42. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10 - kt$ Н, где k – коэффициент пропорциональности; $k = \text{const}$; t – время в секундах. Определить величину коэффициента k, при котором скорость точки за первую секунду от начала движения увеличится от начального значения $V_0 = 2$ м/с до величины $V_1 = 10$ м/с, а также путь, пройденный точкой до остановки.

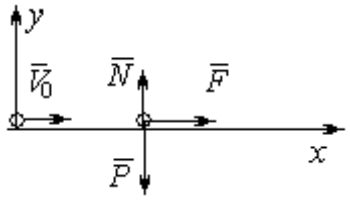


Рис. 4.4. Прямолинейное движение точки

Решение

Для описания движения точки выберем прямоугольную систему координат x, y с началом в том месте, откуда точка начала движение (рис. 4.4).

На точку действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры $\vec{N}$ и заданная сила $\vec{F}$. Направление силы $\vec{F}$ на рис. 4.4 соответствует начальному этапу движения, когда проекция силы на ось *x* положительная. Движение точки описывается уравнением $m\ddot{x} = F_x = 10 - kt$.

Положим $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$. Здесь в силу того, что движение происходит только вдоль одной координаты, индекс *x* у скорости опущен. Учитывая массу точки, получим уравнение $\dfrac{dV}{dt} = 10 - kt$. Разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение, найдём закон изменения скорости точки $V = 10t - k\dfrac{t^2}{2} + C_1$. Выражая скорость через производную от координаты $V = \dfrac{dx}{dt}$, получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dx}{dt} = 10t - k\dfrac{t^2}{2} + C_1$, интегрируя которое, найдём уравнение движения точки $x = 5t^2 - k\dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$.

Подставляя начальные условия (при $t = 0$, $V = V_0 = 2$ м/с, $x = 0$) в уравнения, получим: $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Окончательно движение точки описывается системой уравнений: $V = 10t - k\dfrac{t^2}{2} + 2$; $x = 5t^2 - k\dfrac{t^3}{6} + 2t$.

Известно, что через 1 с от начала движения точка приобрела скорость $V_1 = 10$ м/с. Подставляя это условие в первое уравнение, найдём $k = 4$.

В момент t_1 точка остановилась и её скорость обращается в нуль: $V(t_1) = 0$, а координата равна пройденному пути: $x(t_1) = S$. Подставляя эти условия в уравнения движения с учетом вычисленного значения коэффициента *k*, получим систему: $0 = 10t_1 - 2t_1^2 + 2$; $S = 5t_1^2 - \dfrac{2}{3}t_1^3 + 2t_1$, откуда находим путь, пройденный точкой до остановки: $S = 51{,}86$ м.

Задача 43. Материальная точка массой m = 1 кг, находясь на высоте h_1 = 2 м над уровнем Земли, подброшена вертикально вверх (ось x) с начальной скоростью V_0 = 4 м/с (рис. 4.5, *a*). При движении на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости, так, что проекция её на вертикаль направлена в сторону, противоположную движению, $R_x = -0{,}5mV^2$ Н, где V – скорость точки. Определить, на какой высоте h_2 от уровня Земли скорость падающей обратно точки достигнет значения начальной стартовой скорости.

Решение

Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе рассматривается движение точки вверх с высоты h_1 с начальной скоростью V_0 и определение максимальной высоты полёта H, на втором этапе – падение точки вниз с высоты H без начальной скорости (рис. 4.5, *b*).

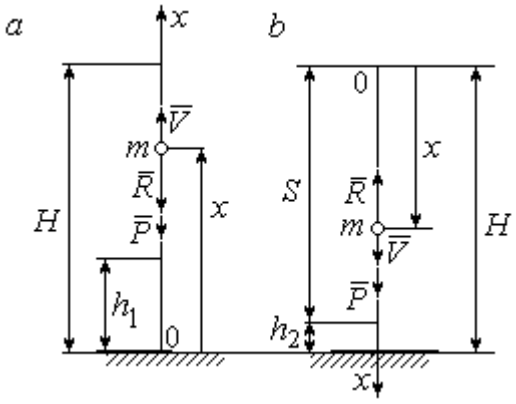


Рис. 4.5. Силы, действующие на точку в полёте:
a – движение точки вверх;
b – движение точки вниз

Рассмотрим первый этап движения и найдём максимальную высоту подъёма точки. На рис. 4.5, *a* показаны силы, действующие на точку в полёте: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Ось x, вдоль которой происходит движение точки, выбрана по направлению движения, начало координат – на уровне Земли (см. рис. 4.5, *a*).

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x: $m\ddot{x} = \sum F_x = P_x + R_x$, где проекции сил тяжести и сопротивления на ось x: $P_x = -P = -mg$; $R_x = -0{,}5mV^2$. Полагая $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$, получим уравнение движения точки в виде: $\dfrac{dV}{dt} = -(g + 0{,}5V^2)$.

Учитывая, что $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=V\frac{dV}{dx}=\frac{dV^2}{2dx}$, исходное уравнение движения представляется в виде, удобном для интегрирования: $\frac{dV^2}{g+0{,}5V^2}=-2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g+0{,}5V^2)=-x+C$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, точка находилась на высоте $x = h_1$, а скорость её $V = V_0$. Подставив эти значения в проинтегрированное уравнение, получим: $C=h_1+\ln(g+0{,}5V_0^2)$. Окончательно положение точки в полёте определяется выражением $x=h_1+\ln\left(\frac{g+0{,}5V_0^2}{g+0{,}5V^2}\right)$.

При максимальном подъёме точки, т. е. при $x=H$, её скорость обращается в нуль: $V = 0$. Подставляя H, получим: $H=h_1+\ln\left(1+\frac{V_0^2}{2g}\right)$. При начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, с учётом высоты точки старта $h_1 = 2$ м, высота подъёма точки относительно уровня Земли $H = 2{,}6$ м.

Рассмотрим второй этап решения задачи – движение точки вниз с максимальной высоты H без начальной скорости. Выберем ось x по направлению движения и поместим начало координат в точке, откуда началось движение вниз (рис. 4.5, *b*). Дифференциальное уравнение движения падающей точки: $m\frac{dV}{dt}=P_x+R_x = mg-0{,}5mV^2$, которое, как и в предыдущем случае, приводится к виду: $\frac{dV^2}{g-0{,}5V^2}=2dx$.

Проинтегрировав это уравнение, находим: $\ln(g-0{,}5V^2)=-x+C_1$.

В начальном положении, т. е. при $t = 0$, координата точки и скорость равны нулю: $x = 0$, $V = 0$. Подставив эти значения, находим: $C_1=\ln g$.

Окончательно положение падающей точки определяется выражением $x = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V^2}\right)$.

Расстояние S, которое пролетела точка с высоты H, приобретя скорость, V_0: $S = \ln\left(\frac{g}{g - 0{,}5V_0^2}\right)$. Высота h_2 этого положения от уровня Земли: $h_2 = H - S$ (см. рис. 4.5, *b*). С учётом величины начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, максимальной высоты подъёма точки $H = 2{,}6$ м высота $h_2 = 0{,}91$ м.

Задача 44. Точка 1 движется горизонтально с постоянной скоростью V_1 на высоте h. Точка 2 массой m_2 находится в начале координат (рис. 4.6).

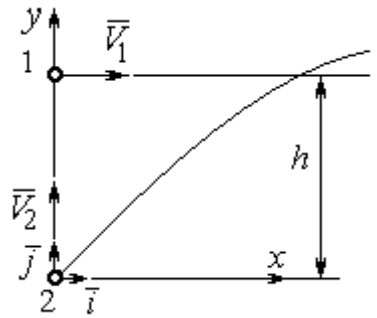


Рис. 4.6. Схема встречного движения точек

В момент, когда обе точки находились на одной вертикали y, точка 2 стартовала вертикально вверх со скоростью V_2. В полёте на точку 2 действует отклоняющая сила $\vec{F}_2$, которая представлена в виде разложения по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ системы координат xy: $\vec{F}_2 = p\vec{i} + q\vec{j}$, где p, q – const. С какой скоростью V_2 должна стартовать точка 2, чтобы обе точки встретились.

Решение

Рассмотрим движение точки 2. На точку действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, проекции которой на оси x, y: $F_{2x} = p$, $F_{2y} = q$ (рис. 4.7).

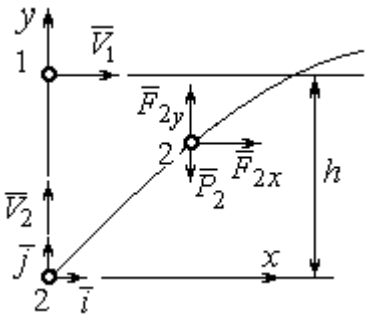


Рис. 4.7. Расчётная схема встречи точек

Уравнения движения точки в проекциях на оси xy имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = p,\ m_2\ddot{y} = q - m_2 g.$$

Дважды интегрируя первое уравнение, полу-

чим: $\dot{x} = \frac{p}{m_2}t + C_1$; $x = \frac{p}{2m_2}t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования найдём из условия, что в начальный момент вторая точка стартовала из начала координат вертикально, то есть при $t = 0$ $x = 0$ и $\dot{x} = V_{2x} = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, движение точки 2 вдоль оси x описывается уравнением $x = \frac{p}{2m_2}t^2$.

Аналогично, дважды интегрируя второе уравнение движения, получим зависимость скорости движения точки 2 от времени и закон её движения вдоль оси y: $\dot{y} = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)t + C_3$; $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$. Из начальных условий: при $t = 0$ $y = 0$, $\dot{y} = V_{2y} = V_2$ следует: $C_3 = V_2$, $C_4 = 0$.

В результате закон движения точки 2 вдоль оси y: $y = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t^2}{2} + V_2 t$.

Обозначим t_1 – время движения точек до встречи. В момент встречи высота точки 2 $y(t_1) = h$, а расстояние по горизонтали, которое прошла точка 2 до встречи, должно быть равно расстоянию, пройденному точкой 1 за это же время. Подставляя условия встречи в уравнения движения, получим систему:

$$V_1 t_1 = \frac{p}{2m_2}t_1^2; \qquad h = \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1^2}{2} + V_2 t_1,$$

откуда найдём: $V_2 = \frac{h}{t_1} - \left(\frac{q}{m_2} - g\right)\frac{t_1}{2}$, где $t_1 = \frac{2V_1 m_2}{p}$.

Упражнения

Упражнение 4.1. Тело массы m = 2 кг поднимается по прямой по шероховатой поверхности, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения f = 0,4. На тело действует сила $F = kt + 0{,}5P$, направленная в сторону движения, параллельно плоскости. Определить величину коэффициента k и начальную скорость тела, направленную вверх по наклонной плоскости, если за первую секунду тело прошло путь S = 2 м, а скорость увеличилась вдвое относительно начальной.

Упражнение 4.2. Материальную точку массы m = 1 кг, находящуюся на высоте H = 10 м над уровнем Земли, бросили под углом φ = 30° к горизонту с начальной скоростью V_0. Свободное движение точки происходит в вертикальной плоскости. Определить начальную скорость V_0 и горизонтальную дальность полета l при падении точки на Землю, если высоту h =7 м она пересекла через 1 с от начала движения.

4.2. Колебания материальной точки

Если материальная точка массой m движется вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, равной $F = cx$, где c – постоянный коэффициент, x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало координат, то дифференциальное уравнение свободных прямолинейных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m},$$

где ω – угловая частота колебаний.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.** В случае гармонического возмущения $Q = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,\ \omega^2 = \frac{c}{m},\ h = \frac{H}{m}$$

где ω – угловая частота собственных колебаний; h – относительная амплитуда возмущающей силы.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при отсутствии резонанса (частота собственных колебаний точки не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$) имеет вид:

$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае возникновения резонанса ($p = \omega$) определяется формулой: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 находятся с учётом начальных условий движения.

Колебания груза на двух параллельных пружинах с жесткостью c_1 и c_2 можно рассматривать как колебания груза на одной пружине с эквивалентной жесткостью $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – жесткость эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$.

Примеры решения задач на колебания точки

Задача 45. Подъёмное устройство (рис. 4.8) опускает груз Q массой $m = 400$ кг в шахту при помощи упругого троса с коэффициентом жесткости $c = 8 \cdot 10^4$ Н/м с постоянной скоростью $V = 10$ м/с. В некоторый момент во время спуска трос защемило в блоке. Пренебрегая массой троса, определить дальнейшее движение груза и найти максимальную силу натяжения троса.

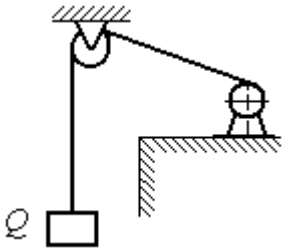


Рис. 4.8. Подъёмное устройство

Решение

После того как произошло защемление троса в обойме блока, вертикальную часть троса длиной ℓ_0 можно рассматривать как пружину с закреплённым верхним концом, а груз – материальной точкой.

Расчетная схема колебаний груза Q на пружине показана на рис. 4.9.

Ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, направлена вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* (точка *O*) выбрано в положении нерастянутой пружины.

На рис. 4.9, *a* положение нерастянутой пружины соответствует положению груза на тросе в момент его защемления. В произвольном положении груза (рис. 4.9, *b*), обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{Q}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -cx$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox* имеет вид: $m\ddot{x} = Q - cx$. В результате получаем неоднородное дифференциальное уравнение колебаний:

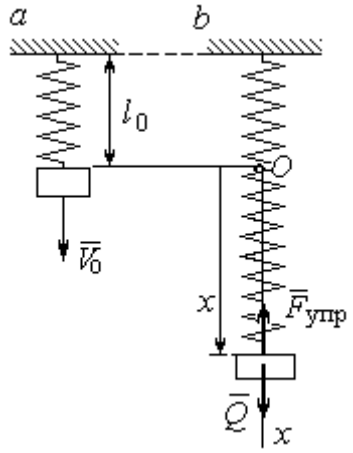


Рис. 4.9. Расчётная схема колебаний груза:
a – положение груза на начало колебаний; *b* – положение груза в произвольный момент времени

$$m\ddot{x} + cx = mg \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = g,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}14$ рад/с.

Решение неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{g}{\omega^2}$, где первые два слагаемых представляют общее решения однородного уравнения, последнее – частное решение неоднородного

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при $t = 0$ груз находился в положении $x = 0$, а его скорость равнялась скорости груза $\dot{x} = V_0 = 10$ м/с. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний, полу-

чим: $C_1 = -\frac{g}{\omega^2} = -0{,}69$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставив начальное значение скорости груза при $t = 0$, получим: $C_2 = \frac{V_0}{\omega} = 0{,}71$ м. Окончательно, движение груза после защемления троса в обойме блока описывается уравнением

$$x = -0{,}69\cos 14{,}14t + 0{,}71\sin 14{,}14t + 0{,}69.$$

Представим уравнение колебаний в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}$, где A – амплитуда собственных колебаний груза $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, α – фаза колебаний; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$. Максимальное растяжение троса равно максимальному значению координаты груза: $x_{\max} = \max[A\sin(\omega t + \alpha) + \frac{g}{\omega^2}] = A + \frac{g}{\omega^2} = 1{,}68$ м. Соответственно, максимальное усилие в тросе равно значению силы упругости при максимальном растяжении: $F_{\text{упр max}} = cx_{\max} = 134{,}4$ кН.

Задача 46. Рабочий орган вибрационной машины представляет собой массивное тело, расположенное на гладкой наклонной плоскости между двумя пружинами (см. рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 60º. Масса груза $m = 9$ кг. Пружины, зажимающие груз, имеют коэффициенты жесткости $c_1 = 300$ Н/м и $c_2 = 600$ Н/м.

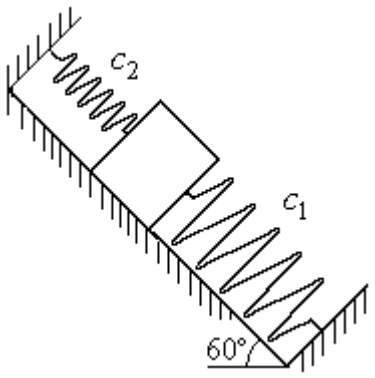


Рис. 4.10. Колебания груза на наклонной плоскости

В начальный момент груз, когда пружины не деформированы, груз оттягивают вниз по наклонной плоскости на расстояние $\Delta\ell = 0{,}12$ м и отпускают без начальной скорости.

Найти период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза.

Решение

Колебания груза, зажатого между двумя пружинами, представим как колебания груза, прикреплённого к одной пружине эквивалентной жёсткости: $c_э = c_1 + c_2$ = 900 Н/м (рис. 4.11). Ось, вдоль которой происходят колебания, направим вниз по наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты груза x выберем в положении его статического равновесия (точка O) (см. рис. 4.11).

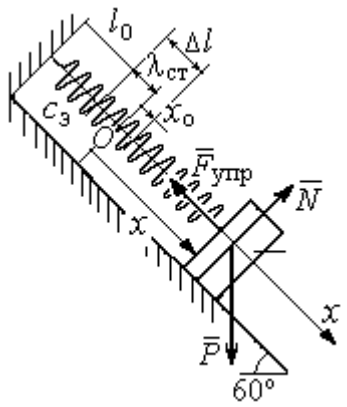


Рис. 4.11. Схема колебаний груза на эквивалентной пружине

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Ox: $m\ddot{x} = P_x - F_{упр\,x}$. Проекция силы упругости пружины на ось Ox: $F_{упр\,x} = -c_э \Delta\ell$, где $\Delta\ell = (x + \lambda_{ст})$ – удлинение пружины, включающее её растяжение $\lambda_{ст}$ относительно положения нерастянутой пружины и растяжение x относительно начала координат.

Удлинение пружины $\lambda_{ст}$ определяется из условия равновесия груза на наклонной плоскости в положении статического равновесия:

$$P\cos 30^\circ - F_{упр} = 0{,}87mg - c_э\lambda_{ст} = 0.$$

Находим $\lambda_{ст} = \dfrac{0{,}87mg}{c_э} = 0{,}085$ м.

Подставляя выражение силы упругости, с учётом условия статического равновесия груза ($0{,}87mg = c_э\lambda_{ст}$), получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} = -c_э x$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 10$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим начальные условия движения груза.

Координата начального положения груза на оси Ox (см. рис. 4.11) $x_0 = \Delta\ell - \lambda_{ст} = 0{,}035$ м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим: $C_1 = x_0 = 0{,}035$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза: $\dot{x} = -C_1\omega_2 \sin\omega_2 t + C_2\omega_2 \cos\omega_2 t$. Подставив начальное значение скорости груза: при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза относительно его положения статического равновесия $x(t) = 0{,}035\cos 10t$ м. Амплитуда колебаний $A = 0{,}035$ м. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}63$ с.

Задача 47. Пружинный амортизатор состоит из двух одинаковых вертикально стоящих пружин, к верхним концам которых прикреплена невесомая горизонтальная площадка (рис. 4.12). Жёсткость каждой пружины c = 350 Н/м. Груз массой m = 5 кг падает с высоты h = 0,3 м.

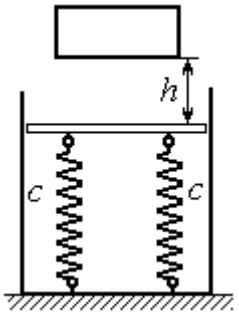


Рис. 4.12. Пружинный амортизатор

Коснувшись площадки, груз начинает двигаться вместе с ней. Определить максимальную осадку амортизатора и уравнение движения груза.

Решение

Заменим две пружины амортизатора одной с жесткостью, эквивалентной двум пружинам: $c_э = 2c$ = 700 Н/м. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.13. Начало координат оси x (точка O), вдоль которой происходят колебания, выбрано на уровне статического равновесия груза.

При движении (на рис. 4.13, c предполагается движение груза вниз) на груз действуют сила упругости $\vec{F}_{упр}$ и сила тяжести $\vec{P}$. Уравнение движения груза в проекции на ось x: $m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение (или сжатие) пружины относительно недеформированного состояния.

В произвольном положении груза, обозначенном координатой x (см. рис. 4.13, *c*), сжатие пружины относительно её недеформированного состояния (см. рис. 4.13, *a*) составляет величину: $\Delta\ell = x + \lambda_{ст}$. Величина $\lambda_{ст}$ находится из условия статического равновесия груза, которое выражается равенством (рис. 4.13, *b*): $P - F_{упр\,ст} = P - c_э\lambda_{ст} = 0$.

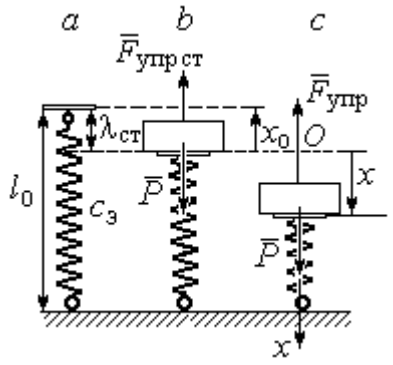


Рис. 4.13. Расчётная схема колебаний на эквивалентной пружине:
a – недеформированная пружина;
b – положение статического равновесия груза; *c* – произвольное положение

Подставляя это условие в уравнение движения груза, получим дифференциальное уравнение колебаний: $m\ddot{x} + c_э x = 0$ или $m\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}}$ = 11,83 рад/с – угловая частота колебаний.

Общее решение однородного уравнения колебаний представляется в виде $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения груза.

По условию задачи груз падает на площадку, установленную на недеформированных пружинах. Это означает, что начальная координата груза при его движении на пружинах соответствует положению недеформированной пружины: $x_0 = -\lambda_{ст} = -\dfrac{mg}{c_э} = -0{,}07$ м.

Начальная скорость колебаний груза равна скорости груза при падении его с высоты 1 м. Интегрируя уравнение движения груза во время падения $m\ddot{s} = mg$, где s – путь, пройденный телом, получим зависимость скорости от пройденного пути: $V^2 = 2gs$. Полагая s = 0,3, найдём скорость груза при его встрече с площадкой: V = 2,43 м/с. Проекция начальной скорости колебаний груза на ось x положительна: $V_{0x} = V$ = 2,43 м/с.

Подставив начальные условия в общее решение уравнения колебаний, получим: $C_1 = x_0 = -0{,}07$ м; $C_2 = \frac{V_{0x}}{\omega} = 0{,}2$ м. Окончательно уравнение колебаний груза на амортизаторе $x = -0{,}07\cos 11{,}83t + 0{,}2\sin 11{,}83t$. Амплитуда колебаний $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}21$ м. Проседание амортизатора H отсчитывается от положения нерастянутых пружин: $H = A + \lambda_{ст} = 0{,}28$ м.

Задача 48. Для регистрации (записи) вертикальных колебаний тяжёлых платформ используется пружинный виброграф (рис. 4.14). Схема действия прибора состоит в следующем. Массивная платформа A совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\xi = \xi(t)$. На платформе установлена вертикальная стойка с горизонтальной перекладиной, к которой прикреплена пружина жесткостью c. К нижнему концу пружины подвешен груз P массой m с индикаторной стрелкой B (см. рис. 4.14). Вертикальная шкала индикаторной стрелки закреплена на платформе A. В начальный момент груз на пружине находился в покое в положении статического равновесия. Определить закон колебаний стрелки B вдоль шкалы, если масса груза $m = 1$ кг, жесткость пружины $c = 10$ Н/м, платформа совершает вертикальные колебания по закону $\xi = a\sin pt$ см, где амплитуда $a = 0{,}02$ м, частота колебаний платформы $p = 7$ рад/с.

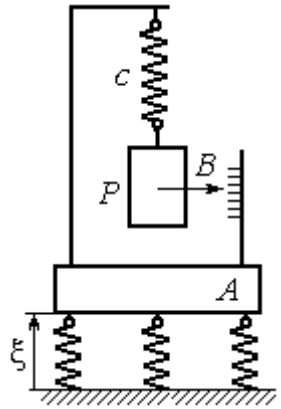


Рис.4.14. Регистратор вертикальных колебаний

Решение

Выберем неподвижную ось x, связанную, например, с неподвижной поверхностью, на которой стоит платформа. Начало координат – точку O выберем на уровне статического равновесия груза на пружине при неподвижной платформе. Произвольное положение груза отмечено координатой x (рис. 4.15).

Растяжение пружины при неподвижной платформе составляет величину $x+\lambda_{ст}$, где $\lambda_{ст}$ – удлинение пружины в положении статического равновесия груза, определяемое из условия $P-c\lambda_{ст}=0$. Вместе с тем колебание платформы вызывает аналогичное смещение точки подвеса пружины. В результате растяжение пружины при произвольном положении груза равно сумме: $\Delta\ell=(x+\lambda_{ст}+\xi)$.

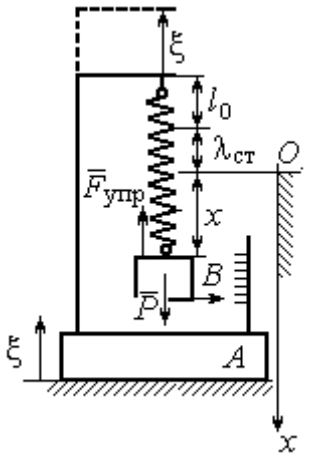


Рис. 4.15. Расчётная схема колебаний груза

На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*: $m\ddot{x}=P_x+F_{упр\,x}$, где проекции $P_x=P$, $F_{упр\,x}=-c\Delta\ell=-c(x+\lambda_{ст}+\xi)$. Расчётная схема колебаний груза показана на рис. 4.15.

С учётом условия статического равновесия груза $P-c\lambda_{ст}=0$ получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний груза в виде:

$$\ddot{x}+\omega^2x=-h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний груза, $\omega=\sqrt{\dfrac{c}{m}}=3{,}16$ рад/с;

h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h=\dfrac{ca}{m}$ = 0,2 м/с^2;

p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 7 рад/с.

Решение уравнения вынужденных колебаний представляется суммой $x=x_1+x_2$, где x_1 является общим решением однородного уравнения $\ddot{x}_1+\omega^2x_1=0$, а x_2 – частное решение уравнения вынужденных колебаний: $\ddot{x}_2+\omega^2x_2=-h\sin pt$.

Решив однородное уравнение, находим: $x_1=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$.

При отсутствии резонанса (а в данном случае частота вынужденных колебаний груза не совпадает с частотой собственных $\omega \neq p$) частное решение уравнения вынужденных колебаний ищем в виде $x_2 = b\sin pt$. Подставляя частное решение в уравнение вынужденных колебаний, получим уравнение $-bp^2\sin pt + \omega^2 b\sin pt = -h\sin pt$, откуда находим коэффициент: $b = \dfrac{h}{p^2 - \omega^2}$.

В результате общее решение уравнения колебаний принимает вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{p^2 - \omega^2}\sin pt,$$

где константы C_1 и C_2 подлежат определению.

В начальный момент груз находился на пружине в положении статического равновесия, и потому его начальная координата и скорость равны нулю Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим C_1= 0. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \dfrac{hp}{p^2 - \omega^2}\cos pt$. Подставив начальное значение скорости груза, найдём $C_2 = -\dfrac{hp}{\omega(p^2 - \omega^2)} = -0{,}01$ м.

Таким образом, колебания груза относительно неподвижной системы координат описываются уравнением $x = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t$ и представляют абсолютное движение груза. Для того чтобы найти закон движения груза относительно платформы – относительное движение, нужно из его абсолютного движения исключить переносное – колебания платформы. Поскольку стрелка прибора закреплена на грузе, а шкала – на платформе, то закон движения стрелки относительно шкалы:

$$x_r = x - \xi = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}05\sin 7t - 0{,}02\sin 7t = -0{,}01\sin 3{,}16t + 0{,}03\sin 7t.$$

Упражнения

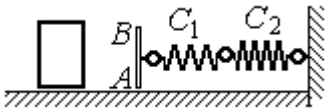


Рис. 4.16. Схема движения груза

Упражнение 4.3. Груз массы m = 0,5 кг, получив начальную скорость V_0 = 6 м/с, движется по горизонтальной поверхности, испытывая силу сопротивления, равную по величине $F = kV$ и направленную в сторону, противоположную движению. Через 1 с груз соединяется с невесомой вертикальной площадкой AB и продолжает движение вместе с ней, уже без сопротивления. К площадке прикреплены две горизонтальные последовательно соединённые пружины жёсткостью C_1 = 120 и C_2 = 40 Н/м (рис. 4.16).

Найти величину максимального сжатия пружины, если k = 0,5 Н/м/с. Определить закон движения груза.

Упражнение 4.4. Груз массы m =1 кг прикреплен к конструкции, состоящей из трёх вертикальных пружин одинаковой жёсткости C = 160 Н/м (рис. 4.17), и находится в равновесии. В некоторый момент времени грузу сообщают скорость V = 4 м/с, направленную вверх.

Найти амплитуду и частоту колебаний груза.

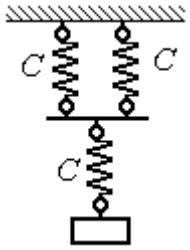


Рис. 4.17. Схема крепления груза на пружинах

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении точки приложения силы M (рис. 4.18) называется скалярная величина $A(\vec{F}) = FS\cos\alpha$, где F – модуль силы; S – конечное перемещение точки приложения силы; α – угол между направлением вектора силы и направлением перемещения точки приложения силы.

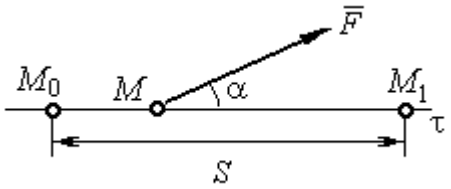


Рис. 4.18. Работа постоянной силы на прямолинейном участке

Работа силы тяжести материальной точки при перемещении её из положения M_0 в положение M_1 равна произведению $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – вертикальное перемещение точки (рис. 4.19).

Работа силы тяжести положительна, если начальная точка движения выше конечной (см. рис. 4.19, *a*), и отрицательна, если начальная точка ниже конечной (см. рис. 4.19, *b*).

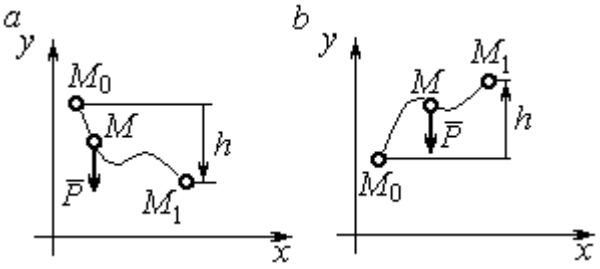


Рис. 4.19. Работа силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы упругости пружины при перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние *h* определяется формулой $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \frac{1}{2}mV^2$, где *m* – масса точки; *V* – её скорость.

Теорема об изменении кинетической энергии точки. Изменение кинетической энергии материальной точки при переходе её из начального положения в текущее равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0, V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при перемещении её из положения M_0 в положение M_1. При несвободном движении точки в сумму работ сил войдёт и работа реакций связи.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат, ρ – радиус кривизны траектории точки.

Примеры решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии точки

Задача 49. Подъёмное устройство в шахте опускает груз массой 500 кг с постоянной скоростью V_0 = 6 м/с. После обрыва каната подъёмника срабатывает предохранительное устройство, которое создаёт силу трения между лифтом подъёмного устройства и стенками шахты. Какую силу трения, считая её постоянной, должно создать предохранительное устройство, чтобы остановить лифт на протяжении пути 10 м.

Решение

Рассмотрим падение груза после обрыва каната подъёмника. На груз действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная в сторону, противоположную движению. Считая груз материальной точкой, составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Получим выражение $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = Ps - F_{\text{тр}}s$, где V_0, V – скорость груза в начале движения (сразу после обрыва каната) и в конце; s – путь, проходимый грузом за время движения. В конце движения груз должен остановиться, то есть V = 0. Тогда уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\frac{mV_0^2}{2} = \left(P - F_{\text{тр}}\right)s$, откуда находим требуемую для остановки груза силу трения: $F_{\text{тр}} = P + \frac{mV_0^2}{2s}$. Подставляя условия задачи, получим: $F_{\text{тр}}$ = 5,81 кН

Задача 50. Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг сопряженных окружностей радиусов R = 1 м и r = 0,5 м (рис. 4.20). Линия OO_1, соединяющая центры окружностей, составляет с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик весом P = 10 Н. В точке A, положение которой на дуге радиуса R определяется углом α = 60°, шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он скользит по стержню без трения. Опре-

делить значение начальной скорости, при которой шарик достигнет наивысшей точки B со скоростью, равной половине начальной. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке C, положение которой на дуге радиуса r определяется углом $\beta = 90°$ относительно линии центров.

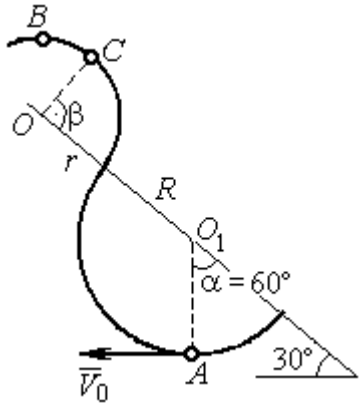


Рис. 4.20. Движение шарика по изогнутому стержню

Решение

При движении шарика по стержню без трения на него действуют сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При этом работу совершает только сила тяжести шарика. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня и потому её работа равна нулю.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении её из начального положения A в положение B имеем равенство:

$$\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = -Ph_{(AB)},$$

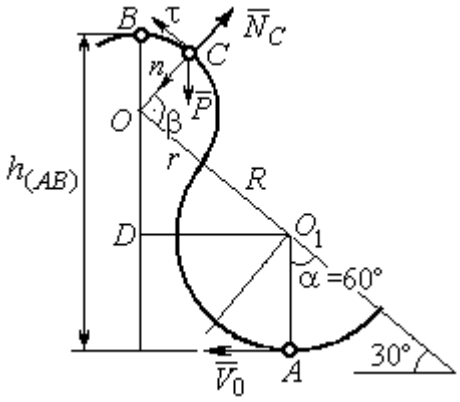


Рис. 4.21. Расчётная схема движения шарика

где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек B и A, $h_{(AB)} = R + DO + r = \frac{3}{2}(R + r)$ (см. рис. 4.21); V_A, V_B – скорость шарика в точках A и B, причём $V_A = V_0$, $V_B = 0{,}5V_0$.

В результате уравнение, составленное на основании теоремы об изменении кинетической энергии, принимает вид: $\frac{3V_0^2}{8} = g\frac{3}{2}(R + r)$, откуда $V_0 = 2\sqrt{(R + r)g} = 7{,}67$ м/с.

На рис. 4.21 показаны силы, приложенные к шарику, в момент, когда он находится в точке *C*. Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn. Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N_C$, откуда найдём реакцию N_C.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *C* в положение *B*. Получим равенство $\dfrac{mV_B^2}{2} - \dfrac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где $h_{(CB)}$ – перепад высот при движении шарика из начального положения *C* в положение *B*. С учётом известных значений $V_B = 0{,}5V_0 =$ 3,84 м/с и $h_{(CB)} = r\cos 30^\circ =$ 0,43 м получим: $V_C = \sqrt{V_B^2 + 2gh_{(CB)}} =$ 4,82 м/с.

Из уравнения движения шарика находим реакцию опоры $N_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} =$ – 38,7 Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика показывает, что фактическое направление реакции противоположно тому, как показано на рис. 4.21. Искомое давление шарика на трубку равно модулю реакции опоры.

Задача 51. Желоб состоит из шероховатой наклонной прямой *AB* и гладкой дуги окружности радиуса *r* = 0,8 м, сопряжённых в точке *B* так, что прямая *AB* является касательной к окружности в точке *B* (рис. 4.22). Положение точки *B* на дуге задаётся углом 30º относительно вертикального диаметра окружности. Тяжёлый шарик массой *m* = 0,5 кг начинает движение из точки *A* со скоростью $V_0 = 0{,}2$ м/с.

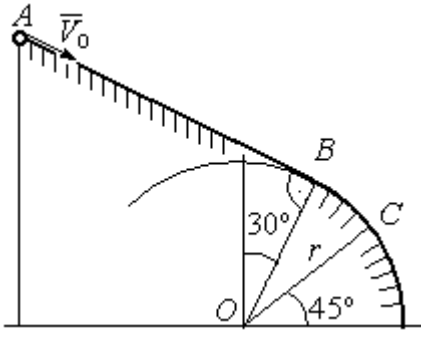


Рис. 4.22. Движение точки по составному желобу

Какой длины *S* должен быть желоб *AB*,

чтобы шарик оторвался от окружности в точке C, определяемой углом 45º относительно горизонтального диаметра, если при движении по прямой AB шарик испытывает сопротивление скольжения с коэффициентом трения $f = 0{,}4$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по дуге окружности. Проведём в точке C оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.23). На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, реакция $\vec{N}_C$ опоры в точке C. Уравнение движения шарика в проекции на ось Cn имеет вид: $m\dfrac{V_C^2}{r} = P\cos 45^\circ - N_C$, где V_C – скорость шарика в точке C. Реакция опоры $N_C = P\cos 45^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r}$.

В момент отрыва шарика в точке C реакция опоры обращается в ноль: $N_C = 0$. В результате получаем уравнение $V_C^2 = rg\cos 45^\circ$, из которого находим скорость шарика в момент его отрыва от опоры: $V_C = 2{,}36$ м/с.

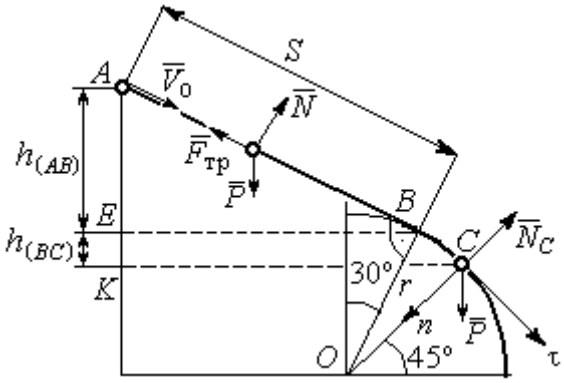


Рис. 4.23. Расчётная схема движения точки

Рассмотрим движение шарика из начального положения A в положение C. На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и, при движении по наклонной прямой AB, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рис. 4.23). Работу совершают сила тяжести шарика и сила трения. Реакция опоры $\vec{N}$ и в том и другом случае перпендикулярна траектории движения, и её работа равна нулю.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки $\dfrac{mV_C^2}{2} - \dfrac{mV_A^2}{2} = Ph_{(AC)} - F_{\text{тр}}S$, где S – длина участка AB; $h_{(AC)}$ – перепад высот на участке AC (см. рис. 4.23); $h_{(AC)} = h_{(AB)} + h_{(BC)} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right)$.

Модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = fN$. Для того чтобы найти реакцию N опоры шарика на наклонную поверхность желоба AB, составим проекцию уравнения движения шарика на ось y, перпендикулярную AB (на рис. 4.23 не показана). Получим: $m\ddot{y} = N - P\cos 30^\circ = 0$. Отсюда $N = P\cos 30^\circ$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fP\cos 30^\circ$.

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии точки найдём выражение для определения длины S участка AB:

$$\frac{V_C^2 - V_A^2}{2g} = S\sin 30^\circ + r\left(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\right) - fPS\cos 30^\circ,$$

откуда получим $S = 1$ м.

Задача 52. Груз подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закреплённой в неподвижной точке O (рис. 4.24). В начальный момент груз находился в положении A, при котором линия OA составляет с вертикалью угол $60°$. В этом положении грузу сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярно нити. Достигнув горизонтального положения, нить, натянутая грузом, встречает препятствие в виде тонкой проволоки в точке O_1, расположенной на середине длины нити, и дальше навивается на неё.

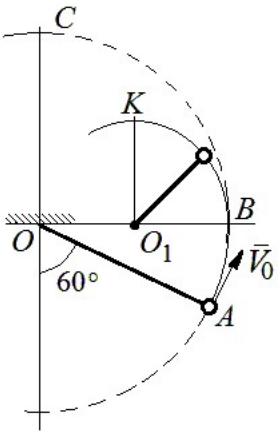


Рис. 4.24. Схема движения груза на нити

Какую минимальную начальную скорость нужно сообщить грузу в точке A, чтобы после встречи нити с проволокой в O_1 груз проскочил верхнюю точку траектории K. На какую максимальную высоту (относительно горизонтального диаметра OB) поднимется груз, двигаясь из той же точки A и с той же начальной скоростью, если нить будет двигаться беспрепятственно. Определить скачок натяжения нити в точке B при переходе груза с одной траектории на другую.

Решение

Построим оси естественной системы координат $n K \tau$ в точке K траектории – окружности радиуса $0{,}5l$ с центром O_1 (рис. 4.25, *a*). Во время движения на груз действуют сила тяжести и реакция нити. Уравнение движения груза в проекции на ось Kn имеет вид: $m\dfrac{V_K^2}{r} = P + N_K$, где V_K – скорость

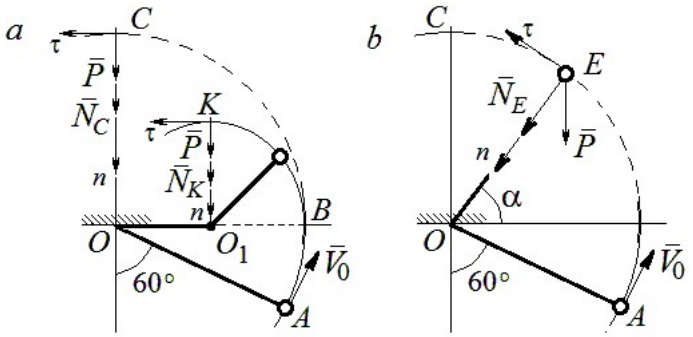


Рис. 4.25. Расчётная схема движения груза:
a – нить навивается на препятствие;
b – свободное движение

груза в точке K; N_K – реакция нити; r – радиус окружности движения груза; $r = 0{,}5l$. Из уравнения движения находим реакцию нити: $N_K = m\dfrac{2V_K^2}{l} - P$.

Так как нить представляет собой гибкую связь, то условием достижимости грузом точки K является требование, что при движении нить должна быть натянута, иначе говоря, всюду во время движения должно выполняться неравенство $N_K \geq 0$. С учётом уравнения движения груза это приводит к неравенству, выражающему требование к скорости в конечной точке: $V_K^2 \geq \dfrac{1}{2}gl$.

Скорость груза в точке K найдём на основании теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из положения A в положение K. Имеем равенство $\dfrac{mV_K^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AK)}$, где $h_{(AK)}$ – перепад высот точек A и K; $h_{(AK)} = l$ (см. рис. 4.25, *a*). Решая полученное уравнение, найдём зависимость скорости груза в точке K от начальной: $V_K^2 = V_0^2 - 2gl$. С учётом выполнения неравенства натяжения нити получим: $V_0 \geq \sqrt{\dfrac{5}{2}gl}$.

При минимальной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$ груз достигает верхней точки *K*. Однако, натяжение нити в точке *K* обращается в нуль: $N_K = 0$ и нить в этом месте перестаёт быть натянутой. Груз продолжает движение, но уже в виде свободного падения с начальной скоростью $V_K = \sqrt{\frac{1}{2}gl}$.

Определим, на какую высоту поднимется груз из положения *A* с минимальной начальной скоростью $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, если нить движется беспрепятственно (см. рис. 4.25, *b*). Построим в точке *E* оси естественной системы координат $nE\tau$ аналогично тому, как это было сделано в точке *K*. Уравнение движения груза в проекции на ось *En* имеет вид: $m\frac{V_E^2}{l} = P\sin\alpha + N_E$, где V_E – скорость груза в точке *E*; N_E – проекция реакции нити на нормальную ось.

Для определения скорости груза в точке *E* составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении груза из начального положения *A* в положение *E*. Получим: $\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -Ph_{(AE)}$, где $h_{(AE)}$ – перепад высот точек *A* и *E*; $h_{(AE)} = \frac{l}{2} + l\sin\alpha$ (см. рис. 4.25, *b*). Решая полученное уравнение относительно скорости V_E при заданной начальной скорости $V_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gl}$, найдём: $mV_E^2 = \frac{3}{2}mgl - 2mgl\sin\alpha$. С другой стороны, из уравнения движения груза (учитывая, что в точке *E* натяжение нити равно нулю: $N_E = 0$) получим: $mV_E^2 = Pl\sin\alpha$. Приравнивая выражения, получим $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Высота подъёма относительно горизонтального радиуса составляет $\frac{1}{2}l$.

Для определения скачка натяжения нити при переходе груза в точке B с окружности радиуса l на окружность радиуса $\frac{1}{2}l$, т. е. в момент, когда нить начинает навиваться на проволоку, напишем проекции уравнения движения груза на нормальную ось в точке B. Получим для малой окружности $\frac{2mV_B^2}{l} = N_B$ и для большой $\frac{mV_B^2}{l} = N'_B$, где N_B и N'_B – проекции реакции нити в точке B при движении груза по окружности радиусов $\frac{1}{2}l$ и l. Из уравнений видно, что переход груза с большой окружности на малую вызывает двукратное увеличение натяжения нити: $N'_B = \frac{3}{2}mg$, $N_B = 3mg$.

Задача 53. Шарик массой m = 0,5 кг движется в вертикальной плоскости из положения A внутри трубки, которая состоит из полуокружности AB радиуса R = 0,6 м и прямолинейного участка BD, сопряжённого в точке B с окружностью (рис. 4.26). Диаметр полуокружности AB составляет с горизонталью угол 60°. Начальная скорость шарика V_0 = 5 м/с. В конце кругового участка в точке B шарик упирается в недеформированную пружину жесткостью c = 100 Н/м. Найти величину S максимального сжатия пружины.

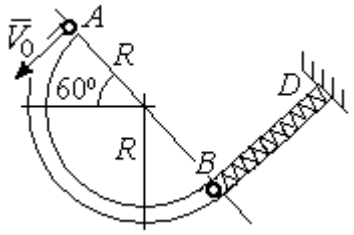


Рис. 4.26. Схема движения шарика

Решение

Найдём скорость шарика в точке B. Для этого составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения A в положение B. Получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(P) = Ph_{(AB)}$, где $h_{(AB)}$ – перепад высот точек A и B, $h_{(AB)} = 2R\sin 60^\circ = 1{,}04$ м (рис. 4.27).

Решая уравнение, найдём скорость шарика в точке B: $V_B = \sqrt{V_A^2 + 2gh_{(AB)}} = 6{,}74$ м/с.

Для того, чтобы найти величину максимального сжатия пружины, рассмотрим движение шарика на прямолинейном отрезке трубки BD. На этом отрезке работу совершают сила тяжести шарика и сила упругости пружины, приложенные к шарику (см. рис. 4.27).

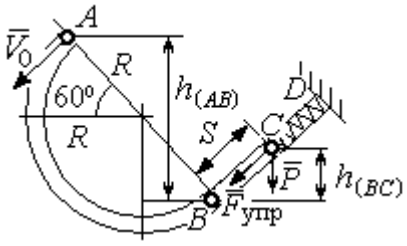


Рис. 4.27. Расчетная схема движения шарика

Обозначим S – максимальное сжатие пружины, равное BC. На основании теоремы об изменении кинетической энергии точки, применённой к движению шарика на отрезке BC, имеем уравнение $\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A(P) + A(F_{упр}) = -Ph_{(BC)} - \frac{cS^2}{2}$,

где $h_{(BC)}$ – перепад высот точек B и C; $h_{(BC)} = S\sin 30^\circ = 0{,}5S$ (см. рис. 4.27).

В точке C максимального сжатия пружины скорость шарика обращается в нуль: $V_C = 0$. Подставляя это условие, с учётом $V_B = 6{,}74$ м/с, получим уравнение для определения величины максимального сжатия пружины: $S^2 + 0{,}05S - 0{,}23 = 0$.

Выбирая положительный корень уравнения, находим: $S = 0{,}45$ м.

Упражнения

Упражнение 4.5. Лётчик в самолёте пикирует из точки A по прямой, составляющей с горизонтом угол φ, с начальной скоростью V_0. Пройдя расстояние $AB = l$, самолёт продолжает движение по дуге окружности радиуса R, сопряженной с прямой AB в точке B (рис. 4.28).

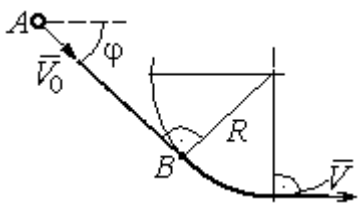


Рис. 4.28. Схема движения самолёта

Каким должен быть радиус окружности, чтобы в точке C – выхода самолёта на горизонтальный полёт - сила давления человека на корпус самолёта не превосходила его тройной вес.

Упражнение 4.6. Пружина жесткостью C = 100 Н/м, сжатая из недеформированного состояния на расстояние $KA = a = 0{,}3$ м, выталкивает шарик массой $m = 0{,}5$ кг, который отделяется от неё в точке K и продолжает движение в трубке по дуге KCB, окружности радиуса R = 1 м, затем – по горизонтальному участку BD. Определить давление шарика на трубку в точке C. Какой путь пройдёт шарик до остановки по прямой BD, если здесь на него действует сила трения с коэффициентом $f = 0{,}4$.

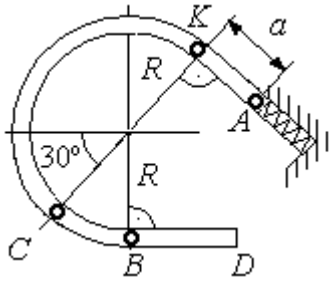


Рис. 4.29. Схема движения шарика в трубке

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

5.1. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы материальных точек называют точку C, координаты которой x_C, y_C, z_C удовлетворяют равенствам:

$$mx_C = \sum m_k x_k \ , \quad my_C = \sum m_k y_k \ , \ mz_C = \sum m_k z_k \ ,$$

где m – масса системы: $m = \sum m_k$; m_k, x_k, y_k, z_k – массы и координаты материальных точек системы.

Теорема о движении центра масс системы. Центр масс механической системы движется как материальная точка с массой, равной массе системы, и к которой приложены внешние силы, действующие на систему: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$, где $\vec{a}_C$ – вектор ускорения центра масс системы; $\sum \vec{F}_k^e$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему.

Пример решения задач на применение теоремы о движении центра масс

Задача 54. Груз 1, находящийся на верхнем основании прямоугольной пирамиды *ABCD*, соединен с грузом 2 нерастяжимой нитью, перекинутой через блок C (рис. 5.1). Определить перемещение пирамиды, если груз 2 опустился на высоту 1 м. Масса груза 1 m_1 = 15 кг, груза 2 m_2 = 20 кг, пирамиды m = 50 кг. Трение при движении груза 1 по пирамиде и пирамиды по горизонтальной поверхности не учитывать.

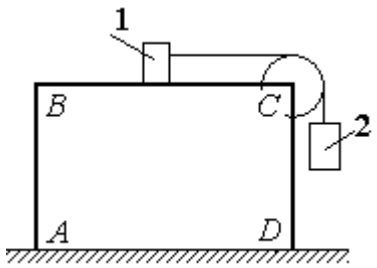


Рис. 5.1. Пирамида с системой подвижных грузов

Решение

Рассматриваем механическую систему, состоящую из двух грузов, соединённых нерастяжимой нитью, блока *C* и пирамиды *ABCD*.

Внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести грузов и пирамиды – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}$ и нормальная реакция $\vec{N}$ опоры поверхности, на которой стоит пирамида. Направления векторов внешних сил показаны на рис. 5.2.

Выберем неподвижную систему координат *Axy*, как показано на рис. 5.2. Все внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, поэтому дифференциальное уравнение, составленное на основании теоремы о движении центра масс механической системы в проекции на ось *Ax,* имеет вид:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x}_C = P_{1x} + P_{2x} + P_x + N_x = 0$$

$$\text{или} \quad \ddot{x}_C = 0,$$

где x_C – координата центра масс системы.

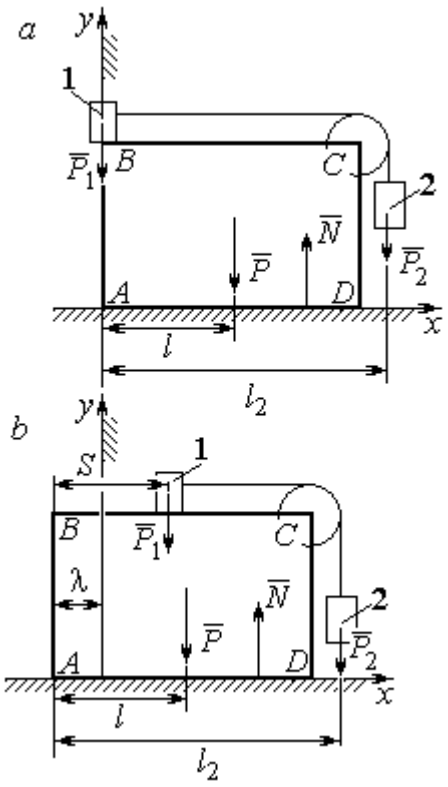


Рис. 5.2. Расчётная схема перемещения пирамиды: *a* – начальное положение; *b* – положение пирамиды при перемещении грузов на расстояние *S*

Проинтегрировав его дважды, получим закон движения центра масс системы: $x_C = C_1 t + C_2$, где константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. Предположим, в начальный момент движение в механической системе отсутствовало и координата центра масс системы была равна x_{C0} (на рис. 5.2, *a* не показана), то есть при $t = 0$ $x_C(0) = x_{C0}$ и $\dot{x}_C(0) = 0$. Подставляя начальные условия, получим: $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. В результате закон движения центра масс системы имеет вид: $x_C = x_{C0}$. Последнее означает, что при любом перемещении тел в системе координата центра масс системы на оси *Ax* остаётся постоянной, равной своему начальному значению.

Предположим, в начальный момент времени груз 1 находился у левого края призмы, как показано на рис. 5.2, *a*.

Начальная координата x_{C0} центра масс системы находится из равенства $(m_1 + m_2 + m)x_{C0} = \sum m_k x_k = m_1 \cdot 0 + m_2 l_2 + ml$, где l_2 – расстояние от начала координат до линии действия силы тяжести груза 2 (координата центра масс гру-

за 2 на оси Ax); l – аналогичное расстояние до линии действия силы тяжести пирамиды (см. рис. 5.2, *a*). Тогда начальная координата центра масс системы: $x_{C0} = \dfrac{m_2 l_2 + ml}{(m_1 + m_2 + m)}$.

Положение грузов в системе, после того как груз 1 переместился на расстояние *S*, и положение призмы показано на рис. 5.2, *b*. На рисунке отмечено, что при перемещении груза 1 вправо на расстояние *S* призма *ABCD* сместилась влево на расстояние λ. Координата x_{C1} центра масс для нового положения системы определяется из равенства:

$$(m_1 + m_2 + m)x_{C1} = m_1(S - \lambda) + m_2(l_2 - \lambda) + m(l - \lambda).$$

Выражая отсюда координату x_{C1} и приравнивая её начальному значению координаты центра масс $x_{C0} = x_{C1}$, найдём перемещение пирамиды $\lambda = \dfrac{m_1 S}{(m_1 + m_2 + m)}$. Подставляя данные задачи, получим $\lambda = 0{,}18$ м.

5.2. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси

Момент инерции однородного диска радиусом *R*, массой *m* относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска: $J_z = \dfrac{1}{2}mR^2$. **Для неоднородных тел момент инерции** относительно оси *z* вычисляется по формуле: $J_z = mi_z^2$, где i_z – радиус инерции тела.

Кинетическим моментом (моментом количества движения) системы относительно неподвижной оси *z* называется величина, равная сумме моментов количеств движения точек относительно этой оси $\vec{L}_z = \sum M_z(m_k \vec{V}_k)$.

Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*, кинетический момент: $L_z = J_z\omega$, где J_z и ω – момент инерции и угловая скорость

тела. **Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси**. Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижной оси z равна сумме моментов внешних сил относительно той же оси: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетического момента системы

Задача 55. Для подъёма груза используется лебёдка со ступенчатым барабаном и противовесом. Груз 1 массой m_1 поднимается на канате, навитом на барабан 2 массой m_2 радиуса R. Противовес 3 массой m_3 прикреплён к канату, который навит на малую ступень барабана радиуса r (рис. 5.3). Радиус инерции барабана относительно оси вращения i_z. На барабан действует постоянный момент сил сопротивления $M_c = 60$ Н·м. В начале движения к барабану лебёдки прикладывается вращающий момент, пропорциональный времени: $M_{вр} = 620 + 30t$ Н·м, который через 2 с отключается. Определить, на какую высоту поднимется груз, если движение началось из состояния покоя. Массы грузов и барабана: $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 50$ кг, $m_3 = 20$ кг. Радиусы ступеней барабана и радиус инерции: $R = 0{,}6$ м; $r = 0{,}4$ м; $i_z = 0{,}5$ м.

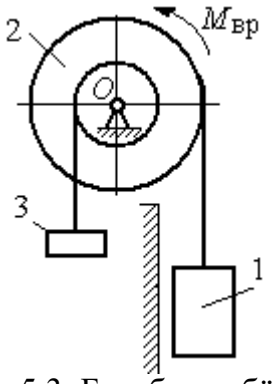


Рис. 5.3. Барабан лебёдки с грузом и противовесом

Решение

Решение следует рассматривать на двух этапах. На первом груз поднимается под действием вращающего момента, на втором – по инерции.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, барабана 2 и противовеса 3. На систему действуют силы тяжести груза $\vec{P}_1$, барабана $\vec{P}_2$, противовеса $\vec{P}_3$, реакция шарнира $\vec{R}$, пара сил с моментом, равным моменту вра-

щения $M_{вр}$, и пара сил с моментом сопротивления M_c. Направления векторов сил и моментов показаны на рис. 5.4. Выберем начало оси *y*, вдоль которой поднимается груз на первом участке движения, в точке начала движения (см. рис. 5.4).

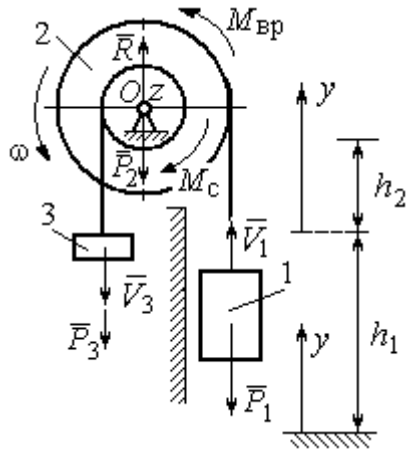


Рис. 5.4. Силы, действующие на систему во время движения

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*, проходящей через центр *O*: $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$. Кинетический момент системы относительно оси *z* равен сумме кинетических моментов барабана, груза и противовеса: $L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр}$. Кинетический момент барабана, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*: $L_z^{бар} = J_z\omega$, где J_z – момент инерции барабана относительно оси *z*, $J_z = m_2 i_z^2$; ω – угловая скорость барабана. Рассматривая груз и противовес как материальные точки, найдём их кинетические моменты относительно оси *z*: $L_z^{гр} = M_z(m_1\vec{V}_1) = m_1V_1R$; $L_z^{пр} = M_z(m_3\vec{V}_3) = m_3V_3r$.

Суммарный кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{бар} + L_z^{гр} + L_z^{пр} = m_2 i_z^2\omega + m_1V_1R + m_3V_3r.$$

Выразим скорости груза 1 и противовеса 3 через угловую скорость барабана: $V_1 = \omega R$, $V_3 = \omega r$ - и подставим их в выражение кинетического момента. Получим $L_z = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\omega = (m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{V_1}{R}$.

Суммарный момент внешних сил относительно оси *z*

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r.$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$(m_2 i_z^2 + m_1R^2 + m_3r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(M_{вр} - M_c - P_1R + P_3r\right)R,$$

или с учётом данных задачи $\frac{dV_1}{dt} = 0{,}58 + 0{,}35t$.

Дважды интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём скорость груза V_1 и проходимый им путь y как функции времени:

$$V_1(t) = 0{,}58t + 0{,}175t^2;\quad y(t) = 0{,}29t^2 + 0{,}058t^3.$$

Из уравнений движения найдём: при $t = 2$ с (конец первого участка) груз поднялся на высоту $h_1 = y(2) = 1{,}62$ м и имел скорость $V_1 = V_1(2) = 1{,}86$ м/с.

На втором участке движения груз продолжает подниматься вверх. Уравнение движения груза здесь аналогично первому участку, за исключением вращающего момента (см. рис. 5.4):

$$(m_2 i_z^2 + m_1 R^2 + m_3 r^2)\frac{dV_1}{dt} = \left(-M_c - P_1 R + P_3 r\right)R, \text{ или } \frac{dV_1}{dt} = -6{,}61.$$

Представим ускорение груза в виде: $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1 dy}{dy dt} = V_1 \frac{dV_1}{dy}$. Теперь уравнение движения груза на втором участке имеет вид: $V_1 \frac{dV_1}{dy} = -6{,}61$. Интегрируя его, получим зависимость скорости груза от пройденного пути $\frac{V_1^2}{2} = -6{,}61y + C_3$. Выберем начало второго участка на высоте h_1. Из начальных условий движения груза: при $t = 0$, $y = 0$, $V_1 = 1{,}86$ м/с, получим: $C_3 = 1{,}73$.

Максимальную высоту h_2, на которую поднялся груз на втором участке, определим из условия, что в этой точке скорость груза обращается в нуль. Имеем $0 = -6{,}61h_2 + 1{,}73$, откуда $h_2 = 0{,}26$ м. Максимальная высота подъёма груза $H = h_1 + h_2 = 1{,}88$ м.

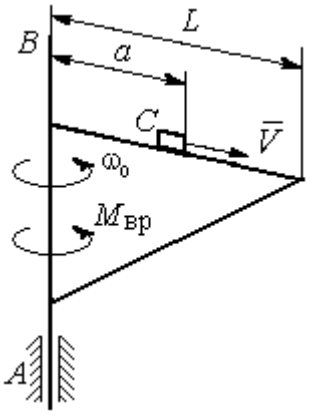


Рис. 5.5. Поворотный кран

Задача 56. Тележка C поворотного подъёмного крана (рис. 5.5) движется с постоянной относительно стрелы скоростью $V = 0{,}5$ м/с. Длина стрелы

L = 10 м, масса тележки с грузом m_1 = 100 кг, момент инерции крана относительно оси вращения AB без учёта тележки и груза J = 1800 кг·м^2. Двигатель крана создаёт постоянный вращающий момент $M_{вр}$ = 400 Н·м. Определить угловую скорость крана в момент, когда тележка достигнет края стрелы, если в начальный момент конструкция вращалась с угловой скоростью ω_0 = 2 рад/с, а тележка находилась на расстоянии a = 1 м от оси вращения.

Решение

На систему действуют внешние силы: $\vec{P}_1$ – сила тяжести тележки с грузом, $\vec{P}_2$ – сила тяжести поворотного крана (на рис. 5.6 показана в условном центре тяжести крана); $\vec{R}_x$, $\vec{R}_y$ – составляющие реакции подшипника A и пара сил с моментом, равным вращающему моменту $M_{вр}$ (см. рис. 5.6). Применим к описанию движения системы теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения z, направленной вдоль линии AB.

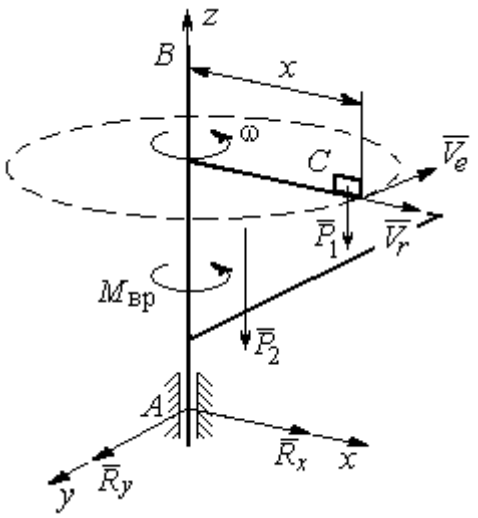


Рис. 5.6. Внешние силы, действующие на кран при его движении

Поскольку силы тяжести параллельны оси вращения крана, а составляющие реакции шарнира A пересекают её, то моменты этих сил относительно оси z равны нулю и теорема об изменении кинетического момента системы принимает вид: $\frac{dL_z}{dt} = M_{вр}$. Интегрируя это уравнение при постоянном вращающем моменте, получим равенство: $L_z - L_{z0} = M_{вр}t$, где L_z, L_{z0} – кинетический момент системы в текущий и начальный моменты времени.

Кинетический момент системы L_z равен сумме: $L_z = L_z^{кран} + L_z^{груз}$. Кинетический момент крана как твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной

оси: $L_z^{\text{кран}} = J\omega$. Полагая тележку с грузом материальной точкой, определим её кинетический момент $L_z^{\text{груз}}$, как момент вектора количества движения тележки относительно оси *z*. Тележка с грузом участвует в сложном движении. Вектор абсолютной скорости тележки $\vec{V}_{\text{абс}}$ равен сумме $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $\vec{V}_r$ относительная скорость тележки (перемещение по стреле крана); $\vec{V}_e$ – переносная скорость (движение вместе с краном). Воспользовавшись теоремой Вариньона при вычислении момента количества движения тележки с грузом, получим:

$$L_z^{\text{груз}} = M_z(m_1\vec{V}_{\text{абс}}) = M_z(m_1\vec{V}_e + m_1\vec{V}_r) = M_z(m_1\vec{V}_e) = m_1V_ex = m_1\omega x^2.$$

В результате суммарный кинетический момент системы в текущий момент времени $L_z = L_z^{\text{кран}} + L_z^{\text{груз}} = \left(J + m_1x^2\right)\omega$. Тогда начальный кинетический момент систем: $L_{z0} = \left(J + m_1a^2\right)\omega_0$.

Подставляя выражения начального и текущего кинетического моментов в уравнение движения, получим: $\left(J + m_1x^2\right)\omega - \left(J + m_1a^2\right)\omega_0 = M_{\text{вр}}t$, откуда закон изменения угловой скорости крана $\omega = \dfrac{M_{\text{вр}}t + \left(J + m_1a^2\right)\omega_0}{\left(J + m_1x^2\right)}$. Момент времени $t_{\text{к}}$, когда тележка достигнет края стрелы ($x = L$), найдём из условия движения тележки по стреле с постоянной скоростью: $Vt_{\text{к}} = L - a$. С учётом данных задачи угловая скорость крана в этот момент $\omega(t_{\text{к}}) = 0{,}93$ рад/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении $T = \dfrac{1}{2}mV_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела; **при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \dfrac{1}{2}J_z\omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси *z*; ω – угловая скорость тела; **при плоскопа-**

раллельном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной силы F при прямолинейном перемещении точки приложения силы $A = FS\cos\alpha$, где S – перемещение точки; α – постоянный угол между перемещением и направлением силы. **Работа пары сил с постоянным моментом** M при повороте тела на конечный угол φ вычисляется по формуле: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы F называют величину, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$, где V – скорость точки приложения силы. При плоском движении тела мощность силы равна сумме скалярных произведений: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$, где V_O – скорость точки, выбранной полюсом; ω – угловая скорость тела; $\vec{M}_O = M_O(\vec{F})$ – момент силы относительно полюса. Если в качестве полюса выбрать точку K – мгновенный центр скоростей, то мощность силы $N(\vec{F}) = \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}$, где $M_K(\vec{F})$ – момент силы относительно мгновенного центра скоростей.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы при перемещении её

из начального состояния в текущее равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ и сумма мощностей внутренних сил равны нулю: $\sum A(\vec{F}_k^i) = 0$.

Примеры решения задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы

Задача 57. Планетарный механизм, позволяющий получать повышенные передаточные отношения угловых скоростей, состоит из трех одинаковых колёс, соединённых кривошипом *OA* (рис. 5.7). Колесо 1 неподвижно, кривошип *OA* вращается с угловой скоростью ω_{OA} и приводит в движение колёса 2 и 3. Полагая массы колёс и их радиусы одинаковыми, равными *m* и *r,* и пренебрегая массой кривошипа, найти кинетическую энергию механизма.

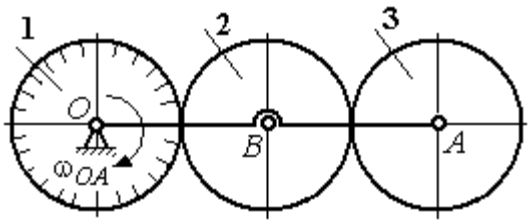


Рис. 5.7. Планетарный механизм

Решение

Кинетическая энергия механизма *T* равна сумме энергий колёс 2 и 3: $T = T_2 + T_3$. Энергия колеса 1 равна нулю потому, что оно неподвижно, а энергия кривошипа равна нулю, так как массой кривошипа пренебрегаем. При движении механизма колесо 2, увлекаемое кривошипом, катится по неподвижной поверхности первого колеса. Энергия колеса 2:

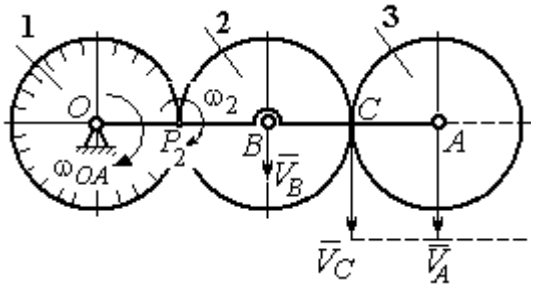


Рис. 5.8. Расчётная схема вычисления энергии механизма

$T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{J_{2B}\omega_2^2}{2}$, где V_B – скорость центра масс колеса 2, J_{2B} – момент инерции колеса 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости колеса, $J_{2B} = \frac{mr^2}{2}$.

Выразим кинетическую энергию колеса 2 через угловую скорость ω_{OA} кривошипа OA.

Скорость точки B, лежащей на кривошипе OA: $V_B = \omega_{OA} \cdot OB = \omega_{OA} 2r$.

Так как точка P_2 касания колёс 1 и 2 является мгновенным центром скоростей колеса 2 (рис. 5.8), угловая скорость колеса 2 $\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2}$. В результате получим: $\omega_2 = 2\omega_{OA}$. Подставив зависимости V_B и ω_2 в выражение кинетической энергии колеса 2, найдём:

$$T_2 = \frac{m(\omega_{OA} 2r)^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{(2\omega_{OA})^2}{2} = 3m\omega_{OA}^2 r^2.$$

Вычислим кинетическую энергию колеса 3. Найдём скорость точки C, считая, что она принадлежит колесу 2: $V_C = \omega_2 \cdot P_2C = 4\omega_{OA} r$. Скорость точки A – центра колеса 3 определим, полагая, что точка A лежит и на кривошипе: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4\omega_{OA} r$. Скорости двух точек A и C колеса 3 равны и параллельны, причём линия AC перпендикулярна векторам скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (см. рис. 5.8). В этом случае мгновенный центр скоростей отсутствует и колесо 3 совершает мгновенно-поступательное движение. Энергия поступательного движения колеса 3: $T_3 = \frac{mV_A^2}{2} = \frac{m(4\omega_{OA} r)^2}{2} = 8m\omega_{OA}^2 r^2$.

Окончательно, энергия механизма: $T = T_2 + T_3 = 11m\omega_{OA}^2 r^2$.

Задача 58. Горизонтальный желоб DE опирается на блок 1 и на каток 3 одинакового радиуса r (рис. 5.9). Блок 1 весом P_1 вращается вокруг неподвиж-

ной оси O_1. Каток 3 катится по горизонтальному рельсу без проскальзывания. На одной оси с катком 3 жестко связано колесо 2 радиуса R. Их общий вес равен Q, а общий радиус инерции относительно оси z, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости катка, равен i_z. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Массой желоба пренебрегаем. Скольжение между желобом и блоком 1, а также катком 3 отсутствует. Определить ускорение центра масс колеса 2 и катка 3 и угловое ускорение блока 1, если: P_1 = 40 Н, Q = 60 Н, F = 50 Н, M = 45 Н·м, R = 0,8 м, r = 0,6 м, i_z = 0,4 м.

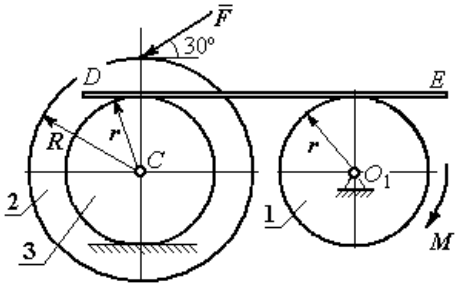


Рис. 5.9. Схема движения механической системы

Решение

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемых механических систем: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

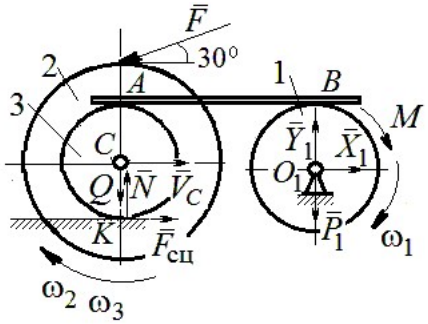


Рис. 5.10. Расчетная схема для исследования движения системы

Предположим, во время движения системы блок 1 вращается по ходу часовой стрелки.

Угловые скорости ω_1, ω_2 блока 1, катка 3 и скорость $\vec{V}_C$ центра масс катка 3 показаны на рис. 5.10. Угловая скорость колеса 2 и катка 3 равны: $\omega_3 = \omega_2$.

Кинетическая энергия вращательного движения блока 1 $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$,

где J_{zO_1} – осевой момент инерции блока, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$.

Фигура, состоящая из катка 3 и колеса 2, двигается плоскопараллельно. Кинетическая энергия фигуры определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где m – общая масса катка и колеса, $m = \frac{Q}{g}$, J_{zC} – момент инерции фигуры относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m i_z^2$,

У катка 3 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка K на рис. 5.10). Тогда $\omega_3 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки A катка $V_A = \omega_3 2r = 2V_C$. Приравнивая скорость точки A на катке 2 к скорости точки B на блоке 1, получим $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

Найдём кинетическую энергию системы, выраженную через скорость центра масс катка 3:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{Q}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) V_C^2 = \frac{V_C^2}{2g}\left[2P_1 + Q\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил.

На блок 1 действуют: сила тяжести $\vec{P}_1$, пара сил с моментом M и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ (рис. 5.10). Мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Момент M направлен в сторону вращения блока 1, его мощность $N(M) = M\omega_1 = M\frac{2V_C}{r}$.

На каток 3 (вместе с жестко связанным с ним колесом 2) действуют: сила $\vec{F}$, сила тяжести $\vec{Q}$ катка и колеса, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ катка 3 с поверхностью.

Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей катка 3, скорость которого равна нулю. Мощность силы тяжести $\vec{Q}$ равна нулю, так как угол между вектором силы и вектором скорости точки C равен 90°.

Для определения мощности силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2. С учётом того, что скорость $V_K = 0$, получим:

$$N(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}_K + \vec{M}_K(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}_2 = \vec{M}_K(\vec{F})\vec{\omega}_2 =$$

$$= -F(r+R)\omega_2 \cos 30° = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30°.$$

Поскольку вращение, создаваемое моментом силы $\vec{F}$ относительно центра K, противоположно выбранному направлению угловой скорости катка, мощность силы $\vec{F}$ отрицательная.

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -FV_C\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + M\frac{2V_C}{r}.$$

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы. Находим производную по времени от кинетической энергии системы $\frac{dT}{dt} = \frac{V_C}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]$ и приравниваем суммарной мощности внешних сил. Получим:

$$\frac{1}{g}a_C\left[2P_1 + Q\left(1+\frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos 30° + \frac{2M}{r},$$

откуда с учётом исходных данных задачи ускорение центра масс диска 2 $a_C = 2{,}88$ м/с^2. Для определения углового ускорения блока 1 продифференцируем по времени равенство $\omega_1 = \dfrac{2V_C}{r}$. Получим: $\varepsilon_1 = \dfrac{2a_C}{r} = 9{,}6$ рад/с^2.

Задача 59. Каток радиуса *r*, весом *P* закатывают вверх по наклонной плоскости приложив в центре катка силу $\vec{F}$ под углом 30° к наклонной плоскости (рис. 5.11). Сама плоскость наклонена под углом 30° к горизонту. Величина силы *F* = 2*P*. В начальном положении центр катка имел скорость V_0.

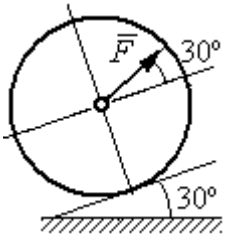


Рис. 5.11. Движение катка на наклонной плоскости

На какое расстояние *S* переместился центр катка, если в конце перемещения его скорость удвоилась.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии на конечном перемещении системы: $T - T_0 = \sum A(F_k)$. На каток действует сила тяжести $\vec{P}$, сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с наклонной плоскостью (рис. 5.12). При перемещении центра катка на расстояние *S* вдоль наклонной плоскости работу совершают только сила $\vec{F}$: $A(\vec{F}) = F\cos 30° S$ и сила тяжести: $A(\vec{P}) = -Ph$, где *h* – перепад высот при перемещении центра масс катка. Работа реакции опоры и силы сцепления равна нулю.

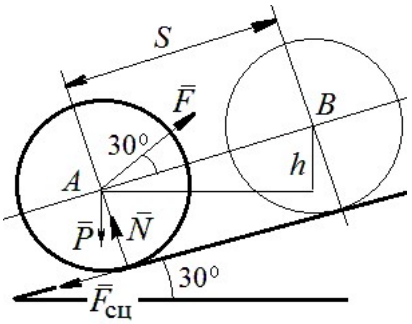


Рис. 5.12. Расчётная схема движения катка

Кинетическая энергия катка $T = \dfrac{1}{2}mV_A^2 + \dfrac{1}{2}J_{zA}\omega^2$, где J_{zA} – момент инерции фигуры относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zA} = \dfrac{mr^2}{2}$. Выражая угловую скорость катка через

скорость центра масс $\omega = \dfrac{V_A}{r}$, с учётом выражения момента инерции катка, получим энергию катка в виде: $T = \dfrac{3}{4} m V_A^2$.

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии при перемещении центра катка на расстояние S: $\dfrac{3}{4} m V_B^2 - \dfrac{3}{4} m V_A^2 = F\cos 30° S - Ph$, где $V_A = V_0$ $V_B = 2V_0$, $F = 2P$, $h = S\sin 30°$.

Найдём искомое перемещение: $S = \dfrac{9V_0^2}{4g\left(2\cos 30° - \sin 30°\right)}$.

Упражнения

Упражнение 5.1. Крановая тележка массы m_1 может перемещаться по горизонтальной балке без трения (рис. 5.13). В центре масс тележки закреплён трос длиной l, на другом конце которого привязан груз массы m_2. Трос может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости. В начальный момент трос был в вертикальном положении. Определить горизонтальное перемещение тележки в зависимости от угла наклона троса. Весом троса пренебречь.

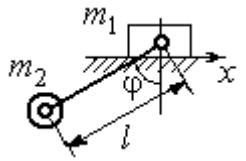


Рис. 5.13. Движение крановой тележки

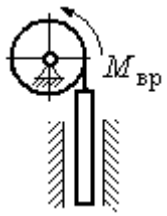


Рис. 5.14. Схема механизма лебёдки

Упражнение 5.2. К барабану лебёдки, поднимающей штангу, приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M_{ВР} = kt$ (рис. 5.14). Штанга массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан массы m_2 и радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить угловую скорость барабана, считая его однородным диском.

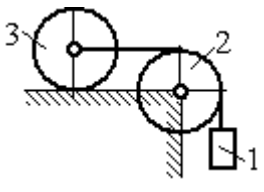


Рис. 5.15. Схема движения системы

Упражнение 5.3. Груз 1 массы m_1 подвешен на нерастяжимом тросе, другой конец которого переброшен через блок 2 и закреплён в центре масс катка 3 (рис. 5.15). Каток 3 катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Блок 2 и каток 3 – однородные диски массы m_2 и m_3, радиуса r. В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость груза, когда он опустится на высоту h, если к катку 3 приложен момент M.

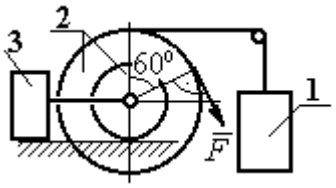


Рис. 5.16. Схема механизма катка

Упражнение 5.4. Механическая система включает два груза 1 и 3 одинакового веса P и каток 2 весом $2P$, радиусом $R = 2r$ с цилиндрическим выступом радиусом r (рис. 5.16). Каток катится выступом по неподвижной поверхности без проскальзывания. К катку по касательной к окружности приложена сила $F = 2P$. Найти ускорение центра масс катка, если его радиус инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения: $i_{zC} = r\sqrt{2}$.

5.4. Применение общих теорем динамики системы к описанию движений твёрдого тела

Поступательное движение твердого тела описывается дифференциальными уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F^e_{kz}$ - или в алгебраической форме $ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}$, $ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}$, $ma_{Cz} = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; $\ddot{x} = a_{Cx}$, $\ddot{y} = a_{Cy}$, $\ddot{z} = a_{Cz}$ – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции внешних сил.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается дифференциальным уравнением: $J_z \dfrac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$ или алгебраическим уравнением: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается уравнениями движения центра масс и вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx};\ ma_{Cy} = \sum F^e_{ky};\ J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела; F^e_{kx}, F^e_{ky} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение каждого тела системы в отдельности, предварительно освободив его от связей и заменив их действие реакциями.

Примеры решения задач на составление уравнений движения твердых тел

Задача 59. Лебёдка поднимает груз 1 массы $m_1 = 50$ кг посредством троса, переброшенного через блок 3 и навитого на барабан 2 массы $m_2 = 20$ кг, радиуса $r = 0{,}8$ м (рис. 5.17). К барабану приложен постоянный вращающий момент $M_{вр} = 480$ Н·м. Определить ускорение груза, натяжение троса и реакцию шарнира барабана 2. Весом троса и массой блока 3 пренебречь, барабан считать сплошным цилиндром.

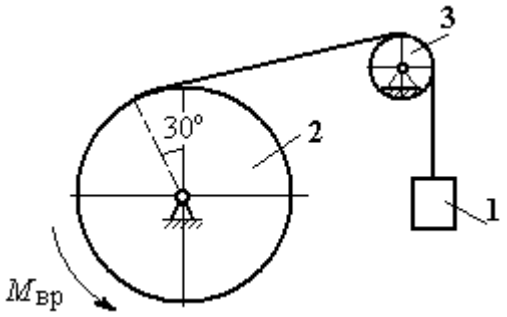


Рис. 5.17. Механизм лебёдки

Решение

Составим уравнение движения груза 1. Для этого освобождаем груз от связей, заменив действие троса реакцией. На груз действует сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция троса $\vec{H}_1$ (рис. 5.18). Выберем ось *x* по направлению движения груза. Уравнение движения груза в проекции на ось *x*: $m_1 a_1 = H_1 - P_1$.

Рассмотрим движение барабана 2. Освободим барабан от связей и заменим их действие реакциями.

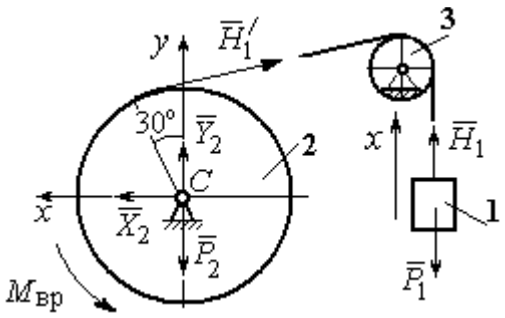


Рис. 5.18. Внешние силы и реакции, действующие на груз и барабан при движении системы

На барабан действует сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом вращения $M_{вр}$, реакция троса $\vec{H}_1'$ и реакция шарнира (на рис. 5.18 разложена на составляющие $\vec{X}_2$, $\vec{Y}_2$). Так как массой блока 3 пренебрегаем, то модули сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$ равны. Направления действия сил и момента показаны на рис. 5.18.

Уравнение вращательного движения барабана относительно оси z: $J_z\varepsilon_2 = \sum M_z(F_k) = M_{вр} - H_1'r$, где момент инерции барабана $J_z = \dfrac{m_2 r^2}{2}$.

Продифференцируем по времени равенство $V_1 = \omega_2 r$ и выразим угловое ускорение барабана через ускорение груза 1. Получим $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Подставляя выражение углового ускорения в уравнение вращательного движения барабана с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, напишем уравнения движения барабана и груза в виде системы уравнений:

$$m_1 a_1 = H_1 - P_1, \;\; m_2 a_1 = \frac{2M_{вр}}{r} - 2H_1,$$

откуда находим a_1= 1,82 м/с^2, H_1 = 581,8 Н. Натяжение троса численно равно реакции.

Для определения реакции шарнира составим (формально) уравнение движения центра масс блока 2 в проекциях на оси x, y (см. рис. 5.18):

$$m_2 a_{Cx} = X_2 - H_1'\cos 30^\circ = 0, \; m_2 a_{Cy} = Y_2 + H_1'\cos 60^\circ - P_2 = 0.$$

Отсюда $X_2 = 503{,}84$ Н, $Y_2 = -94{,}7$ Н, $R_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = 512{,}66$ Н.

Задача 60. Барабан весом G, радиусом R имеет цилиндрический выступ радиусом r (рис. 5.19). Барабан скатывается по наклонной плоскости с углом наклона 30°, опираясь на неё поверхностью выступа. К барабану приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ направлена по касательной к поверхности барабана. Сила $\vec{F}_2$ действует под углом 30° к диаметру барабана, перпендикулярному наклонной плоскости. В начальный момент времени барабан приведён в равновесие парой сил с моментом M.

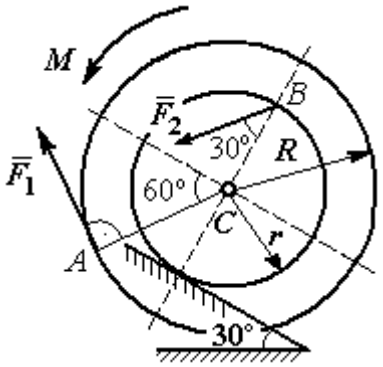


Рис. 5.19. Схема движения барабана по наклонной плоскости

Определить угловое ускорение барабана и закон движения центра масс, если в положении равновесия величину уравновешивающего момента увеличить в 1,2 раза. Исходные данные для решения задачи: R = 0,6 м, r = 0,2 м, G = 100 Н, F_1 = 60 Н, F_2 = 25 Н, радиус инерции барабана i_z = 0,4 м.

Решение

На барабан действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{G}$, пара сил с неизвестным моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}_{сц}$ сцепления барабана с поверхностью. Сила сцепления приложена в точке K касания выступа барабана с наклонной плоскостью и направлена вдоль неё (рис. 5.20).

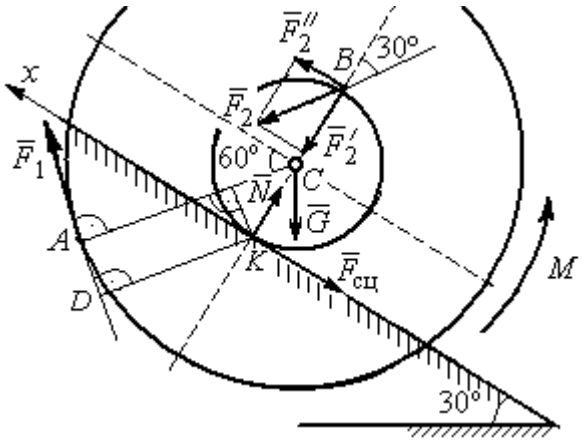


Рис. 5.20. Силы, действующие на барабан, во время движения

Для определения момента M, приводящего барабан в равновесие, запишем уравнение равно-

весия в виде равенства нулю моментов сил $\sum M_K(\vec{F}_k^e) = 0$ относительно точки *K*. Точка *K* выбрана с той целью, что в уравнение не будет входить момент неизвестной силы сцепления.

На рис. 5.20 показано разложение силы $\vec{F}_2$: $\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \vec{F}_2''$. Значения составляющих определяются как проекции: $F_2' = F_2\cos 30°$, $F_2'' = F_2\sin 30°$.

Применяя теорему Вариньона, вычислим момент силы $\vec{F}_2$ относительно точки *K*: $M_K(\vec{F}_2) = M_K(\vec{F}_2') + M_K(\vec{F}_2'') = F_2\sin 30° \cdot 2r$.

Момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки *K*:

$$M_K(\vec{F}_1) = -F_1 \cdot KD = -F_1(R - r\cos 30°).$$

В результате уравнение моментов сил при равновесии барабана принимает вид

$$\sum M_K(\vec{F}_k^e) = -F_1(R - r\cos 30°) + F_2\sin 30° \cdot 2r - Gr\sin 30° + M = 0.$$

Подставляя сюда исходные данные задачи, находим величину уравновешивающего момента $M = 30{,}61$ Н·м. Направление момента показано дуговой стрелкой на рис. 5.20.

Увеличим значение момента *M*, удерживающего барабан в равновесии, в 1,2 раза: $M_1 = 1{,}2M$. Возникшее после этого качение барабана вверх по наклонной плоскости представляет собой плоскопараллельное движение, которое описывается с применением теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Уравнение движения центра масс барабана в проекции на ось *x*, направленную вверх по наклонной плоскости, имеет вид:

$$m\ddot{x}_C = F_1\cos 30° + F_2\cos 60° - G\cos 60° - F_{\text{сц}},$$

где x_C – координата центра масс барабана.

Применив теорему об изменении кинетического момента барабана относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости

движения и считая моменты сил положительными, если они создают вращение в сторону движущегося вверх барабана, выразим уравнение вращательного движения барабана вокруг оси z в виде:

$$J_{zC}\ddot{\varphi} = -F_1 R + F_2 r\cos 60° + F_{\text{сц}} r + M_1,$$

где φ – угол поворота барабана; J_{zC} – момент инерции барабана, $J_{zC} = mi_z^2$; i_z – радиус инерции. С учётом соотношения $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r}$ получим уравнение:

$$m\ddot{x}_C\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right) = -F_1\left(\frac{R}{r} - \cos 30°\right) + 2F_2\cos 60° - G\cos 60° + \frac{M_1}{r}.$$

После подстановки данных задачи находим дифференциальное уравнение движения центра масс: $\ddot{x}_C = 0{,}6$. Дважды интегрируя его с нулевыми начальными условиями (так как движение началось из состояния покоя), находим закон движения центра масс: $x_C = 0{,}3t^2$ м. Из уравнения следует, что барабан движется в сторону положительного направления оси x.

Угловое ускорение барабана $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r} = 3$ рад/с^2.

Задача 61. Механизм (рис. 5.21) включает в себя груз 1, каток 2 и ступенчатый барабан 3, соединённых нерастяжимыми нитями. Движение механизма происходит из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы

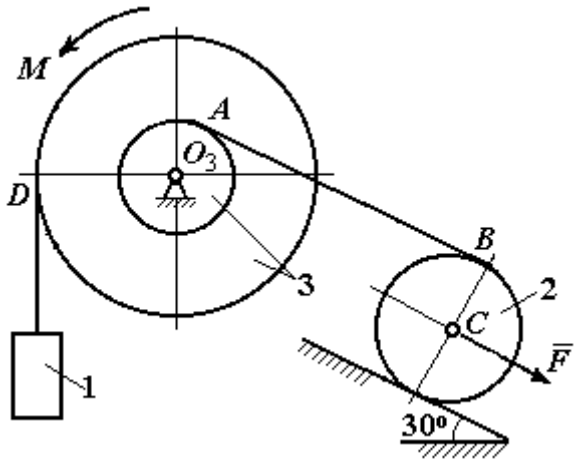


Рис. 5.21. Конструкция механической системы

$\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, и пары сил с моментом M, приложенной к барабану 3. Качение катка 2 по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30º происходит без проскальзывания.

Каток 2 считать однородным диском радиуса R_2. Радиусы ступеней барабана 3: R_3, r_3, радиус инерции барабана i_3.

Найти ускорение груза 1, силы натяжения нитей и динамическую реакцию шарнира барабана 3, если $P_1 = P_2 = 2P$; $P_3 = 3P$, $F = 3P$; $M = Pr$, $R_2 = 2r$; $R_3 = 3r$; $r_3 = r$; $i_3 = r\sqrt{3}$.

Решение

Рассмотрим движение каждого тела системы отдельно, предварительно освободив тела от связей и заменив их действие реакциями. На рис. 5.22 изображены силы, действующие на тела системы, после освобождения их от связей и направление движения каждого тела.

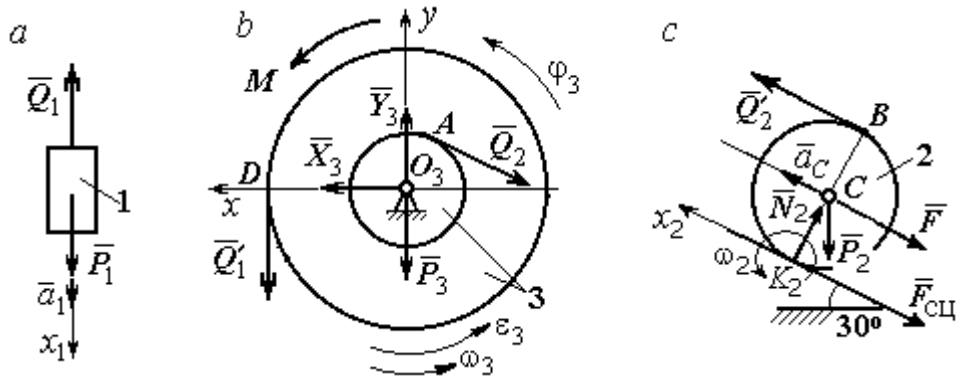


Рис. 5.22. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему

Допустим, груз движется вниз со скоростью V_1, ускорением a_1. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.22, *a*). Направим ось x_1 в сторону движения груза. Уравнение движения груза вдоль оси x_1 имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1 .$$

Барабан 3 вращается вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс O_3. На диск 3 действует сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника $\vec{R}_3$ (на

рис. 5.22, *b* показано разложение реакции на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$), пара сил с моментом *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$.

При составлении уравнения вращательного движения барабана моменты сил относительно оси считаем положительными, если они создают поворот в сторону вращения барабана. Уравнение вращения барабана 3 имеет вид:

$$J_{zO_3}\varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1'R_3 + M - Q_2r_3 = Q_1'3r + Pr - Q_2r,$$

Момент инерции барабана относительно оси *z*: $J_{zO_3} = m_3i_3^2 = \dfrac{9Pr^2}{g}$;

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$, нормальная реакция $\vec{N}_2$ наклонной плоскости и сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления диска с поверхностью (рис. 5.22, *c*).

Выберем ось x_2 по направлению движения центра масс катка 2. Плоскопараллельное движение катка описывается уравнениями движения его центра масс в проекции на ось x_2 и вращения вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2\cos 60^\circ = Q_2' - 3P - F_{\text{сц}} - P;$$

$$J_C\varepsilon_2 = Q_2'R_2 + F_{\text{сц}}R_2 = Q_2'2r + F_{\text{сц}}2r,\ \ J_C = \frac{m_2R_2^2}{2}.$$

При составлении второго уравнения момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения катка.

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей между ускорениями точек и угловыми ускорениями тел. Предположим, скорость центра масс катка 2 равна V_C (см. рис. 5.22, *c*). Угловая скорость катка $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK_2} = \dfrac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от

центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей. Продифференцировав по времени последнее равенство, получим: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \dfrac{\dot{V}_C}{R_2} = \dfrac{a_C}{2r}$.

Скорость точки B катка 2 $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = 2V_C$. Приравняв скорость точки A к скорости точки B (см. рис. 5.21), получим: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \dfrac{2V_C}{r}$. После дифференцирования найдём: $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс катка 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда ускорение груза 1 $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения с учётом равенства модулей сил $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_1$, а также $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ получим систему:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1; \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}; \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

откуда находим: $a_C = 0{,}09g$, $Q_1 = 0{,}92P$, $Q_2 = 2{,}14P$.

Динамические реакции $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, действующие на ось вращающегося барабана 3 (рис. 5.22, *b*), определяются из уравнений, которые можно получить, формально применив к барабану теорему о движении центра масс. Так как центр масс барабана 3 неподвижен, его ускорение равно нулю, $a_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения его центра масс в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя значения $Q_1 = 0{,}92P$ и $Q_2 = 2{,}14P$, находим составляющие реакции оси барабана 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$.

Полная величина реакции оси барабана 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

Задача 62. Подъёмное устройство (рис. 5.23) состоит из однородного диска 1 массой m_1, радиусом r_1, ступенчатого диска 2 массой $m_2 = 3m_1$, радиусом $R_2 = 4r_1$ и радиусом ступеньки $r_2 = r_1$ и груза 3 массой $m_3 = 2m_1$. Система движется из состояния покоя в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом $M = m_1 g r_1$, приложенной к диску 1. Определить ускорение груза 3 и натяжение нити груза 3, если радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, походящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска 2, $i_{2C} = 2r_1$.

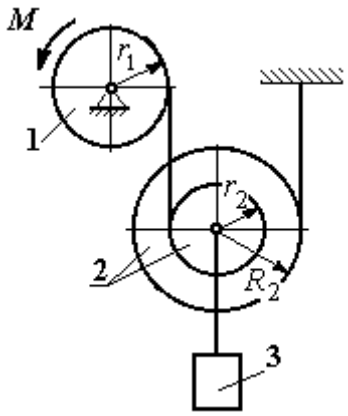


Рис. 5.23. Конструкция подъёмного устройства

Решение задачи осуществить с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы и проверить его методом динамического расчёта, составляя уравнения движения тел, входящих в систему.

Решение

1. Для неизменяемой системы (состоящей из абсолютно твёрдых тел, соединённых нерастяжимыми нитями), движущейся из состояния покоя, теорема об изменении кинетической энергии на конечном перемещении имеет вид $T = \sum A(\vec{F}_k^e)$. Схема движения механизма в предположении, что груз 3 опускается, показана на рис. 5.24.

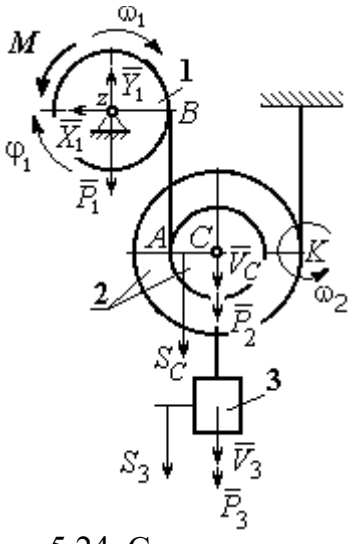


Рис. 5.24. Схема движения механизма

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси z. Кинетическая энергия диска 1: $T_1 = \dfrac{J_{1z}\omega_1^2}{2}$, где момент инерции диска $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

У диска 2 плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия диска 2: $T_2 = \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2}$, где V_C – скорость центра масс диска 2. Момент инерции диска 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно движению диска, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$.

Кинетическая энергия груза 3: $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}$.

Энергия механизма равна сумме энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_{1z}\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_{2C}\omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Выразим угловые скорости дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 через скорость груза 3.

Скорость центра масс диска 2 равна скорости груза 3, $V_C = V_3$. Угловая скорость диска 2 $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_3}{R_2}$, где CK – расстояние от центра диска 2 до его мгновенного центра скоростей.

Скорость точки B нити равна скорости точки A. Из равенства $\omega_1 r_1 = \omega_2 (R_2 + r_2)$ найдём: $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\omega_2 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$.

Подставляя найденные зависимости в выражение энергии системы, получим кинетическую энергию механизма:

$$T = \frac{V_3^2}{2}\left[\frac{m_1}{2}\left(1 + \frac{r_2}{R_2}\right)^2 + m_2\left(1 + \frac{i_{2C}^2}{R_2^2}\right) + m_3\right] = \frac{209}{64} m_1 V_3^2.$$

Во время движения механизма работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом M. Перемещения S_C и S_3 точек приложения сил $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и угол φ_1 поворота диска 1 показаны на рис. 5.24.

Сумма работ сил $\sum A(\vec{F}_k^e) = P_3S_3 + P_2S_C - M\varphi_1$. Работа момента отрицательная, так как заданное направление момента противоположно выбранному направлению вращения колеса 1.

Выразим перемещение центра масс диска 2 и угол поворота диска 1 через перемещение груза 3. Проинтегрировав равенство скоростей $V_3 = V_C$, получим равенство перемещений: $S_3 = S_C$. Аналогично, из равенства $\omega_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{V_3}{R_2}$ следует соотношение $\varphi_1 = \frac{(r_2 + R_2)}{r_1}\frac{S_3}{R_2}$.

В итоге суммарная работа внешних сил в механизме:

$$\sum A(\vec{F}_k^e) = \left[P_3 + P_2 - M\frac{(r_2 + R_2)}{r_1 R_2} \right] S_3 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 .$$

Составляя уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы, получим равенство:

$$\frac{209}{64} m_1 V_3^2 = \frac{15}{4} m_1 g S_3 \text{ или } V_3^2 = \frac{240}{209} g S_3 .$$

Продифференцируем последнее равенство. Получим: $2V_3\frac{dV_3}{dt} = \frac{240}{209} g \frac{dS_3}{dt}$.

Так как $\frac{dS_3}{dt} = V_3$, а $\frac{dV_3}{dt} = a_3$, находим ускорение груза 3: $a_3 = \frac{120}{209} g$ м/с^2.

Для того чтобы найти натяжение нити груза 3, необходимо написать уравнение его движения. Выделим груз 3 из системы, заменив действие нити её реакцией H_3. Выберем ось x по направлению движения груза. Применим к описанию движения груза теорему о движении центра масс, написав её проекцию на ось x: $m_3 a_3 = P_3 - H_3$, где H_3 –реакция нити. При известном ускорении a_3 находим реакцию нити $H_3 = \frac{178}{209} m_1 g$. Натяжение нити численно равно реакции, но направлено в противоположную сторону.

2. Для решения задачи вторым способом – путём составления уравнений движения тел, входящих в состав механизма, освободим тела от связей и заменим их реакциями. На рис. 5.25 изображены силы и реакции, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей, а также направления угловых ускорений тел и ускорения центров масс.

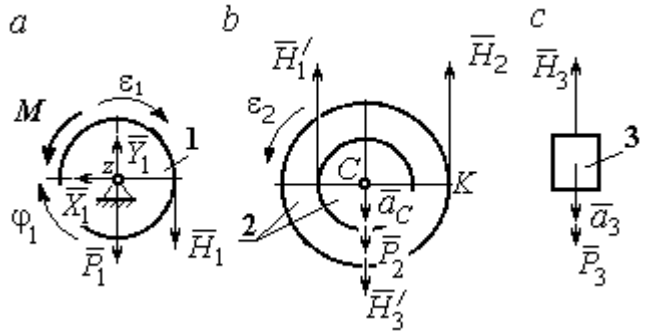


Рис. 5.25. Внешние силы и реакции связей, действующие на тела системы

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси *z*. На диск действует сила тяжести $\vec{P}_1$, реакция подшипника $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, пара сил с моментом *M* и реакция нити $\vec{H}_1$. Вращение диска описывается уравнением: $J_{1z}\varepsilon_1 = \sum M_z(F_k) = H_1 r_1 - M$. Момент инерции диска 1 относительно оси *z*, $J_{1z} = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$.

Диск 2 (рис. 5.25, *b*) совершает плоскопараллельное движение. К нему приложена сила тяжести $\vec{P}_2$ и реакции нитей $\vec{H}_1'$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3'$. Плоскопараллельное движение диска 2 описывается уравнением движения его центра масс в проекции на вертикальную ось и уравнением вращения диска вокруг оси, походящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска:

$$m_2 a_C = P_2 - H_1' - H_2 + H_3'; \;\; J_{2C}\varepsilon_2 = H_2 R_2 - H_1' r_2 .$$

Момент инерции диска 2 $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$. При составлении уравнения вращательного движения диска 2 момент силы считается положительным, если он создаёт поворот в сторону вращения диска.

Груз 3 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 5.25, *c*). Уравнение движения груза 3 в проекции на вертикальную ось, направленную в сторону его движения, имеет вид:

$$m_3 a_3 = P_3 - H_3 ,$$

Выразим угловые ускорения дисков 1 и 2 и ускорение центра масс диска 2 через ускорение груза 3. Для этого нужно продифференцировать соответствующие кинематические соотношения между скоростями. Так, из найденных ранее выражений: $V_3 = V_C$, $\omega_2 = \dfrac{V_3}{R_2}$, $\omega_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{V_3}{R_2}$ следует: $a_3 = a_C$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_3}{R_2}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{(r_2 + R_2)}{r_1}\dfrac{a_3}{R_2}$.

Подставляя кинематические соотношения между ускорениями в уравнения движения тел с учётом равенства модулей сил $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_1'$, а также $\vec{H}_3$ и $\vec{H}_3'$, получим систему уравнений, описывающих движение звеньев механизма:

$$\frac{5}{8}m_1 a_3 = H_1 - m_1 g;\ \ 3m_1 a_3 = 3m_1 g - H_1 - H_2 + H_3;$$

$$3m_1 a_3 = 4H_2 - H_1;\ \ 2m_1 a_3 = 2m_1 g - H_3.$$

Решая систему, найдём $a_3 = \dfrac{120}{209}g$ м/с^2, $H_3 = \dfrac{178}{209}m_1 g$. Выражения ускорения a_3 груза 3 и натяжения нити H_3 совпадают с аналогичными выражениями, полученными в пункте 1 при решении данной задачи с применением теоремы об изменении кинетической энергии.

Упражнения

Упражнение 5.5. Система состоит из двух катков 1 и 2, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.26). Каток 1 весом P, радиуса r. Каток 2 весом $2P$, радиуса $3r$ имеет цилиндрический выступ радиуса r. Невесомый стержень, параллельный плоскости качения катков, закреплён в центре катка 1 и передаёт движение катка 1 катку 2 в верхней точке вертикального диаметра цилиндрического выступа без проскальзывания. Качение катков без скольжения. К катку 1 приложена пара сил с моментом $M = 4Pr$. В центре масс катка 2 приложена сила $F = 2P$. Радиус инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр катка перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = r\sqrt{2}$. Найти ускорение центра масс катка 1 и реакцию стержня.

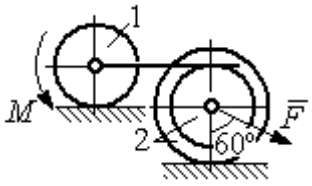


Рис. 5.26. Система катков

Упражнение 5.6. С помощью подъёмного устройства (рис. 5.27) производится подъём груза 1. Нить, закреплённая одним концом на неподвижной поверхности, спускается, охватывает снизу блок 2 массы $m_2 = m$, радиуса r, затем поднимается и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к концу её привязан груз 3 массы $m_3 = m$, передвигающийся по плоскости под действием силы $F = 2{,}5mg$. Нити, удерживающие блок 2, вертикальны. Груз 1 массы $m_1 = 3m$ прикреплён к оси блока 2. Найти ускорение груза 1 и натяжения нитей, удерживающих блок 2.

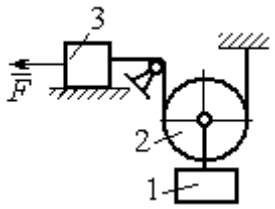


Рис. 5.27. Подъёмное устройство

Упражнение 5.7. Груз 1 массы $m_1 = m$, спускается вниз по наклонной плоскости без трения (рис. 5.28). Нить, прикреплённая к грузу 1, другим своим концом намотана на барабан катка 2 радиуса $R = 2r$ и при движении груза заставляет барабан катиться по горизонтальной поверхности цилиндрическим выступом радиуса r. Качение происходит без проскальзывания. К центру катка привязана другая нить, посредством которой каток тащит за собой груз 3 массы $m_3 = 2m$, скользящий по горизонтальной поверхности без трения. Масса катка $m_2 = 3m$, радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения $i_2 = r\sqrt{3}$. По касательной к ободу катка 2 приложена сила $F = mg$ (точка приложения силы см. рис. 5.28). Определить ускорение груза 1 и натяжения нитей.

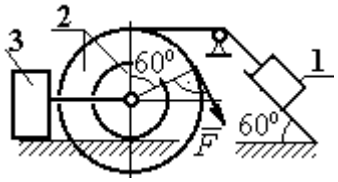


Рис. 5.28. Схема движения механической системы

6. ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

6.1. Принцип Даламбера для системы

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения. Направлен вектор силы инерции точки в сторону, противоположную ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

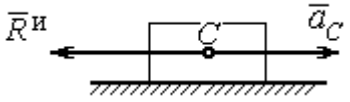


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

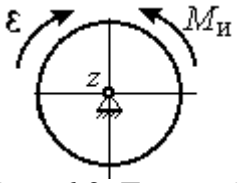


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции обращается в нуль. Главный момент $\vec{M}^{\text{и}}$, сил инерции относительно оси вращения равен по величине $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

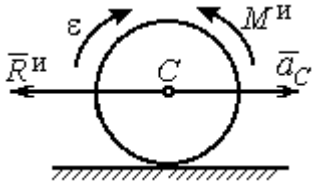


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε главный вектор сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$ равен по модулю $R^{\text{и}} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс $\vec{a}_C$ (рис. 6.3). Главный момент сил инерции $\vec{M}^{\text{и}}$ относи-

тельно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела относительно оси вращения, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0,\ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ –внешние силы, действующие на систему; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$, $\vec{M}_O^{и}$ – моменты внешних сил и главный момент сил инерции относительно произвольного центра *O*.

Примеры решения задач на применение принципа Даламбера

Задача 63. Груз 1 массы m_1 = 10 кг спускается вниз по наклонной грани клина, образующей угол 60º с горизонтом, и посредством нити, переброшенной через блок 2, укреплённый в верхней точке клина, приводит в движение груз 3 массы m_3 = 5 кг (рис. 6.4). Клин *ABC* массы m_4 = 15 кг стоит гранью *AC* на горизонтальной гладкой поверхности и упирается в выступ *E*.

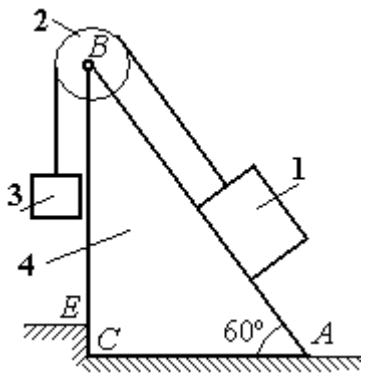


Рис. 6.4. Клин с грузами

Найти давление клина на выступ. Массой блока 2 и нити пренебречь.

Решение

Выберем систему, состоящую из клина *ABC*, блока 2, грузов 1 и 3 и нити, соединяющей грузы. Внешние силы, действующие на систему, – силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ и $\vec{P}_4$ грузов 1, 3 и клина 4, горизонтальная реакция $\vec{R}_x$ упора клина в вы-

ступ и вертикальная реакция $\vec{R}_y$ опоры на горизонтальную поверхность. Реакция нити, реакция опоры груза 1 на наклонную поверхность клина и реакция шарнира *B* блока 2 для данной системы являются внутренними.

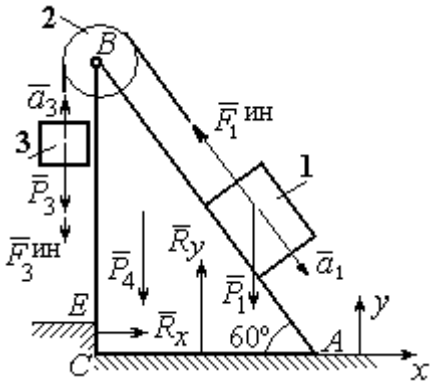


Рис. 6.5. Внешние силы и силы инерции, действующие на систему

Допустим, груз 1 движется вниз, груз 3 – вверх. Приложим силы инерции. Направления ускорений грузов и сил инерции показаны на рис. 6.5.

В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Условие равновесия: $\sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_1^{ин} + \vec{F}_3^{ин} = 0$.

Выберем оси *xy,* как показано на рис. 6.5, и спроектируем векторное равенство на ось *x*. Получим: $R_x - F_1^{ин}\cos 60^\circ = 0$, где модуль силы инерции $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

Найдём ускорение груза 1. С этой целью рассмотрим отдельно движение грузов 1 и 3 (рис. 6.6 *a*, *b*).

Рассматривая груз 1 как отдельную систему, изобразим внешние силы: силу тяжести $\vec{P}_1$, реакцию нити $\vec{T}'$ и реакцию опоры $\vec{N}$ (см. рис. 6.6, *b*). Присоединим силу инерции $\vec{F}_1^{ин}$ и составим уравнение равновесия полученной системы сил в проекции на ось *x*, расположенную вдоль наклонной грани клина: $P_1 \sin 60^\circ - T' - F_1^{ин} = 0$, где $F_1^{ин} = m_1 a_1$.

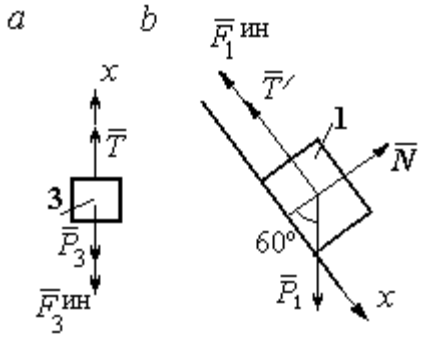


Рис. 6.6. Равновесие грузов

Для груза 3 внешними силами будут сила тяжести $\vec{P}_3$ и реакция нити $\vec{T}$. Присоединим к грузу 3 силу инерции $\vec{F}_3^{ин}$ (см. рис. 6.6, *a*) и составим уравне-

ние равновесия системы сил в проекции на ось *x*, выбранную по направлению движения груза 3: $T - P_3 - F_3^{\text{ин}} = 0$, где модуль силы инерции $F_3^{\text{ин}} = m_3 a_3$.

Решая полученную систему с учётом, что модули реакций нити и модули ускорений грузов равны: $T = T'$ и $a_1 = a_3$, находим ускорение грузов. Получим: $a_1 = a_3 = \dfrac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)g}{m_1 + m_3}$. Тогда давление клина на уступ:

$$R_x = F_1^{\text{ин}} \cos 60^\circ = m_1 g \frac{(m_1 \sin 60^\circ - m_3)}{(m_1 + m_3)} \cos 60^\circ .$$

Подставляя данные из условия задачи, найдём R_x = 11,97 Н.

Задача 64. Для подъёма грузов используется лебёдка со ступенчатым воротом, изображённая на рис. 6.7. Радиусы большой и малой ступенек барабана ворота r_1 и r_2, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3. Лебёдка установлена на горизонтальной балке *AB*, которая закреплена в точке *A* на неподвижном цилиндрическом шарнире и опирается на каток в точке *B*. Груз 1 поднимается на верёвке, навитой на большую ступеньку ворота. На малой ступеньке барабана ворота закреплена другая верёвка, удерживающая противовес 2. К барабану лебёдки приложен постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}}$.

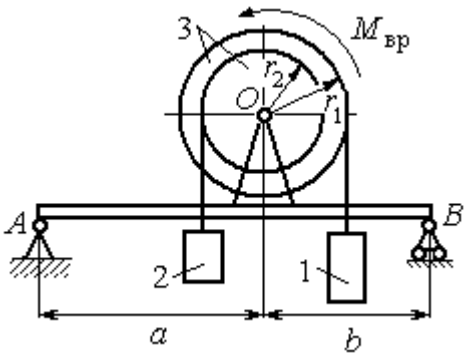


Рис. 6.7. Лебёдка на балке

Найти реакции опор балки во время движения груза, если радиусы ступенек барабана r_1 = 0,8 м, r_2 = 0,2 м, радиус инерции барабана относительно оси вращения i_3 =0,6 м, масса груза 1 m_1 = 100 кг, противовеса 2 m_2 =30 кг, масса барабана m_1 = 50 кг, величина вращающего момента $M_{\text{вр}}$ = 1050 Н·м, расстояния от крайних точек балки *A* и *B* до линии вертикального диаметра барабана *a* = 2 м, *b* = 1 м.

Решение

Выберем систему, включающую только барабан 3, грузы 1 и 2 и нити, связывающие грузы с барабаном (рис. 6.8). Внешние силы, действующие на эту систему, – пара сил, создающая вращающий момент $M_{\text{вр}}$, силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ грузов 1, 2 и барабана 3 и реакция $\vec{R}_O$ опоры барабана на шарнир в точке O. Натяжения нитей для данной системы являются внутренними и на рис. 6.8 не показаны.

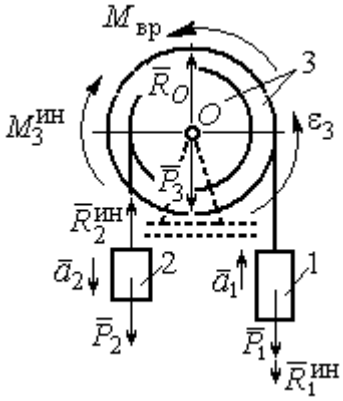


Рис. 6.8. Расчётная схема равновесия барабана

Приложим силы инерции. Направления главных векторов сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ и момента сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ показаны на рис. 6.8.

Согласно принципу Даламбера, полученная система внешних сил и сил инерции является уравновешенной. Составим уравнения равновесия:

$$R_O + R_2^{\text{ин}} - P_2 - P_3 - P_1 - R_1^{\text{ин}} = 0;\ \ M_{\text{вр}} - M_3^{\text{ин}} - R_2^{\text{ин}} r_2 + P_2 r_2 - P_1 r_1 - R_1^{\text{ин}} r_1 = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $M_3^{\text{ин}} = J_{3O}\varepsilon_3$, $J_{3O} = m_3 i_3^2$.

Из второго уравнения с учётом кинематических соотношений: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{r_1}$ и $a_2 = \dfrac{r_2}{r_1} a_1$, найдём ускорение груза 1: $a_1 = \dfrac{r_1(M_{\text{вр}} + P_2 r_2 - P_1 r_1)}{m_3 i_3^2 + m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}$. Подставляя данные задачи, получим a_1 = 3,49 м/с^2.

Вычислим модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$=349 Н; $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$ = 26,17 Н.

Подставляя модули сил инерции в первое уравнение условий равновесия, найдём реакцию опоры барабана на шарнир O:

$$R_O = -R_2^{\text{ин}} + P_2 + P_3 + P_1 + R_1^{\text{ин}} = 2088{,}63 \text{ Н}.$$

Для определения реакций опор балки AB выберем объектом равновесия саму балку (рис. 6.9). На балку действуют сила $\vec{R}'_O$ давления со стороны шарнира O, реакция шарнира в точке A (на рис. 6.9 разложенная на составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$) и реакция $\vec{R}_{By}$ опоры балки на шарнир в точке B. Составим уравнения равновесия балки:

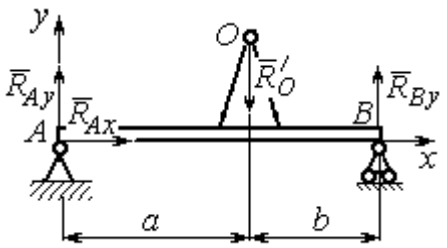


Рис. 6.9. Равновесие балки

$$\sum F_x = R_{Ax} = 0,\ \sum F_y = R_{Ay} - R'_O + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_A(F) = R_{By}(a+b) - R'_O a = 0.$$

Решая систему с учётом того, что модули сил $\vec{R}'_O$ и $\vec{R}_O$ равны, найдём реакции опор балки: $R_{By} = R_O \dfrac{a}{a+b} = 1392{,}42$ Н; $R_{Ay} = R_O - R_{By} = 696{,}21$ Н.

Для сравнения реакции опор балки при неподвижном барабане $R_{By} = 1419{,}18$ Н, $R_{Ay} = 346{,}62$ Н.

Упражнение

Упражнение 6.1. Груз 1 соединён с грузом 2 нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис. 6.10). Опускаясь вниз, груз 2 перемещает груз 1 по горизонтальной поверхности призмы 3 без трения. Призма стоит на горизонтальной гладкой поверхности и упирается левым краем в выступ. Определить силу давления призмы на пол, если массы грузов 1, 2 и призмы 3 одинаковы и равны m. Массой нити и блока пренебречь.

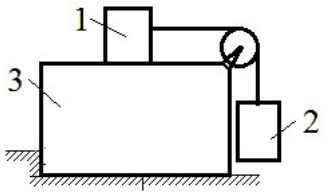


Рис. 6.10. Схема движения грузов в системе

6.2. Принцип возможных перемещений

Возможными перемещениями механической системы называют любую совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Идеальными связями в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений.

Если все приложенные к точкам системы внешние и внутренние силы разделить на **активные силы** и **реакции связей**, то для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$.

Примеры решения задач на применение принципа возможных перемещений

Задача 65. В талевом механизме барабан 1 состоит из двух соосных жестко связанных валов (рис. 6.11). При поднятии груза верхний трос барабана 1 наматывается на вал большего радиуса R_1, нижний – сматывается с вала меньшего радиуса r_1.

Какой вращающий момент M, постоянный по величине, нужно приложить к барабану, чтобы уравновесить груз весом P, прикреплённый в центре блока 4. Массами блоков и троса пренебречь.

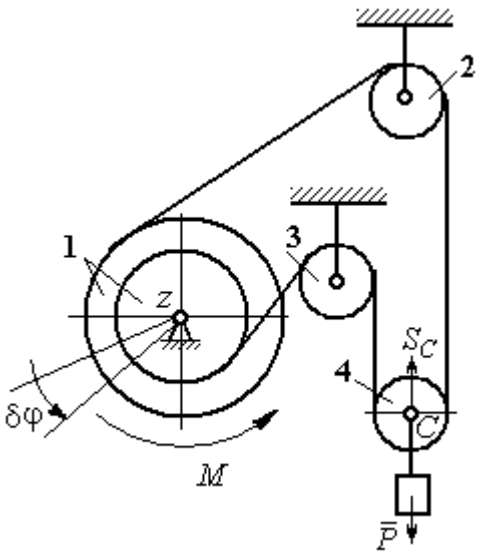


Рис. 6.11. Уравновешивание талевого механизма

Решение

Активными силами в системе являются сила тяжести груза $\vec{P}$ и уравновешивающий момент M. По принципу возможных перемещений для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A(M) + \delta A(\vec{P}) = 0, \text{ или } M\delta\varphi_1 - P\delta S_C = 0.$$

где $\delta\varphi_1$ и δS_C – возможные перемещения барабана и груза.

Найдём связь между перемещениями $\delta\varphi_1$ и δS_C. Предположим, в механизме осуществляется подъём груза. На рис. 6.12 показано построение мгновенного центра скоростей блока 4 – точки *K*. Здесь скорость точки *A* блока 4 (рис. 6.12) равна скорости точек обода малого вала барабана 1, а скорость точки *B* – скорости точек обода большого вала. Составим пропорцию $\frac{V_B}{V_A}=\frac{BK}{AK}=\frac{r_4+CK}{r_4-CK}$, где r_4 – радиус блока 4 (см. рис.6.12). Подставляя выражения для скоростей точек *A* и *B* $V_A=\omega_1 r_1$, $V_B=\omega_1 R_1$, найдём расстояние: $CK=\frac{(R_1-r_1)r_4}{R_1+r_1}$.

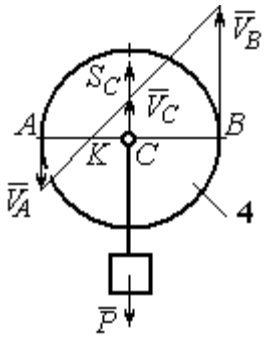


Рис. 6.12. Распределение скоростей точек блока 4

Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_B}{r_4+CK}=\frac{\omega_1(R_1+r_1)}{2r_4}$. Скорость его центра: $V_C=\omega_4\cdot CK=\frac{\omega_1(R_1-r_1)}{2}$. Выразим соотношение между скоростью точки *C* и угловой скоростью барабана 1 в дифференциальной форме: $dS_C=d\varphi_1\frac{(R_1-r_1)}{2}$. Поскольку действительное перемещение является одним из возможных (т. е. $ds=\delta s$, $d\varphi=\delta\varphi$), получим связь между возможными перемещениями барабана 1 и груза: $\delta S_C=\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}$.

Подставляя найденное соотношение в уравнение принципа возможных перемещений, представим его в окончательном виде: $M\delta\varphi_1-P\frac{\delta\varphi_1(R_1-r_1)}{2}=0$, откуда найдём значение уравновешивающего момента: $M=\frac{P(R_1-r_1)}{2}$.

Задача 66. Брус 1 весом $P_1 = P$ лежит на цилиндрическом катке 2 и на блоке 3 одинаковых радиусов r, и одинакового веса $P_2 = P_3 = 2P$ (рис. 6.13). Каток 2 катится без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона 30º к горизонту. Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси z и к нему приложена пара сил с моментом $M = Pr$. Каток и блок расположены так, что брус 1 параллелен наклонной плоскости.

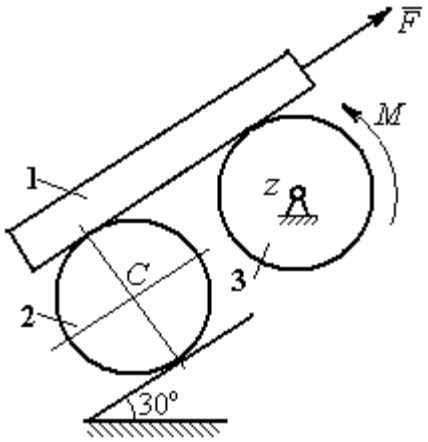


Рис. 6.13. Равновесие механической системы

Какую силу F, параллельную наклонной плоскости, нужно приложить к брусу 1, чтобы удержать его в равновесии. Скольжение между брусом и катком, брусом и блоком отсутствует.

Решение

Рассмотрим механизм, состоящий из бруса 1, катка 2 и блока 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ бруса, катка и блока, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3, и сила $\vec{F}$, приложенная к брусу. Связи в механизме идеальные, так как работа реакции $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на плоскость, работа силы $\vec{F}_{сц}$ сцепления катка с плоскостью и работа реакции шарнира блока 3 при любом перемещении системы равны нулю. Направления векторов сил в системе показаны на рис. 6.14.

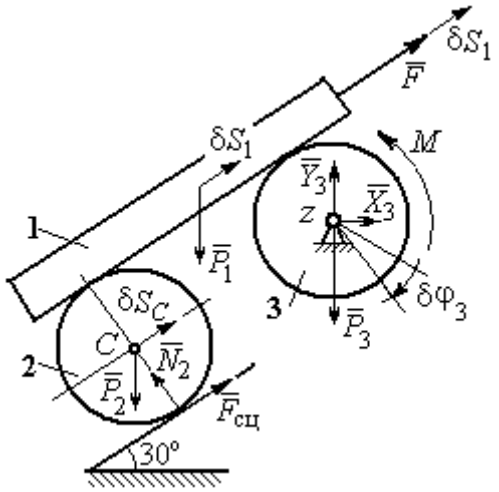


Рис. 6.14. Расчётная схема применения принципа возможных перемещений

Придадим системе возможное перемещение, сдвинув брус 1 на расстояние δS_1 вдоль линии действия силы $\vec{F}$, вверх по наклонной плоскости. Тогда

центр катка 2 переместится на расстояние δS_C, а блок 3 повернётся на элементарный угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.14).

Для определения условий равновесия применим к системе принцип возможных перемещений. Получим уравнение:

$$-P_1\delta S_1\cos 60^\circ - P_2\delta S_C\cos 60^\circ - M\delta\varphi_3 + F\delta S_1 = 0.$$

Выразим все перемещения через перемещение бруса δS_1. Допустим, скорость бруса равна V_1. Тогда $V_C = \frac{V_1}{2}$, и, следовательно, $\delta S_C = \frac{\delta S_1}{2}$.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \frac{V_1}{r}$, отсюда $\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r}$.

Подставляя найденные соотношения в уравнение принципа возможных перемещений с учётом данных задачи, находим $F = 2P$.

Задача 67. Уравновешивание роликового катка 3 с противовесом 1 осуществляется с помощью пары сил с моментом *M*, приложенных к блоку 2. Каток состоит из двух соосных жестко связанных дисков (рис. 6.15) радиусов *r* и *R* = 2*r* с общей массой 3*m*. Масса груза 1 равна *m*. При движении каток катится без скольжения по вертикальной поверхности, касаясь её диском меньшего радиуса. Вертикальная пружина с закреплённым верхним концом своим нижним концом удерживает каток за центр масс. Жесткость пружины $c = mg / r$.

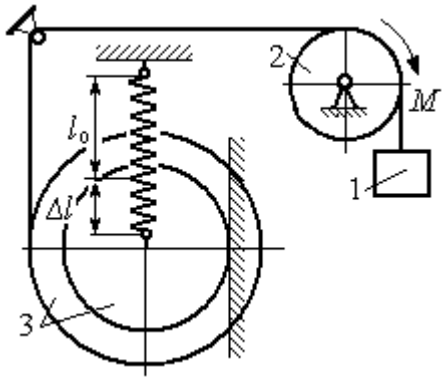


Рис. 6.15. Уравновешивание роликового катка

Какой величины уравновешивающий момент *M* приложен к блоку 2, если при равновесии катка пружина растянулась относительно недеформированного состояния на величину $\Delta l = r$.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, блока 2 и катка 3. Активными силами, действующими на механизм, являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ – груза, блока и катка, пара сил с моментом M, приложенная к блоку 2, и сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости пружины, приложенная к центру катка. Реакциями связей в механизме являются: сила $\vec{F}_{\text{сц}}$ сцепления катка с плоскостью и реакция $\vec{R}_2$ шарнира блока 2. Реакция $\vec{N}_2$ опоры катка 2 на вертикальную плоскость равна нулю (на рис. 6.16 не показана).

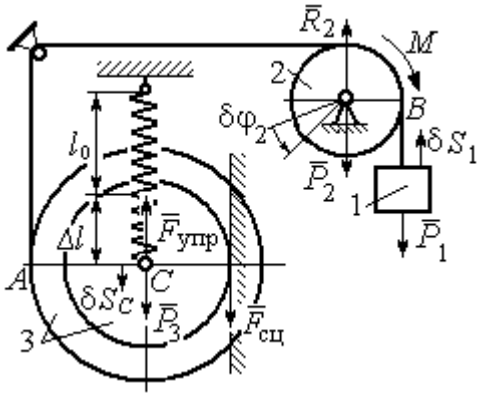


Рис. 6.16. Расчётная схема уравновешивания ролика

Допустим, система находится в равновесии. Дадим центру катка возможное перемещение δS_C, направленное вертикально вниз. При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а груз 1 получит бесконечно малое перемещение δS_1. Направления возможных перемещений показаны на рис. 6.16.

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_3\delta S_C - F_{\text{упр}}\delta S_C + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 = 0,$$

где сила упругости в положении равновесия системы $F_{\text{упр}} = c\Delta l$.

Выразим перемещения $\delta\varphi_2$, δS_1 блока 2 и груза 1 через перемещение центра катка δS_C. Предположим, при возможном перемещении скорость центра масс катка равна V_C. Скорость груза 1 равна скорости точки A на ободе большого диска катка: $V_1 = V_A = \dfrac{R+r}{r}V_C$. Здесь учтено, что точка касания катка

с вертикальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r} = \dfrac{R+r}{r^2} V_C$.

Представляя кинематические соотношения в дифференциальном виде, получим необходимые связи между возможными перемещениями:

$$\delta S_1 = \frac{R+r}{r}\delta S_C = 3\delta S_C; \quad \delta\varphi_2 = \frac{R+r}{r^2}\delta S_C = \frac{3\delta S_C}{r}.$$

Окончательно уравнение принципа возможных перемещений выражается в виде: $P_3\delta S_C - c\Delta l\delta S_C + M\dfrac{3\delta S_C}{r} - P_1 3\delta S_C = 0$. Величина уравновешивающего момента $M = \dfrac{1}{3}mgr$.

Упражнения

Упражнение 6.2. Штамповка деталей осуществляется при помощи рычажного пресса (рис. 6.17). Найти соотношение между силой F, приложенной к внешнему рычагу, и силой Q, сжимающей деталь A вдоль центральной оси.

Длины рычагов a, b, c, d показаны на рис. 6.17.

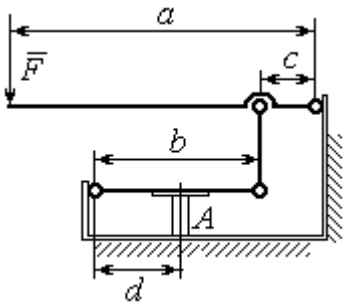


Рис. 6.17. Рычажный пресс

Упражнение 6.3. Конструкция состоит из двух валов, находящихся во внешнем зацеплении, и двух грузов, удерживающихся нитями, намотанными валы (рис. 6.18).

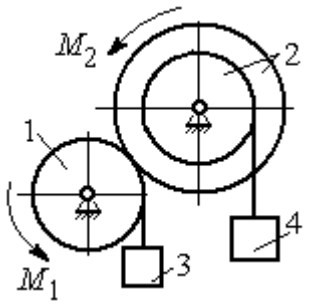


Рис. 6.18. Схема уравновешивания валов

Радиус вала 1 $R_1 = r$. Вал 2 состоит из двух барабанов, жестко скреплённых на одной оси. Радиусы барабанов: $R_2 = 3r$, $r_2 = r$.

Найти величину уравновешивающего момента M_2, приложенного к валу 2, если к валу 1 приложена пара сил с моментом $M_1 = 2Pr$, а грузы 3 и 4 одинакового веса P.

6.3. Общее уравнение динамики

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0,$$

где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к точкам системы на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения.

Примеры решения задач на применение общего уравнения динамики

Задача 68. Механическая система включает груз 1, ступенчатый диск 2 (каток), катящийся ступенькой по неподвижному рельсу, и однородный диск 3 (блок), вращающийся вокруг неподвижной оси, соединённых нерастяжимыми нитями (рис. 6.19). Качение ступенчатого диска происходит без скольжения. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$ под углом 30° к горизонтальному направлению движения груза. К блоку 3 приложена пара сил с моментом M. Найти закон движения центра масс катка 2 и реакцию шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с, если P_1 = 10 Н; P_2 = 20 Н; P_3 = 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 3(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_{2C} = 0,6 м.

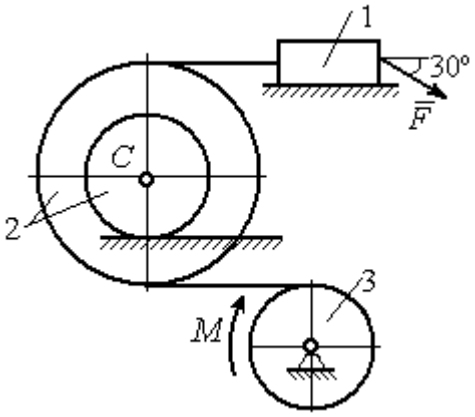


Рис. 6.19. Схема движения механической системы

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.20).

Реакциями связей являются нормальные реакции опор: $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, сила сцепления катка 2 с неподвижной поверхностью $\vec{F}_{сц}$ и реакция шарнира O блока 3 (на рис. 6.20 реакция показана в виде разложения на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

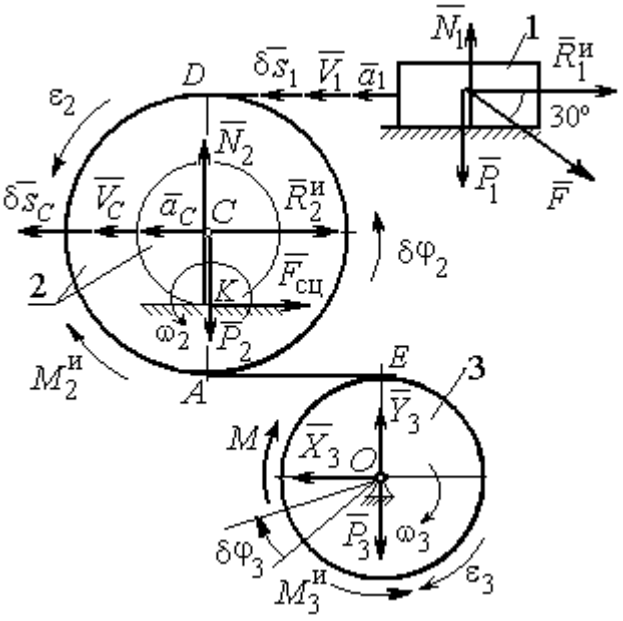


Рис. 6.20. Расчётная схема исследования движения механической системы

Предположим, система движется так, что блок 3 вращается с угловой скоростью ω_3 и угловым ускорением ε_3 в направлении поворота, создаваемого моментом M. Соответствующие направления скорости $\vec{V}_C$ и ускорения $\vec{a}_C$ центра масс катка 2, его угловой скорости ω_2 и ускорения ε_2, а также направление скорости $\vec{V}_1$ и ускорения $\vec{a}_1$ груза 1 показаны на рис. 6.20.

Присоединим к телам системы силы инерции. Главные векторы $\vec{R}_1^{и}$, $\vec{R}_2^{и}$ сил инерции груза 1 и катка 2 приложены в центрах масс груза и катка и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_C$. Главные моменты $\vec{M}_2^{и}$, $\vec{M}_3^{и}$ сил инерции катка 2 и блока 3 направлены в сторону, противоположную угловым ускорениям ε_2 и ε_3.

Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.20.

Для механической системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Здесь учтено, что в точке K находится мгновенный центр скоростей катка (см. рис. 6.20). Скорость точки E блока 3 равна скорости точки A катка 2 (см. рис. 6.20):

$$V_E = V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 (R_2 - r_2) = V_C \frac{R_2 - r_2}{r_2} .$$

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_E}{R_3} = V_C \dfrac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}$.

Скорость груза 1 равна скорости точки D катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2 (R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} .$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Если выразить скоростные кинематические соотношения в дифференциальном виде, то, полагая действительное перемещение возможным (т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$), получим соотношения между перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} .$$

Найдем элементарные работы активных сил.

Работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как перемещения точек приложения сил перпендикулярны векторам сил.

Работа силы тяжести блока 3 также равна нулю, поскольку точка прило-

жения силы тяжести блока 3 не перемещается:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0;\ \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0;\ \delta A(\vec{P}_3) = 0.$$

Работу совершают только пара сил с моментом M и сила $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2};$$

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ.$$

В результате сумма элементарных работ активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) =$$

$$= M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}\cos 30^\circ = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\frac{(R_2 + r_2)}{r_2} a_C,\ \ R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g};$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2};$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{r_2} a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка; J_{3O} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = -R_1^{\text{и}}\delta s_1 = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = -R_2^{\text{и}}\delta s_C = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1(R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C -$$

$$-\frac{P_3(R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C = -52{,}75\, a_C \delta s_C, \text{ где } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид: $\sum\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (0{,}85 + 23{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0$, откуда найдём ускорение центра масс катка 2 как функцию времени:

$$a_C(t) = 0{,}02 + 0{,}45t.$$

Представляя ускорение a_C в виде второй производной координаты движения центра масс $a_C = \ddot{s}_C$, получим дифференциальное уравнение $\ddot{s}_C = 0{,}02 + 0{,}45t$. Дважды проинтегрировав это уравнение с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения центра масс:

$$s_C = 0{,}01t^2 + 0{,}075t^3.$$

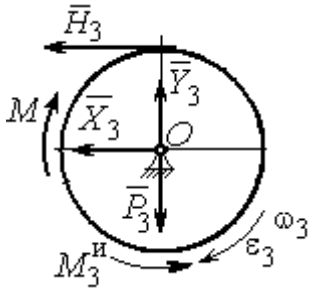


Рис. 6.21. Вращение блока 3

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (рис. 6.21). Присоединим к блоку 3 силы инерции. При вращательном движении блока вокруг оси, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции равен ну-

лю. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{и}}$ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока 3.

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил относительно оси вращения: $M - H_3 R_3 - M_3^{\text{и}} = 0$, откуда найдём реакцию нити: $H_3 = \dfrac{M}{R_3} - \dfrac{M_3^{\text{и}}}{R_3}$. Подставляя в уравнение величину модуля главного момента сил инерции блока 3 $M_3^{\text{и}}(1) = 0{,}7$ Н·м и значение момента, приложенного к блоку 3, в момент времени $t = 1$ с, $M(1) = 9$ Н·м найдём реакцию нити $H_3(1) = 20{,}75$ Н.

Уравнения равновесия, составленные в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси (см. рис. 6.21), имеют вид:

$$X_3 + H_3 = 0,\ Y_3 - P_3 = 0.$$

Составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени $t = 1$ с: $X_3 = -20{,}75$ Н, $Y_3 = 15$ Н. Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 25{,}6$ Н.

Задача 69. Груз 2 весом P_2, поднимаемый лебёдкой (рис. 6 22), подвешен в центре подвижного блока 3 весом P_3. Нерастяжимая нить одним концом прицеплена к грузу 1 весом P_1, лежащему на наклонной плоскости. Другой конец, переброшенный через невесомый блок B, охватывает снизу подвижный блок 3 радиуса r и закреплён в вертикальном положении. К грузу 1 приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости.

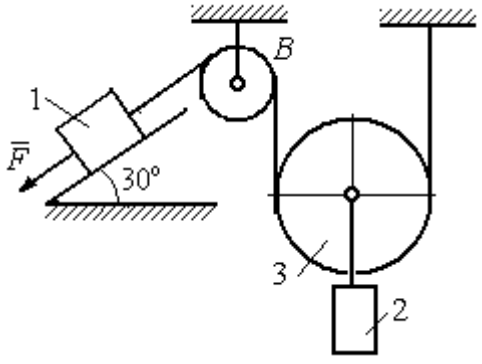


Рис. 6.22. Схема подъёмного устройства

Найти закон движения поднимаемого груза, если $P_1 = P_3 = P$, $P_2 = 3P$, $F = 2P$ и движение началось из состояния покоя.

Решение

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и сила $\vec{F}$ (рис. 6.23). Реакциями связей являются реакция шарнира блока *B* и реакция опоры груза 1 (на рис. 6.23 не показаны). Связи идеальные, так как работа реакций связей равна нулю.

Предположим, груз 1 спускается вниз по наклонной плоскости с ускорением a_1. Приложим к телам системы силы инерции. Главные вектора сил инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$ и $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ грузов 1 и 2, движущихся поступательно, приложены в центрах масс грузов и направлены противоположно векторам ускорений тел. Главный вектор $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ сил инерции блока 3 приложен в центре масс блока 3 и направлен противоположно вектору ускорения его центра масс. Главный момент сил инерции $M_3^{\text{ин}}$ относительно оси, проходящей через центр масс блока 3 перпендикулярно плоскости движения, направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения блока 3, совпадающего с направлением углового движения. Направления главных векторов и главного момента сил инерции тел показаны на рис. 6.23.

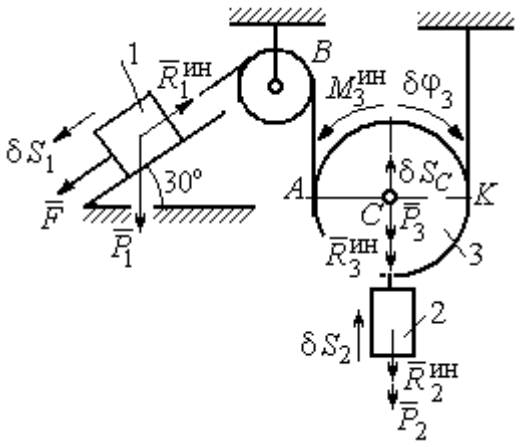


Рис.6.23. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 спустился вниз по наклонной плоскости на расстояние δS_1. В соответствии с приложенными в системе связями центр масс подвижного блока 2 и груз 2 переместились вверх на высоту δS_C, а сам блок повернулся на угол $\delta\varphi_3$ (см. рис. 6.23).

Составим общее уравнение динамики $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$. Получим

$$F\delta S_1 + P_1 \delta S_1 \cos 60° - P_2 \delta S_2 - P_3 \delta S_C -$$

$$- R_1^{\text{ин}} \delta S_1 - R_2^{\text{ин}} \delta S_C - R_3^{\text{ин}} \delta S_C - M_3^{\text{ин}} \delta \varphi_3 = 0,$$

где модули сил инерции $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$, $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_C$, $M_3^{\text{ин}} = \dfrac{m_3 r^2}{2} \varepsilon_3$.

Выразим перемещение δS_2 и ускорение a_2 груза 2, а также поворот $\delta \varphi_3$ и угловое ускорение ε_3 подвижного блока 3 через перемещение δS_1 и ускорение a_1 груза 1.

Угловая скорость блока 3 $\omega_3 = \dfrac{V_A}{AK} = \dfrac{V_1}{2r}$. Здесь учтено, что точка K блока 3 является его мгновенным центром скоростей. Тогда, элементарный поворот блока $\delta \varphi_3 = \dfrac{\delta S_1}{2r}$, а его угловое ускорение $\varepsilon_3 = \dfrac{a_1}{2r}$.

Скорость центра масс блока 3 и скорость груза 2: $V_2 = V_C = \dfrac{V_1}{2}$. Из этого равенства следует, что: $\delta S_2 = \delta S_C = \dfrac{\delta S_1}{2}$, $a_2 = a_C = \dfrac{a_1}{2}$.

Подставляя найденные соотношения в общее уравнение динамики с учётом данных задачи, окончательно получим уравнение: $\dfrac{1}{2} P \delta S_1 = \dfrac{17}{8g} P a_1 \delta S_1$. Отсюда $a_1 = \dfrac{4}{17} g = 0{,}23g$. Ускорение груза 2, $a_2 = \dfrac{a_1}{2} = 0{,}12g$.

Представим ускорение груза 2 в виде второй производной координаты его движения. Получим дифференциальное уравнение: $\ddot{S}_2 = 0{,}12g$. Дважды проинтегрировав его с нулевыми начальными условиями, найдём закон движения груза: $S_2 = 0{,}06gt^2$.

Задача 70. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.24). Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом неподвижных блоков B и D пренебречь.

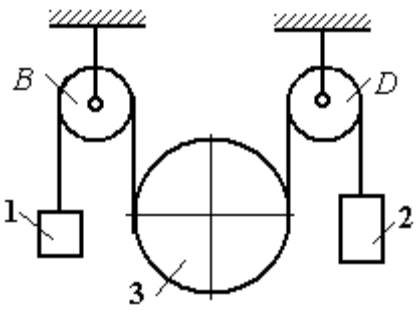


Рис. 6.24. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

В данной механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ (рис. 6.25), а реакциями связей – реакции шарниров блоков B и D. Связи идеальные, так как оси вращения блоков B и D неподвижны.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики. Система имеет две степени свободы. В этом случае общее уравнение динамики необходимо составлять для каждого из независимых перемещений.

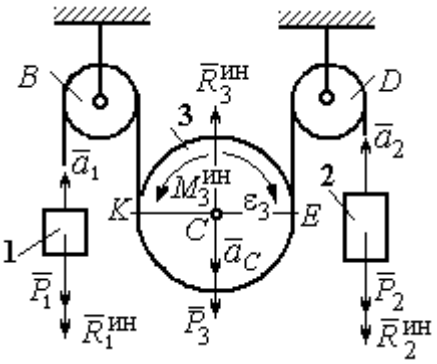


Рис.6.25. Активные силы и силы инерции, приложенные к системе

Предположим, система движется так, что оба груза 1 и 2 равноускоренно перемещаются вверх. Скорости грузов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ускорения – $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Блок 3 опускается вниз с ускорением центра $\vec{a}_C$, вращается и имеет угловое ускорение ε_3, направленное по ходу часовой стрелки (см. рис. 6.25).

Приложим к телам системы силы инерции (см. рис. 6.25). Модули сил инерции: $R_1^{ин} = m_1 a_1$, $R_2^{ин} = m_2 a_2$, $R_3^{ин} = m_3 a_C$. Главный момент сил инерции блока 3 $M_3^{ин} = J_{3C}\varepsilon_3$, где осевой момент инерции $J_{3C} = \dfrac{m_3 r^2}{2}$. Направления векторов сил и моментов сил инерции показаны на рис. 6.25.

Для вычисления углового ускорения блока 3 воспользуемся векторным представлением ускорения точки при плоскопараллельном движении тела. Выберем точку K за полюс. Ускорение точки E определяется равенством $\vec{a}_E = \vec{a}_K + \vec{a}^{\,n}_{EK} + \vec{a}^{\,\tau}_{EK}$, где $\vec{a}_K$ – ускорение полюса K; $\vec{a}^{\,n}_{EK}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{EK}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки E при вращении блока 3 вокруг полюса K (рис. 6.26). Спроектируем векторное равенство на вертикальную ось $E\tau$. Получим: $a_{E\tau} = a_{K\tau} + a^{\tau}_{EK}$, где $a_{E\tau}$ и $a_{K\tau}$ – проекции ускорений точек E и K на вертикальную ось.

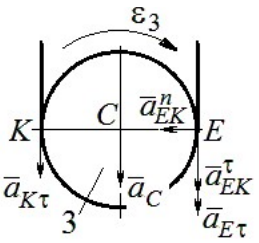


Рис. 6.26. Схема вычисления углового ускорения блока 3

Поскольку модуль ускорения точки K нити равен модулю ускорения груза 1, то $a_{K\tau} = a_1$. Модуль ускорения точки E нити равен модулю ускорения груза 2 и $a_{E\tau} = a_2$. Так как $a^{\tau}_{EK} = \varepsilon_3 AK = \varepsilon_3 2r$, то $\varepsilon_3 = \dfrac{a_{E\tau} - a_{K\tau}}{2r} = \dfrac{a_2 - a_1}{2r}$.

Составляя такое же векторное уравнение для определения ускорения центра масс блока 3 (точки C) и проектируя его на вертикальную ось, найдём:

$$a_C = a_{K\tau} + a^{\tau}_{CK} = a_1 + \varepsilon_3 r = \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

Выберем в качестве независимых координат s_1, s_2 – положения грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных осей вращения блоков B и D. Возможные перемещения грузов обозначим δs_1 и δs_2.

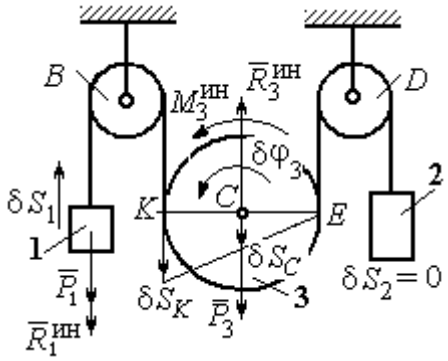


Рис.6.27. Движение системы при перемещении груза 1.

Дадим системе возможное перемещение, при котором груз 1 поднимается вверх на расстояние δs_1, а груз 2 – неподвижен. При таком движении нить, соединяющая груз 2 с блоком 3, неподвижна вплоть до точки E (рис. 6.27).

Вращение блока 3 происходит против направления хода часовой стрелки. Точка E является мгновенным центром скоростей блока 3, и угловая скорость блока $\omega_3 = \dfrac{V_K}{2r} = \dfrac{V_1}{2r}$. Скорость центра масс блока $V_C = \dfrac{1}{2}V_1$. Тогда элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta s_1}{2r}$ и элементарное перемещения центра масс $\delta s_C = \dfrac{1}{2}\delta s_1$.

На данном возможном перемещении работу совершают как активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_3$ груза 1 и блока 3, так и силы инерции – $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_3^{\text{ин}}$ и пара сил инерции с моментом $M_3^{\text{ин}}$.

Составим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A\left(\vec{F}_k^{\text{акт}}\right) + \sum \delta A\left(\vec{R}_k^{\text{ин}}\right) = -P_1\delta s_1 + P_3\delta s_C - R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_C + M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = 0.$$

Здесь работа сил инерции

$$R_1^{\text{ин}}\delta s_1 = m_1 a_1 \delta s_1, \quad R_3^{\text{ин}}\delta s_C = m_3 a_C \delta s_C = \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1;$$

$$M_3^{\text{ин}}\delta\varphi_3 = J_{3C}\varepsilon_3\delta\varphi_3 = \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r}.$$

В результате общее уравнение динамики представляется выражением

$$-P_1\delta s_1 + \frac{1}{2}P_3\delta s_1 - \frac{P_1}{g}a_1\delta s_1 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta s_1 + \frac{P_3 r^2}{2g}\cdot\frac{a_2 - a_1}{2r}\cdot\frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

которое преобразуется к виду:

$$(3P_3 + 8P_1)a_1 + P_3 a_2 = (4P_3 - 8P_1)g.$$

Дадим системе другое независимое возможное перемещение, при котором груз 2 движется вверх ($\delta s_2 \neq 0$), а груз 1 неподвижен ($\delta s_1 = 0$).

При этом перемещении нить, соединяющая груз 1 и блок 3 неподвижна вплоть до точки K (рис. 6.28). Вращение блока 3 происходит по направлению хода часовой стрелки. Точка K является мгновенным центром скоростей бло-

ка 3. Тогда $\omega_3 = \frac{V_E}{2r} = \frac{V_2}{2r}$ и скорость центра масс блока $V_C = \frac{1}{2}V_2$. Элементарный поворот блока 3 $\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{2r}$ и перемещение центра масс $\delta s_C = \delta s_E = \frac{1}{2}\delta s_2$.

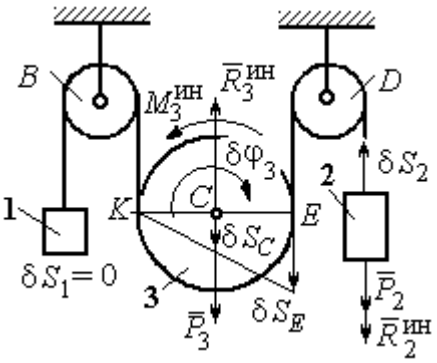


Рис. 6.28. Движение системы при перемещении груза 2

При таком движении работу совершают силы тяжести $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$, силы инерции $\vec{R}_2^{ин}$, $\vec{R}_3^{ин}$ и пара сил с моментом $M_3^{ин}$.

Составим общее уравнение динамики на возможном перемещении δs_2 (см. рис. 6.28):

$$-P_2\delta s_2 - R_2^{ин}\delta s_2 + P_3\delta s_C - R_3^{ин}\delta s_C - M_3^{ин}\delta\varphi_3 = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$-P_2\delta s_2 - \frac{P_2}{g}a_2\delta s_2 + \frac{1}{2}P_3\delta s_2 - \frac{P_3}{g}\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\frac{1}{2}\delta s_2 - \frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{a_2-a_1}{2r}\right)\frac{\delta s_2}{2r} = 0$$

или к виду

$$(8P_2 + 3P_3)a_2 + P_3 a_1 = (4P_3 - 8P_2)g.$$

Подставляя данные задачи в оба уравнения динамики, соответствующие независимым перемещениям δs_1 и δs_2, получим систему уравнений:

$$7a_1 + a_2 = 0, \quad 2g + 9a_2 + a_1 = 0.$$

Решение системы: $a_1 = \frac{1}{31}g$, $a_2 = -\frac{7}{31}g$ представляет ускорения грузов 1 и 2. Ускорение центра масс блока 3 находится по формуле $a_C = \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{3}{31}g$.

Знаки ускорений определяют направления движений тел: груз 1 движется в выбранном направлении – вверх, груз 2 – вниз, центр блока 3 – вверх.

Упражнения

Упражнение 6.4. В механической системе (рис. 6.29) блок 1 радиуса *r* и каток 2 соединены горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и катками отсутствует. Каток 2 состоит из двух шкивов радиусов *r* и *R* = 2*r*, скреплённых на одной оси. Каток катится, опираясь малым шкивом на горизонтальную поверхность, без проскальзывания. Груз 3 представляет собой поршень, двигающийся по горизонтальной поверхности без трения и прикреплённый к центру масс катка 2. К блоку 1 приложена пара сил с переменным моментом $M_{\text{вр}} = mgr\sin\omega t$.

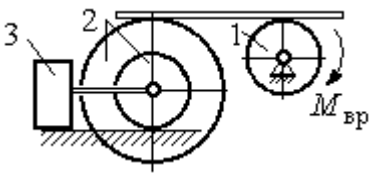


Рис. 6.29. Схема движения механической системы

Найти закон движения поршня 3, если массы грузов $m_1 = m_3 = m$, общая масса катка 2 $m_2 = 2m$, момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, $i_2 = 1{,}5r$. Движение началось из состояния покоя.

Упражнение 6.5. Груз 1, двигаясь горизонтально, приводит в движение ступенчатый барабан 2 посредством нерастяжимой нити, намотанной на его малую ступень (рис. 6.30). К барабану на нитях, намотанных на большую и малую ступеньки, подвешены два груза 3 и 4. На груз 1 действует сила $F = P(t+1)$. Определить закон движения груза 3, если веса грузов одинаковы и равны *P*, вес барабана 2 равен 2*P*, радиусы ступенек барабана *r* и 2*r*, радиус инерции барабана $i_2 = r\sqrt{2}$, и движение началось из состояния покоя.

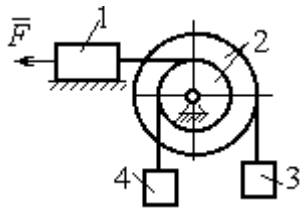


Рис. 6.30. Схема подъёмника

6.4. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами называется совокупность любых *s* независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменятся на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые **вариациями обобщенных координат**, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде: $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_S$.

Величина Q_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$, $k = 1,2,...,s$, где s – число степеней свободы системы; T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ – обобщенные скорости.

Примеры решения задач на составление уравнений Лагранжа

Задача 71. В механизме домкрата (рис. 6.31) движение зубчатого колеса 1 передаётся шестерне 2, к которой соосно прикреплено зубчатое колесо 3, имеющее зацепление с зубчатой рейкой 4, на которой поднимается груз 5 массы m_5 = 50 кг.

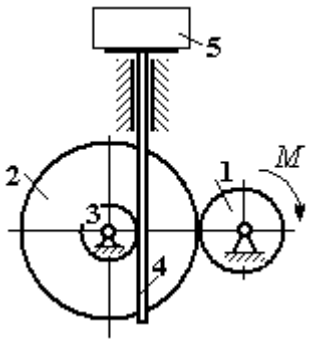


Рис. 6.31. Схема механизма домкрата

Радиусы зубчатых колёс r_1 = 5 см, r_2 = 12 см, r_3 = 6 см. Зубчатые колёса считать сплошными однородными дисками. Массы колёс m_1 = 0,8 кг, m_2 = 1,6 кг, m_3 = 0,6 кг, масса зубчатой рейки m_4 = 1 кг.

Какой величины постоянный вращающий момент нужно приложить к колесу 1 для того, чтобы в момент времени $t = 2$ с груз 5 имел скорость V_5 = 1 м/с, если движение системы начинается из состояния покоя.

Решение

Домкрат является механической системой с одной степенью свободы. Выберем в качестве обобщённой координаты координату *x*, отмечающую положение груза 5 (рис. 6.32).

Уравнение Лагранжа для обобщённой координаты *x* имеет вид: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; $\dot{x}$ – обобщённая скорость; Q_x – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колеса 1: $T_1=\frac{J_1\omega_1^2}{2}$, где ω_1 – угловая скорость колеса 1; J_1 – момент инерции колеса, $J_1=\frac{m_1 r_1^2}{2}$.

Кинетические энергии шестерни 2 и зубчатого колеса 3, у которых угловые скорости одинаковы, соответственно: $T_2=\frac{J_2\omega_2^2}{2}$, $T_3=\frac{J_3\omega_2^2}{2}$, где ω_2 – угловая скорость шестерни 2; J_2, J_3 – моменты инерции шестерни 2 и зубчатого колеса 3 относительно оси, проходящей через общий центр масс, $J_2=\frac{m_2 r_2^2}{2}$, $J_3=\frac{m_3 r_3^2}{2}$. Скорость груза 5 равна скорости зубчатой линейки $V_5=V_4$. Кинетическая энергия зубчатой линейки 4 и груза 5: $T_4=\frac{m_4 V_4^2}{2}$, $T_5=\frac{m_5 V_4^2}{2}$.

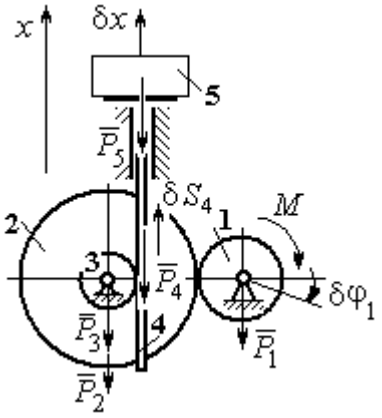


Рис. 6.32. Возможные перемещения звеньев механизма

Выразим угловые скорости колёс через скорость груза (зубчатой линейки).

Имеем: $\omega_2 = \omega_3 = \dfrac{V_4}{r_3}$ (см. рис. 6.32). Кроме того, из равенства $\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$ следует $\omega_1 = \dfrac{\omega_2 r_2}{r_1} = \dfrac{V_4 r_2}{r_1 r_3}$.

Подставляя полученные соотношения в выражения кинетических энергий тел и с учётом данных задачи, получим кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 =$$

$$= \frac{m_1 r_1^2}{4}\left(\frac{V_4 r_2}{r_1 r_3}\right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4}\left(\frac{V_4}{r_3}\right)^2 + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{m_5 V_4^2}{2} =$$

$$= \left[\frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 + \frac{m_3}{2} + m_4 + m_5\right]\frac{V_4^2}{2} = 28{,}05\, V_4^2 = 28{,}05\, \dot{x}^2 .$$

Вычислим обобщённую силу.

Дадим возможное перемещение δx грузу 5. При этом линейка 4 переместится на расстояние δs_4, а зубчатое колесо 1 повернётся на угол $\delta\varphi_1$. Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении. Получим: $\delta A = -P_5 \delta x - P_4 \delta s_4 + M \delta\varphi_1$. Работа сил тяжести зубчатых колёс $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_3$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны.

Из ранее полученных скоростных соотношений следуют равенства перемещений: $\delta s_4 = \delta x$, $\delta\varphi_1 = \dfrac{r_2}{r_1 r_3}\delta x$. В результате сумма работ сил на возможном перемещении системы выражается в виде $\delta A = \left(-m_5 g - m_4 g + M\dfrac{r_2}{r_1 r_3}\right)\delta x$. Отсюда обобщённая сила Q_x, соответствующая координате x: $Q_x = -(m_5 + m_4)g + M\dfrac{r_2}{r_1 r_3} = -500{,}31 + 40M$.

Составим уравнение Лагранжа.

С учётом, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 56{,}1\,\ddot{x}$ и $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, дифференциальное уравнение движения имеет вид: $56{,}1\,\ddot{x} = -500{,}31+40M$ или $\ddot{x} = -8{,}92+0{,}71M$.

Интегрируя это уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон изменения скорости груза 5: $V_5 = \dot{x} = (-8{,}92+0{,}71M)t$.

По условию задачи при $t = 2$ с $V_5 = 1$ м/с. Подставляя эти данные в уравнение, получим: $M = 13{,}27$ Н·м.

Задача 72. Механическая система состоит из ступенчатого блока 2, катка 3, соединённых невесомым брусом 1, и невесомой пружины жесткостью c. Радиусы ступеней блока r и $R = 1{,}5r$, радиус катка 3 равен r. Брус, лежащий на катке 3 и блоке 2, во время движения остаётся параллельным линии качения катка 3 (рис. 6.33). В центре катка 3 приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх параллельно наклонной плоскости, а к блоку 2 – пара сил с моментом M. Качение катка по неподвижной поверхности без скольжения. Проскальзывание между брусом 1 и дисками отсутствует. Передача движения пружины блоку 2 производится посредством невесомого жесткого вертикального стержня, прижатого к малой ступеньке блока без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси вращения $i_z = r\sqrt{2}$. Веса тел: $P_3 = P$, $P_2 = 2P$, приложенная сила $F = 2P$, момент $M = Pr$, жесткость пружины $c = P/r$.

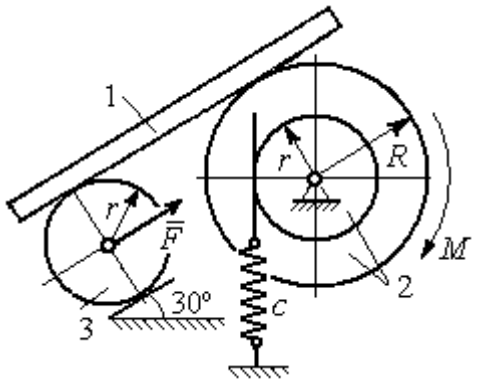


Рис. 6.33. Механическая система с одной степенью свободы

Определить закон угловых колебаний блока 2 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с в сторону вращения, создаваемого заданным моментом.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.34) имеет одну степень свободы. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня недеформируемой пружины (см. рис. 6.34). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы, имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T – кинетическая энергия системы; Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x.

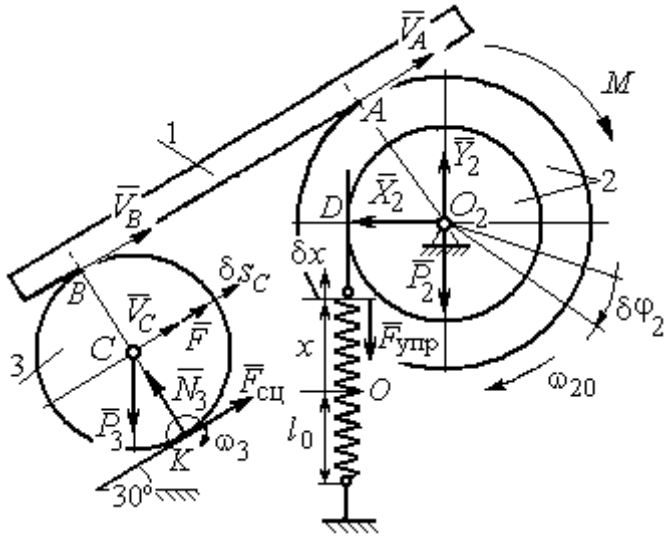


Рис. 6.34 Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Вычислим кинетическую энергию системы. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока; J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси z, $J_{2z} = m_2 i_z^2$. Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C, ω_3 – скорость центра масс катка 3 и его угловая скорость; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; r – радиус катка.

Выразим угловые скорости ω_2, ω_3, а также скорость V_C через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки D блока 2 равна скорости движения верхнего края пружины: $V_D = \dot{x}$ (см. рис. 6.34). Угловая скорость блока 2: $\omega_2 = \dfrac{V_D}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r}$. Скорость точки A блока 2: $V_A = \omega_2 R = \dfrac{\dot{x}R}{r}$.

Так как брус совершает поступательное движение, то скорости точек A и B равны: $V_B = V_A$. Угловая скорость катка 3 (точка K касания катка 3 с неподвижной поверхностью является его мгновенным центром скоростей): $\omega_3 = \dfrac{V_B}{2r} = \dfrac{V_A}{2r} = \dfrac{\dot{x}R}{2r^2}$. Скорость центра катка 3: $V_C = \dfrac{V_B}{2} = \dfrac{\dot{x}R}{2r}$.

Подставляя найденные кинематические соотношения с учётом исходных данных задачи, получим кинетическую энергию тел системы:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left(r\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{2P}{g} \dot{x}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2 = \frac{3P}{4g} \left(\frac{R}{2r}\right)^2 \dot{x}^2.$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_2 + T_3 = \frac{P}{g} \left(2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{2r}\right)^2\right) \dot{x}^2.$$

Найдём обобщённую силу. Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой x, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине в произвольном положении возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси x (см. рис. 6.34). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta x}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние $\delta s_C = \dfrac{R}{2r} \delta x$. На заданном перемещении системы работу совершают сила тяжести катка 3, пара сил с моментом M, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины.

Элементарная работа вращающего момента M: $\delta A(M) = M\delta\varphi_2 = M\dfrac{\delta x}{r}$.

Работа силы тяжести катка 3: $\delta A(\vec{P}_3) = P_3\delta s_C\cos 120^\circ = -P_3\dfrac{R}{4r}\delta x$.

Работа силы F: $\delta A(\vec{F}) = F\delta s_C = F\dfrac{R}{2r}\delta x$.

Модуль силы упругости пружины, растянутой из недеформированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.34). Её работа при перемещении δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180° = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи:

$$\delta A = M\frac{\delta x}{r} - P_3\frac{R}{4r}\delta x + F\frac{R}{2r}\delta x - cx\delta x = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P\left(\dfrac{17}{8} - \dfrac{x}{r}\right)$.

Вычислим необходимые производные кинетической энергии: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{2P}{g}\left(2 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$ и, подставляя их в общий вид уравнений Лагранжа, получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$\frac{2P}{g}\left(2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)\ddot{x} = P\left(\frac{17}{8} - \frac{x}{r}\right), \text{ или } \ddot{x} + 10{,}2x = 4{,}34 \text{ (здесь } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2\text{)}.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{10{,}2}$ = 3,19 рад/с. Частное ре-

шение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = 0{,}42$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin 3{,}19t + C_2 \cos 3{,}19t + 0{,}42$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}42$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки D блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость $\omega_{20} = 0{,}5$ рад/с, то при $r = 0{,}2$ м $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Вычисляем скорость движения края пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 3{,}19 C_1 \cos 3{,}19t - 3{,}19 C_2 \sin 3{,}19t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}03$.

Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}03 \sin 3{,}19t - 0{,}42 \cos 3{,}19t + 0{,}42$ м. Уравнение колебательного движения блока 2: $\varphi_2 = \dfrac{x}{r} = 0{,}15 \sin 3{,}19t - 2{,}1 \cos 3{,}19t + 2{,}1$ рад.

Задача 73. Прямоугольная призма 3 весом $2P$ лежит на катке 1 радиуса r и веса P и опирается на невесомый блок 2 (рис. 6.35). Каток 1 катится по неподвижной горизонтальной поверхности без скольжения. По наклонной поверхности призмы скатывается без скольжения каток 4 весом P и радиуса r. Угол наклона поверхности призмы к горизонту составляет

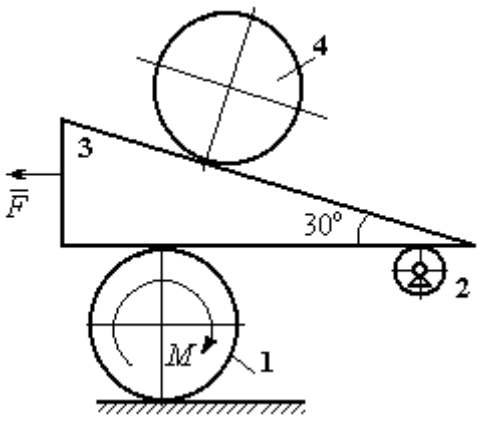


Рис. 6.35. Механическая система с двумя степенями свободы

30º. На каток 1 действует пара сил с постоянным моментом $M = 3Pr$, а на призму 3 – горизонтальная сила $\vec{F}$ с модулем $F = P$. Катки считать однородными дисками. Проскальзывание между катками 1, 4 и призмой отсутствует. В начальный момент система находилась в покое.

Определить закон движения призмы 3 и закон движения катка 4 относительно призмы.

Решение

Рассматриваемая механическая система – катки и призма имеет две степени свободы, так как перемещение катка 4 относительно призмы 3 не зависит от перемещения самой призмы и катка 1. За обобщенные координаты выберем перемещение x_4 центра масс катка 4 относительно края призмы и перемещение x_3 края призмы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.36). Обобщенные скорости: $\dot{x}_4$, $\dot{x}_3$.

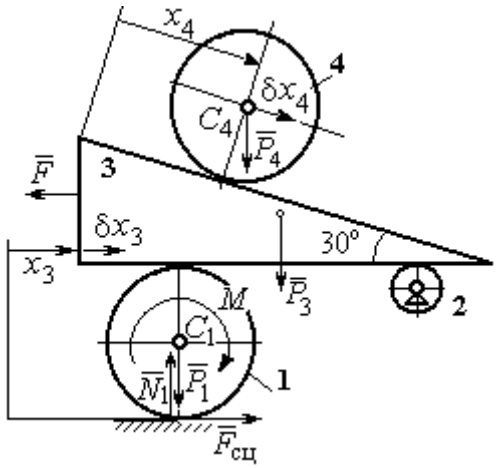


Рис. 6.36. Возможные перемещения механической системы

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы в обобщённых координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_{x_4};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} = Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_4}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

Вычислим кинетическую энергию тел в системе.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2$, где V_{C_1} – скорость центра масс катка, $V_{C_1} = \frac{1}{2}\dot{x}_3$; J_{C_1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости движения, $J_{C_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; ω_1 – угловая скорость катка 1, $\omega_1 = \frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Призма 3 совершает поступательное движение со скоростью $V_3 = \dot{x}_3$. Её кинетическая энергия $T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} = \frac{m_3 \dot{x}_3^2}{2}$.

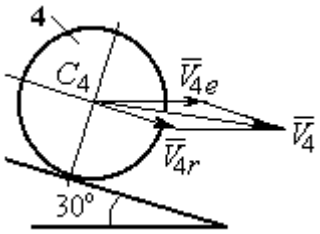


Рис. 6.37. Скорость центра масс катка 4

При расчёте кинетической энергии катка 4 по формуле $T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2$ необходимо учитывать, что каток 4 совершает сложное движение. Здесь относительное движение катка – его качение по наклонной поверхности призмы, переносное – поступательное перемещение вместе с призмой.

Вектор абсолютной скорости центра масс катка 4 $\vec{V}_4$ представляется в виде суммы $\vec{V}_4 = \vec{V}_{4e} + \vec{V}_{4r}$ (рис. 6.37), где $\vec{V}_{4e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости призмы: $V_{4e} = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{4r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине $V_{4r} = \dot{x}_4$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 4 (по теореме косинусов):

$$V_4^2 = V_{4e}^2 + V_{4r}^2 - 2V_{4e}V_{4r}\cos 150^\circ = \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_3\dot{x}_4\cos 30^\circ .$$

Поскольку переносное движение катка 4 поступательное, угловая скорость катка ω_4 равна его угловой скорости в относительном движении $\omega_4 = \frac{V_{4r}}{r} = \frac{\dot{x}_4}{r}$.

В результате выражение кинетической энергии системы, в обобщённых скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2 =$$

$$= \frac{P}{2g}\left(\frac{27}{8}\dot{x}_3^2 + \frac{3}{2}\dot{x}_4^2 + \dot{x}_3\dot{x}_4\sqrt{3}\right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_4 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_4 = 0$. При таком движении системы каток 4 не скатывается по призме, а движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести катков 1, 4 и призмы равна нулю, так как нет вертикального перемещения точек приложения этих сил. Работу на этом перемещении будет производить только сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M, приложенная к катку 1. Суммарная элементарная работа

$$\delta A = -F\delta x_3 + M\delta\varphi_1 = \left(-F + \frac{M}{2r}\right)\delta x_3 .$$

Здесь учтено, что элементарный угол поворота катка 1 связан с перемещением призмы соотношением: $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{2r}$. Отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -F + \frac{M}{2r} = \frac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_4, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_4 > 0, \delta x_3 = 0$. При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 4, который скатывается по наклонной поверхности призмы. При таком движении системы работу совершает только сила тяжести катка 4. Выражая элементарную работу $\delta A = P_4\delta x_4\cos 60^\circ = \frac{1}{2}P\delta x_4$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_4: $Q_{x_4} = \frac{1}{2}P$.

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим необходимые производные кинетической энергии

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4;\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right) = \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3;\ \ \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$$

Подставляя результаты расчётов в общий вид уравнений Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{27P}{8g}\ddot{x}_3 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_4 = \frac{1}{2}P, \quad \frac{3P}{2g}\ddot{x}_4 + \frac{P\sqrt{3}}{2g}\ddot{x}_3 = \frac{1}{2}P$$

или

$$6{,}75\ddot{x}_3 + 1{,}73\ddot{x}_4 = g; \quad 3\ddot{x}_4 + 1{,}73\ddot{x}_3 = g.$$

Решаем данную систему как алгебраическую относительно ускорений $\ddot{x}_3$, $\ddot{x}_4$. Получим: $\ddot{x}_3 = 0{,}07g$, $\ddot{x}_4 = 0{,}29g$.

Интегрируя дважды эти уравнения с нулевыми начальными условиями, получим закон движения призмы ($x_3 = 0{,}035gt^2$) и центра масс катка 4 относительно призмы ($x_4 = 0{,}145gt^2$). Движение призмы и катка 4 относительно призмы происходит в положительном направлении осей.

Задача 74. Механическая система состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3 (рис. 6.38). Невесомый стержень, соединяющий каток 2 с блоком 3, параллелен горизонтальной плоскости качения катка 2. К центру катка 2 прикреплена горизонтальная пружина, другой конец которой соединён с грузом 1. Коэффициент жесткости пружины *c*. Груз 1 весом P_1 движется без трения по горизонтальной поверхности. Каток 2 весом P_2 катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Радиус катка 2 равен *r*. Блок 3 считать однородным диском весом P_3 радиуса *R*. К блоку 3 приложена пара сил с моментом *M*. Движение катка 2 блоку 3 передаётся горизонтальным невесомым стержнем. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует. В начальный момент система находилась в покое. При этом груз 1 находился в положении, при котором

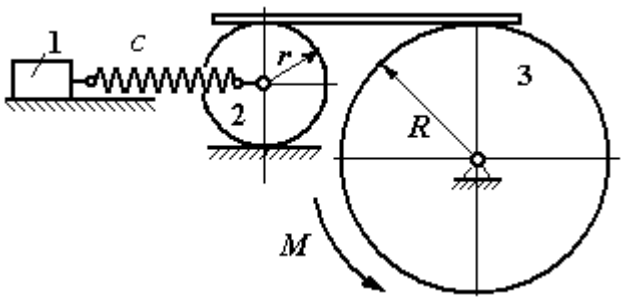


Рис. 6.38. Колебания механической системы с двумя степенями свободы

пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на величину Δl_0.

Найти закон абсолютного движения груза 1, если известно P_1 = 10 Н, P_2 = 20 Н, P_3 = 30 Н, M = 5 Н·м, R = 24 см, c = 207 Н/м, Δl_0 = 5 см.

Решение

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем удлинение пружины x_1 относительно недеформированного состояния и угол φ_3 поворота блока 3 (рис. 6.39). При этом x_1 является относительной координатой движения груза, а φ_3 – абсолютной координатой вращения блока 3.

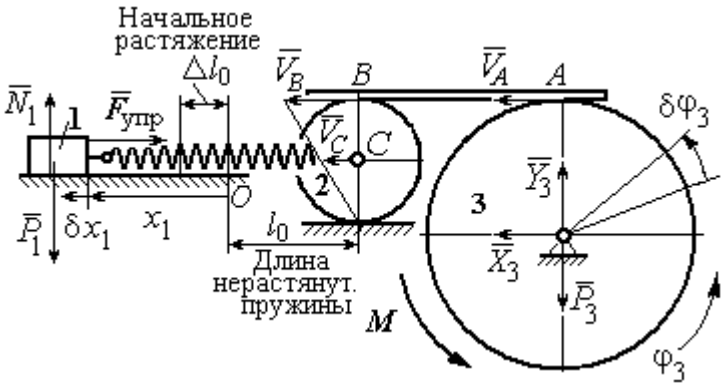


Рис. 6.39. Расчётная схема колебаний механической системы

Рассмотрим сложное движение груза 1. Относительное движение груза – это его движение на пружине в предположении, что точка крепления пружины неподвижна. Относительная скорость $V_{1r} = \dot{x}_1$. Переносное движение – это перемещение груза вместе с фиксированной длиной пружины (иначе, заменяя пружину жестким стержнем). Переносная скорость груза 1 $V_{1e} = V_C$, где V_C – скорость центра масс катка 2.

На рис. 6.39 показано распределение скоростей точек катка 2, откуда следует: $V_C = \frac{1}{2} V_B$. Имеем: $V_B = V_A = \omega_3 R = \dot{\varphi}_3 R$ и $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Для того чтобы найти модуль абсолютной скорости груза 1, спроектируем векторное равенство теоремы сложения скоростей $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e}$ на горизон-

тальную ось. Полагая, что движение системы происходит в положительном направлении отсчета обобщённых координат, получим: $V_1 = \dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$.

Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q_\varphi,$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_x, Q_φ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам x_1 и φ_3.

Вычислим кинетическую энергию системы и выразим её через обобщённые скорости.

Кинетическая энергия поступательного движения груза 1 определяется выражением $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где V_1 следует рассматривать как абсолютную скорость груза. Тогда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R\right)^2$. Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. Кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3}{4} m_2 V_C^2$, причём $V_C = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R$. Тогда $T_2 = \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2$. Кинетическая энергия вращающегося блока 3: $T_3 = \frac{1}{2} J_{3z} \omega_3^2$, где J_{3z} – осевой момент инерции блока 3, $J_{3z} = \frac{m_3 R^2}{2}$. Окончательно $T_3 = \frac{1}{4} m_3 \dot{\varphi}_3^2 R^2$.

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_3 R)^2 + \frac{3}{16} m_2 \dot{\varphi}_3^2 R^2 + \frac{m_3 R^2}{4} \dot{\varphi}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 \dot{\varphi}_3 R + \left(\frac{1}{8} m_1 + \frac{3}{16} m_2 + \frac{1}{4} m_3\right) \dot{\varphi}_3^2 R^2.$$

Дадим системе возможное перемещение, при котором изменяется координата груза x_1 ($\delta x_1 > 0$), а другая координата – угол поворота блока 3 φ_3 остаётся постоянной ($\delta\varphi_3 = 0$). В этом случае груз 1 движется горизонтально, блок 3 и каток 2 – неподвижны. При таком движении работу будет производить только упругая сила пружины.

Модуль силы упругости пружины пропорционален её растяжению и в произвольном положении груза равен: $F_{\text{упр}} = c\Delta\ell = cx_1$. Направление силы упругости противоположно растяжению (см. рис. 6.39).

Сумма элементарных работ сил на заданном перемещении системы δx_1: $\delta A = -F_{\text{упр}}\delta x_1 = -cx_1\delta x_1$. Отсюда обобщенная сила Q_x, соответствующая координате x_1: $Q_x = -cx_1 = -207x_1$ Н.

Дадим системе другое возможное перемещение, при котором пружина не растягивается: $\delta x_1 = 0$, а блок 3 повернулся на угол $\delta\varphi_3$: $\delta\varphi_3 > 0$. В этом случае пружина рассматривается как жёсткий стержень, связывающий груз 1 с центром масс катка 2. В результате при повороте блока 3 груз 1 и точка *C* движутся одинаково в горизонтальном направлении. На этом перемещении системы работу совершает только пара сил с моментом *M*, приложенная к блоку 3. Имеем $\delta A = M\delta\varphi_3$, и, следовательно, обобщённая сила $Q_\varphi = M = 5$ Н·м.

Составим уравнения Лагранжа, для чего вычислим производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\dot{\varphi}_3;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{1}{2}m_1R\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\dot{\varphi}_3R^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0.$$

Полные производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1R\ddot{\varphi}_3;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = \frac{1}{2}m_1R\ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{4}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{2}m_3\right)\ddot{\varphi}_3R^2.$$

Приравнивая полные производные обобщённым силам, получим уравнения Лагранжа окончательно в виде системы алгебраических уравнений относительно ускорений $\ddot{x}_1$ и $\ddot{\varphi}_3$:

$$1{,}02\ddot{x}_1 + 0{,}12\ddot{\varphi}_3 = -207x_1;\ \ 0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5.$$

Разрешая систему относительно ускорения $\ddot{x}_1$, получим уравнение относительных колебаний груза:

$$\ddot{x}_1 + 225x_1 = -4{,}35\,.$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x_1 = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$.

Общее решение однородного уравнения $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний груза 1, $k = \sqrt{225} = 15$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{част}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим: $b = -0{,}02$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = C_1\sin 15t + C_2\cos 15t - 0{,}02\,.$$

Начальная координата x_{01} груза 1 определяется из условия, что в начальный момент времени при $t = 0$ груз находился в положении, при котором пружина была растянута относительно своего недеформированного состояния на расстояние $\Delta l_0 = 0{,}05$ м. Следовательно, $x_{01} = 0{,}05$. Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим: $C_2 = 0{,}07$.

Относительная скорость груза 1 в любой момент времени: $\dot{x}_1(t) = C_1 15\cos 15t - C_2 15\sin 15t$. По условию задачи начальная скорость груза 1

$\dot{x}_1(0) = 0$. После подстановки начального условия в выражение для скорости груза 1 получим: $C_1 = 0$.

Окончательно уравнение относительного движения груза 1:

$$x_1(t) = 0{,}07\cos 15t - 0{,}02 \text{ м}.$$

Найдём уравнение вращательного движения блока 3. Для этого в дифференциальное уравнение $0{,}12\ddot{x}_1 + 0{,}15\ddot{\varphi}_3 = 5$ подставим значение второй производной решения относительных колебаний груза 1. Получим: $\ddot{\varphi}_3 = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$. Полагая $\ddot{\varphi}_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка: $\dfrac{d\omega_3}{dt} = 33{,}33 + 12{,}6\cos 15t$, откуда найдём угловую скорость блока 3: $\omega_3 = 33{,}33t + 0{,}84\sin 15t + C_3$.

Аналогично, положив $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$, найдём закон вращательного движения блока 3: $\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + C_3 t + C_4$.

Начальные условия движения блока: при $t = 0$, $\varphi_3(0) = 0$, $\omega_3(0) = 0$. Подставляя начальные условия в уравнения движения, получим: $C_4 = 0{,}056$, $C_3 = 0$.

Окончательно уравнение вращательного движения блока 3:

$$\varphi_3 = 16{,}665t^2 - 0{,}056\cos 15t + 0{,}056.$$

Абсолютное движение s_1 груза 1 представляется суммой относительного и переносного движений:

$$s_1 = x_1 + S_C = x_1 + \frac{1}{2}R\varphi_3 = 2t^2 - 0{,}06\cos 15t - 0{,}01.$$

Упражнения

Упражнение 6.6. Каток весом $P_1 = 2P$, радиуса r, движущийся без проскальзывания по вертикальной стене, удерживается вертикальной пружиной жесткостью $C = 4P / r$, прикреплённой одним концом к центру катка, другим – к неподвижной поверхности (рис. 6.40). К нити, намотанной на барабан катка, подвешен груз 2 весом $P_2 = P$. На груз действует сила $F = P$, к катку приложена пара сил с моментом $M = Pr$.

Найти закон движения груза 2 и максимальное растяжение пружины, если движение системы началось из состояния покоя при недеформированной пружине.

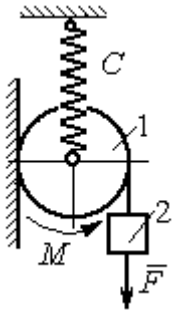


Рис. 6.40. Схема движения катка

Упражнение 6.7. Грузы 1 и 2 весом $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 30$ Н привязаны к нерастяжимой нити. Нить переброшена через неподвижные блоки B и D и охватывает снизу подвижный блок 3 весом $P_3 = 40$ Н (рис. 6.41).

Определить ускорения грузов 1 и 2 и центра масс блока 3. Весом нити и неподвижных блоков B и D пренебречь.

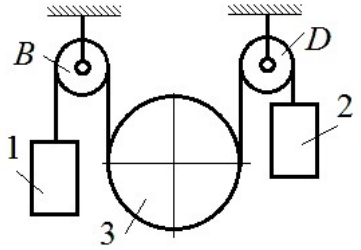


Рис. 6.41. Механическая система с двумя степенями свободы

Упражнение 6.8. Каток 1, радиуса r весом P катится по горизонтальной поверхности. К катку приложена пара сил с моментом $M = 2Pr$. Каток передаёт движение невесомой тележке (см. рис. 6.42). В кузове тележки находится каток 2 такого же радиуса r и веса P, который движется по горизонтальной поверхности кузова под действием силы $F = P$, приложенной в центре катка. Найти закон движения центра катка 2 относительно тележки, если движение системы началось из состояния покоя.

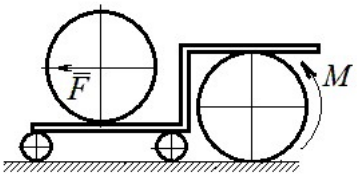


Рис. 6 42. Движение катка в кузове тележки

7. ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ ПОЯСНЕНИЯ

7.1. Ответы к упражнениям главы 1

1.1

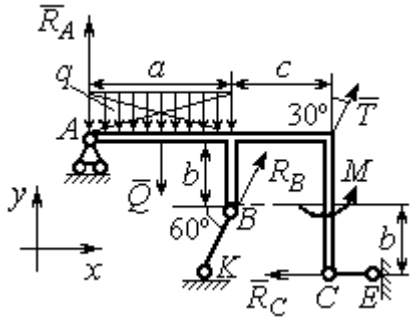


Рис. 7.1. Расчётная схема к упражнению 1.1

$$T = 15 \text{ кН}, \quad Q = 15 \text{ кН}.$$

$$R_B\cos 60^\circ + T\cos 60^\circ - R_C = 0;$$

$$R_A - Q + R_B\cos 30^\circ + T\cos 30^\circ = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{a}{2} + R_B\cos 30^\circ\cdot a + R_B\cos 60^\circ\cdot b + T\cos 30^\circ\cdot(a+c) +$$

$$+ M - R_C\cdot 2b = 0.$$

$$R_B = -3{,}8 \text{ кН}, \quad R_C = 5{,}6 \text{ кН}, \quad R_A = 5{,}3 \text{ кН}.$$

1.2

$Q = 9$ кН. $T = 2$ кН.

$$X_A + T\cos 30^\circ + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos 60^\circ + R_B - T\cos 60^\circ - F = 0;$$

$$-Q\cdot\frac{c}{2} + R_B(b + c\cos 60^\circ) - Fc\cos 60^\circ + M -$$

$$-T\cos 60^\circ(b + c\cos 60^\circ) - T\cos 30^\circ(a + c\sin 60^\circ) = 0.$$

$R_B = 10{,}02$ кН, $X_A = -9{,}53$ кН, $Y_A = -0{,}52$ кН.

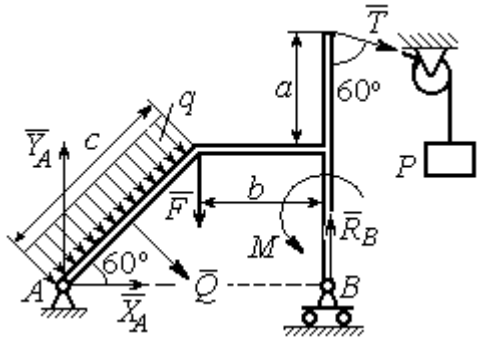


Рис. 7.2. Расчётная схема к упражнению 1.2

1.3

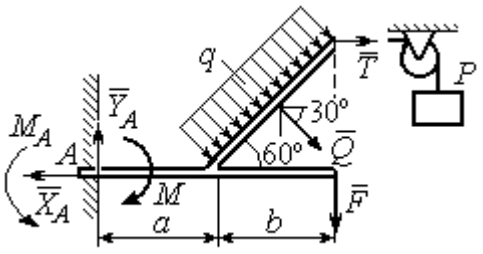


Рис. 7.3. Расчётная схема к упражнению 1.3

$Q = 8$ кН. $T = 3$ кН.

$$-X_A + T + Q\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - Q\cos 60° - F = 0;$$

$$-T2b\cos 30° - F(a+b) + M_A - M -$$

$$-Q\cos 60°\left(a + \frac{b}{2}\right) - Q\cos 30^\circ\left(b\cos 30^\circ\right) = 0.$$

$M_A = 18{,}61$ кН·м, $X_A = 9{,}93$ кН, $Y_A = 6$ кН.

1.4

$Q = 6{,}93$ кН, $T = 2$ кН.

$$-X_B - T + Q\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ = 0;$$

$$R_A - Q\cos 60^\circ + Y_B - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$-\frac{Qa}{2\cos 30^\circ} + Y_B\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + Ta - Fa\cos 60^\circ -$$

$$-F\cos 30^\circ\left(b + \frac{a}{2\cos 30^\circ}\right) + M = 0.$$

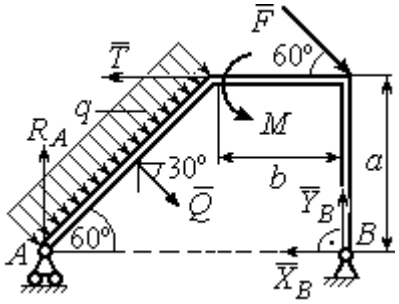


Рис.7.4. Расчётная схема к упражнению 1.4

$R_A = 0{,}72$ кН, $X_B = -5{,}5$ кН, $Y_B = 5{,}34$ кН.

1.5

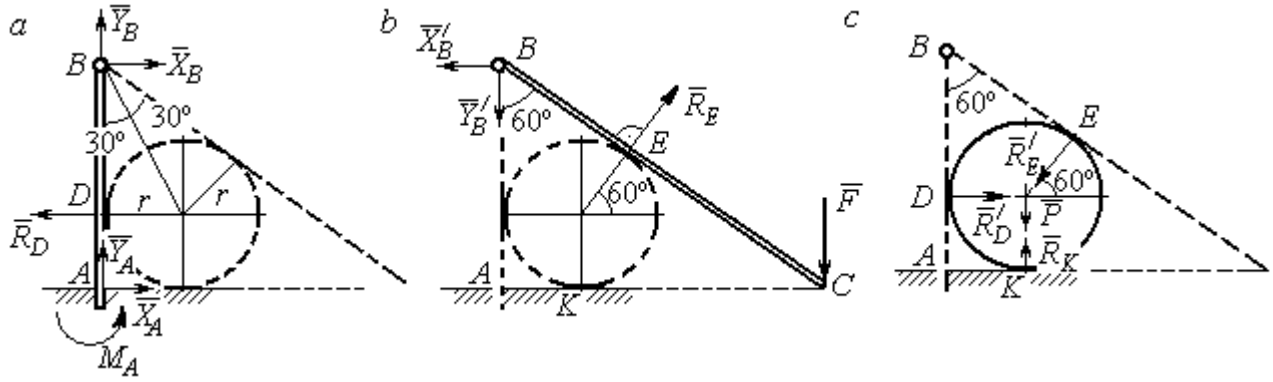


Рис. 7.5. Расчётные схемы к упражнению 1.5:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BC*; *c* – равновесие шара

$X_B = X'_B$, $Y_B = Y'_B$, $R_D = R'_D$, $R_E = R'_E$.

Балка *AB*. $AB = r + BD = r + r\operatorname{ctg}30^\circ = 2{,}73$ м.

$$X_A - R_D + X_B = 0, \quad Y_A + Y_B = 0, \quad M_A + R_D \cdot r - X_B \cdot AB = 0.$$

Балка *BC*. $BE = BD = 1{,}73$ м. $AC = BC\cos 30^\circ = 2AB\cos 30^\circ = 4{,}73$ м.

$$R_E\cos 60^\circ - X'_B = 0, \quad RE\sin 60\circ - Y'B - F = 0, \quad R_E \cdot BE - F \cdot AC = 0.$$

Шар.

$$R'_D - R'_E\cos 60^\circ = 0, \quad R_K - P - R'_E\cos 30^\circ = 0.$$

$R_E = 21{,}87$ кН, $Y_B = 10{,}94$ кН, $X_B = 10{,}94$ кН, $R_D = 10{,}94$ кН;

$R_K = 20{,}94$ кН, $X_A = 0$, $Y_A = -10{,}94$ кН, $M_A = 18{,}93$ кН·м.

1.6

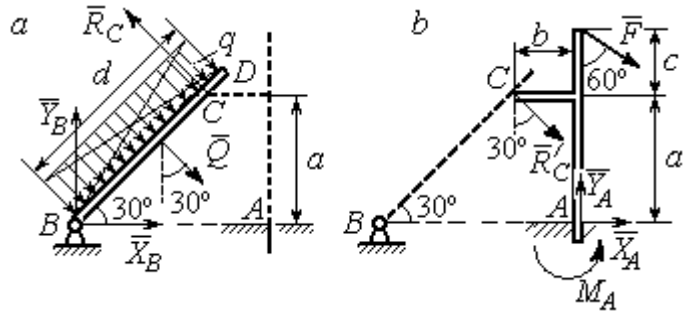


Рис. 7.6. Расчётные схемы к упражнению № 1.6:
a – равновесие балки *BD*; *b* – равновесие балки *AC*

Балка *BD*. $Q = 15$ кН.

$$X_B + Q\cos 60^\circ - R_C\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_B - Q\cos 30^\circ + R_C\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Q\frac{d}{2} + R_C\, 2a = 0.$$

Балка *AC*. $R_C = R'_C$.

$$X_A + R'_C\cos 60^\circ + F\cos 30^\circ = 0,\ Y_A - R'_C\cos 30^\circ - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$M_A - R'_C\cos 60^\circ \cdot a + R'_C\cos 30^\circ \cdot b - F\cos 30^\circ (a + c) = 0.$$

$$X_B = 0{,}61 \text{ кН},\ \ Y_B = 8{,}3 \text{ кН},\ R_C = 9{,}37 \text{ кН};$$

$$X_A = -8{,}15 \text{ кН},\ \ Y_A = 10{,}11 \text{ кН},\ \ M_A = 11{,}65 \text{ кН·м}.$$

1.7

Балка *AB*. $Q_1 = 6$ кН.

$T = P = 3$ кН.

$$X_A + R_B - T\cos 60^\circ + F = 0;$$

$$Y_A - Q_1 - T\cos 30^\circ = 0;$$

$$M_A - R_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_1\frac{a}{2} +$$

$$+ T\cos 30^\circ a + T\cos 60^\circ c\cos 30^\circ -$$

$$- F\left[c + (b + c)\cos 30^\circ\right] = 0.$$

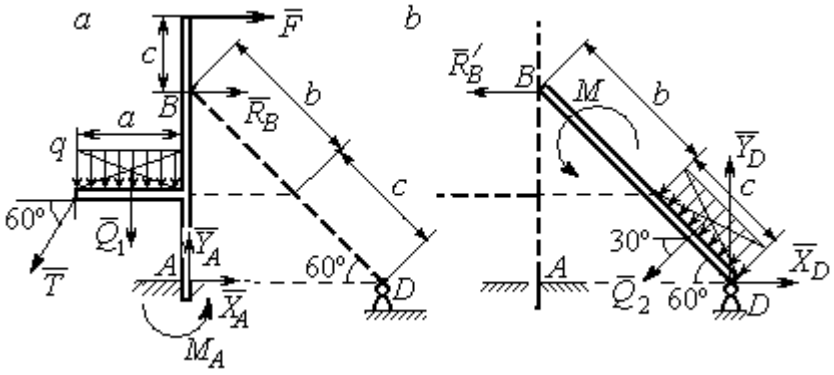


Рис. 7.7. Расчётные схемы к упражнению 1.7:
a – равновесие балки *AB*; *b* – равновесие балки *BD*

Балка *DB*. $Q_2 = 3$ кН. $R'_B = R_B$.

$$X_D - R'_B - Q_2\cos 30^\circ = 0,\ \ Y_D - Q_2\cos 60^\circ = 0,\ M + R'_B(b + c)\cos 30^\circ + Q_2\frac{c}{2} = 0.$$

$$X_A = -1{,}49 \text{ кН},\ Y_A = 8{,}6 \text{ кН},\ M_A = 8{,}86 \text{ кН},\ R_B = -1{,}01 \text{ кН};$$

$$X_D = 1{,}59 \text{ кН},\ \ Y_D = 1{,}5 \text{ кН}.$$

1.8

Шар.

$$R_B\cos60^\circ - R_D\cos60^\circ = 0;$$

$$R_B\cos30^\circ + R_D\cos30^\circ - P = 0.$$

Балка AC. $R'_B = R_B$.

$$X_A - R'_B\cos60^\circ = 0;$$

$$Y_A - R'_B\cos30^\circ + F = 0;$$

$$M_A - R'_B AB + F \cdot AC\cos30^\circ = 0.$$

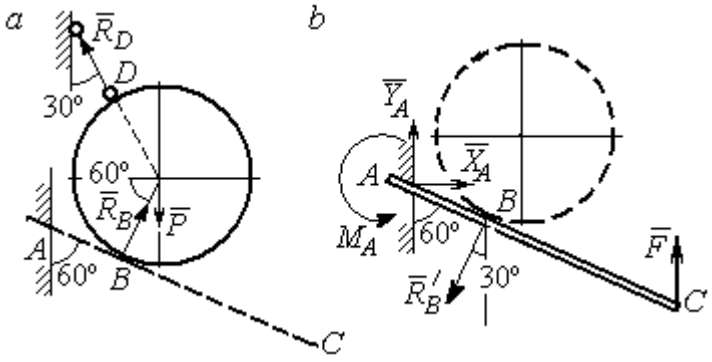


Рис. 7.8. Расчётные схемы к упражнению 1.8:
a – равновесие шара; *b* – равновесие балки *AC*

$X_A = 2{,}89$ кН, $Y_A = 0$ кН, $M_A = -11{,}55$ кН·м, $R_B = 5{,}77$ кН, $R_D = 5{,}77$ кН.

1.9

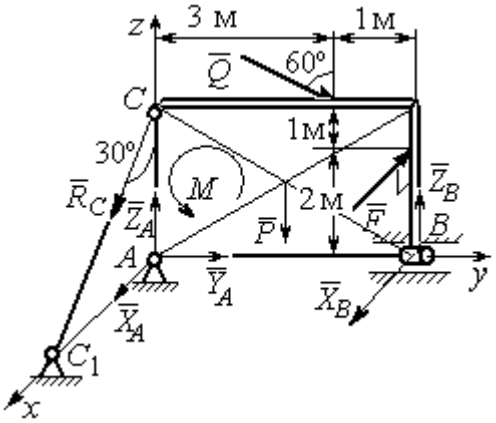


Рис. 7.9. Расчётная схема
к упражнению 1.9

$$X_A + R_C\cos60^\circ + X_B - F = 0;$$

$$Y_A + Q\cos30^\circ = 0;$$

$$Z_A - R_C\cos30^\circ - Q\cos60^\circ + Z_B - P = 0;$$

$$M - Q\cos60^\circ \cdot 3 - Q\cos30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 - P \cdot 2 = 0;$$

$$R_C\cos60^\circ \cdot 3 - F \cdot 2 = 0,\ -X_B \cdot 4 + F \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}34$ кН, $Y_A = 2{,}6$ кН;

$Z_A = 8{,}92$ кН, $R_C = 10{,}67$ кН;

$X_B = 8$ кН, $Z_B = 3{,}82$ кН.

1.10

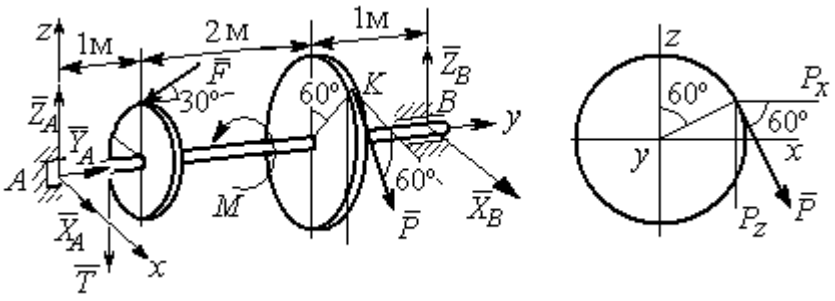


Рис. 7.10. Расчётные схемы к упражнению 1.10

$T = Q = 3$ кН.

$$X_A + P\cos 60^\circ + X_B = 0,\ \ Y_A - F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ - P\cos 30^\circ - T + Z_B = 0.$$

$$-T\cdot 1 - F\cos 60^\circ \cdot 1 + F\cos 30^\circ \cdot r - P\cos 30^\circ \cdot 3 + Z_B \cdot 4 = 0;$$

$$-Tr + PR - M = 0,\ \ -P\cos 60^\circ \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0.$$

$X_A = 5{,}6$ кН, $Y_A = 3{,}46$ кН, $Z_A = 5{,}48$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 2{,}4$ кН, $Z_B = 5{,}06$ кН.

1.11

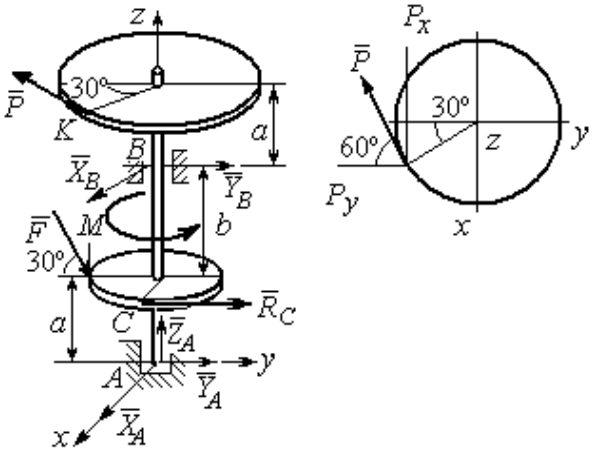


Рис. 7.11. Расчётные схемы к упражнению 1.11

$R_C = Q = 3$ кН.

$$X_A + X_B - P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A + Y_B - P\cos 60^\circ + R_C + F\cos 30^\circ = 0;$$

$$Z_A - F\cos 60^\circ = 0;$$

$$-Y_B(a+b) + P\cos 60^\circ(2a+b) - R_C a - -$$

$$F\cos 30^\circ \cdot a + F\cos 60^\circ \cdot r = 0;$$

$$X_B(a+b) - P\cos 30^\circ(2a+b) = 0;$$

$$-PR + R_C r + M = 0.$$

$X_A = -1{,}85$ кН, $Y_A = -5{,}64$ кН, $Z_A = 2$ кН, $P = 6{,}4$ кН, $X_B = 7{,}39$ кН, $Y_B = 2{,}38$кН.

1.12

$$T = Q = 3 \text{ кН}.$$

$$X_A + T + X_D = 0;\ Y_A - F + P\cos 60^\circ = 0,$$

$$Z_A + Z_D + P\cos 30^\circ = 0;$$

$$Fa\sin 30^\circ + Z_D(b+2a) + P(2b+2a)\cos 30^\circ = 0;$$

$$Ta\sin 30^\circ - Pa\cos 30^\circ + M = 0;$$

$$-Ta - X_D(b+2a) + Pa\cos 60^\circ + Fa\cos 30^\circ = 0.$$

$$X_A = 0{,}8 \text{ кН},\quad Y_A = 2{,}56 \text{ кН},\ \ Z_A = 1{,}3 \text{ кН};$$

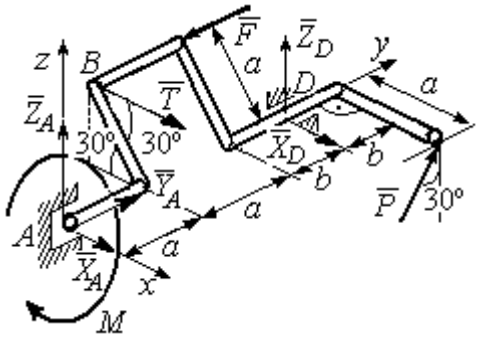


Рис. 7.12. Расчётная схема к упражнению 1.12

$$P = 2{,}89 \text{ кН},\ X_D = 0{,}76 \text{ кН},\ Z_D = -3{,}80 \text{ кН}.$$

1.13

Минимальный вес груза P:

$$T_{\min} + F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0$$

Максимальный вес груза P:

$$T_{\max} - F_{\text{тр}\,A} - N_B = 0;$$

$$-F_{\text{тр}\,B} + N_A - Q = 0;$$

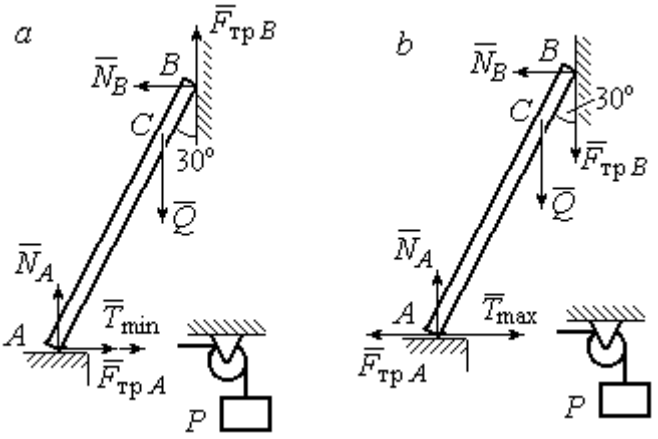


Рис. 7.13. Расчётные схемы к упражнению 1.13:
a – расчёт минимального веса груза;
b – расчёт максимального веса груза

$$-F_{\text{тр}\,B} \cdot AB\sin 30° + N_B \cdot AB\cos 30° - Q \cdot AC\sin 30° = 0;$$

$$F_{\text{тр}\,A} = f N_A,\ F_{\text{тр}\,B} = f N_B.$$

$$T_{\min} = 31.77 \text{ Н} < P < T_{\max} = 130{,}51 \text{ Н}.$$

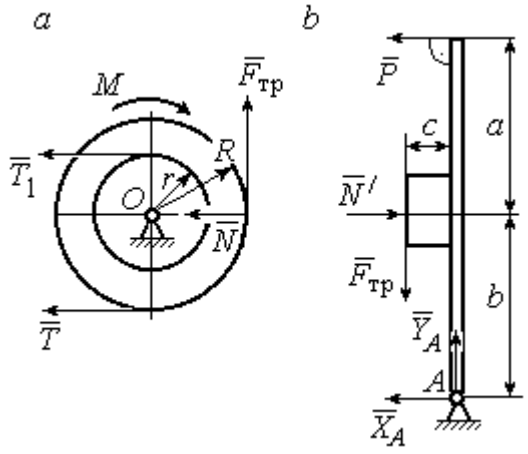


Рис. 7.14. Расчётные схемы
к упражнению 1.14:
a – равновесие шкива; *b* – равновесие рычага

1.14

Шкив. $T = T_1 = Q$.

$$T \cdot R - T_1 r + M - F_{\text{тр}} R = 0.$$

$$F_{\text{тр}} = 266{,}67 \text{ Н};$$

$$N = \frac{F_{\text{тр}}}{f} = 666{,}67 \text{ Н}.$$

Рычаг. $N = N'$. $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$.

$$P(a+b) - N' \cdot b + F'_{\text{тр}} c = 0.$$

$$P = 320 \text{ Н}.$$

$$-X_A - P + N' = 0;$$

$$Y_A - F'_{\text{тр}} = 0.$$

$$X_A = 346{,}67 \text{ Н},\ Y_A = 266{,}67 \text{ Н}.$$

7.2. Ответы к упражнениям главы 2

2.1

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1 = 3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2},\ \omega_1(1) = |\omega_{1z}(1)| = 3 \text{ рад/с}.$$

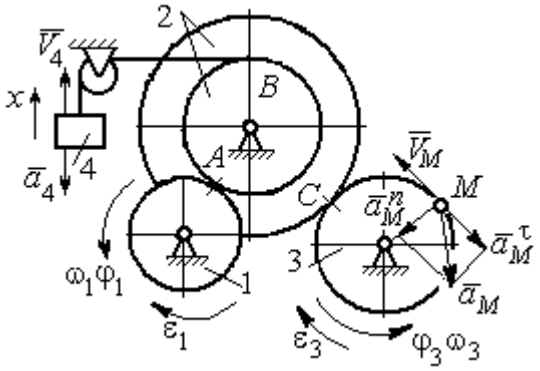


Рис. 7.15. Расчётная схема к упражнению 2.1

$$\omega_{3z} = \omega_{1z}\frac{R_1}{r_2}\frac{R_2}{R_3} = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)\frac{4}{3};$$

$$\omega_3(1) = |\omega_{3z}(1)| = 4 \text{ рад/с}.$$

$$V_M(1) = \omega_3(1)R_3 = 40 \text{ см/с}.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = -\frac{2\pi^2}{3}\sin\frac{\pi t}{2},\quad \varepsilon_{3z}(1) = -\frac{2\pi^2}{3};$$

$$\varepsilon_3(1) = |\varepsilon_{3z}(1)| = \frac{2\pi^2}{3} = 6{,}58 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^\tau,\ a_M^n(1) = \omega_3^2(1)R_3 = 160 \text{ см/с}^2,\ a_M^\tau(1) = \varepsilon_3(1)R_3 = 65{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M(1) = 173 \text{ см/с}^2.$$

$$V_{4x} = V_A = \omega_{1z}R_1 = \left(3 + \pi\cos\frac{\pi t}{2}\right)8;\ V_4(1) = |V_{4x}(1)| = 24 \text{ см/с}.$$

$$\dot{V}_{4x} = -4\pi^2\sin\frac{\pi t}{2},\ \dot{V}_{4x}(1) = -4\pi^2;\ a_4(1) = |\dot{V}_{4x}(1)| = 39{,}48 \text{ см/с}^2.$$

2.2

$$V_{4x} = \dot{x}_4 = 1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$V_{4x}(3) = 2{,}05 \text{ м/с},\ V_4 = |V_{4x}(3)|$$

$$\omega_{3z} = \frac{V_{4x}}{r_3} = \frac{1}{r_3}\left(1 - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$\omega_{3z}(3) = 6{,}83 \text{ рад/с};\ \omega_3 = |\omega_{3z}(3)|.$$

$$\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = \frac{1}{r_3}\left(\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3}\right).$$

$$\varepsilon_{3z}(3) = 3{,}65 \text{ рад/с}^2;\ \varepsilon_3 = |\varepsilon_{3z}(3)|.$$

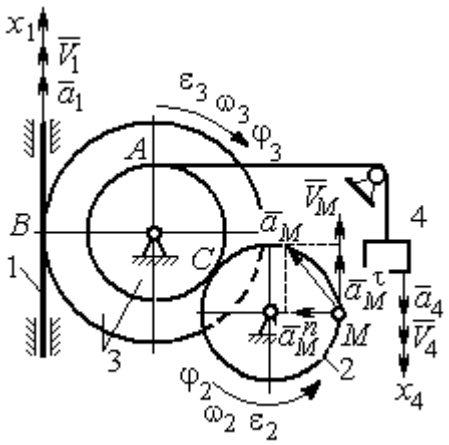


Рис. 7.16. Расчётная схема к упражнению 2.2

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \omega_2=\omega_3\frac{r_3}{R_2}=10{,}25\ \text{рад/с};\ V_M=\omega_2 R_2=2{,}05\ \text{м/с}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}=\frac{R_2}{r_3};\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_3\frac{r_3}{R_2}=5{,}47\ \text{рад/с}^2.$$

$$a_M^n=\omega_2^2 R_2=20{,}4\ \text{м/с}^2;\ \ a_M^\tau=\varepsilon_2 R_2=1{,}09\ \text{м/с}^2.$$

$$a_M=\sqrt{\left(a_M^n\right)^2+\left(a_M^\tau\right)^2}=20{,}43\ \text{м/с}^2.$$

$$V_1=\omega_3 R_3=2{,}73\ \text{м/с};\ a_1=\dot V_1=\dot\omega_3 R_3=\varepsilon_3 R_3=2{,}19\ \text{м/с}^2.$$

2.3

$$BP_2=BC\cos30^\circ=4{,}33\ \text{см};\ CP_2=2{,}5\ \text{см}.$$

$$\omega_{BC}=\frac{V_B}{BP_2}=1{,}15\ \text{рад/с};\ \ V_C=\omega_{BC}CP_2=2{,}87\ \text{см/с};$$

$$\omega_1=\frac{V_C}{CP_1}=0{,}72\ \text{рад/с};\ EP_1=2R_1\cos30^\circ=3{,}46\ \text{см};$$

$$V_E=\omega_1 EP_1=2{,}49\ \text{см/с};\ EP_3=2AE\cos30^\circ=10{,}39\ \text{см};$$

$$\omega_{AE}=\frac{V_E}{EP_3}=0{,}24\ \text{рад/с};\ EA=AP_3;$$

$$V_A=\omega_{AE}AP_3=1{,}44\ \text{см/с},\ \ \omega_{AO}=\frac{V_A}{AO}=0{,}24\ \text{рад/с}.$$

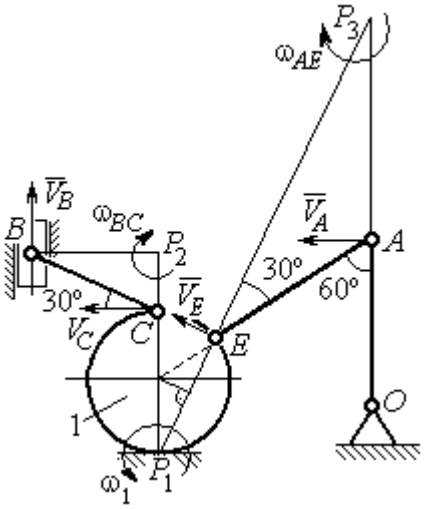


Рис. 7.17. Расчётная схема к упражнению 2.3

2.4

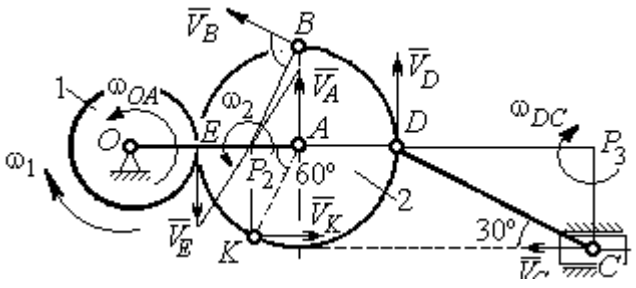


Рис. 7.18. Расчётная схема к упражнению 2.4

E – точка касания дисков.

$$V_E=\omega_1 r_1=18\ \text{см/с}.$$

$$V_A=\omega_{OA}\left(r_1+r_2\right)=18\ \text{см/с}.$$

$$EP_2=P_2A=3\ \text{см},\ \omega_2=\frac{V_E}{EP_2}=6\ \text{рад/с}.$$

$$V_K=\omega_2 P_2K=31{,}18\ \text{см/с}.$$

$$V_B=\omega_2 P_2B=40{,}25\ \text{см/с};\ V_D=\omega_2 P_2D=54\ \text{см/с}.$$

$DC = 2r_2$, $\omega_{DC} = \dfrac{V_D}{DP_3} = 5{,}197$ рад/с; $V_C \cos 30^\circ = V_D \cos 60^\circ$, $V_C = 31{,}18$ см/с.

2.5

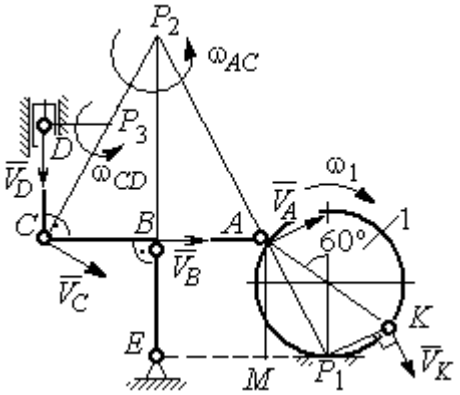


Рис. 7. 19. Расчётная схема к упражнению 2.5.

$BE = 1{,}5R_1$; $R_1 = 2{,}67$ см.

$KP_1 = R_1$; $\omega_1 = \dfrac{V_K}{KP_1} = 0{,}75$ рад/с.

$AP_1 = \dfrac{AM}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см; $V_A = \omega_1 P_1 A = 3{,}46$ см/с.

$AP_2 = 2AB = 8$ см; $\omega_{AC} = \dfrac{V_A}{AP_2} = 0{,}43$ рад/с.

$V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ$; $V_B = 2{,}99$ см/с.

$\omega_{BE} = \dfrac{V_B}{BE} = 0{,}75$ рад/с; $V_C = V_A = 3{,}46$ см/с; $CP_3 = \dfrac{DC}{\cos 30^\circ} = 4{,}62$ см;

$\omega_{CD} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}75$ рад/с; $V_D \cos 0^\circ = V_C \cos 60^\circ$; $V_D = 1{,}73$ см/с.

2.6

$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 12$ см/с; $\omega_{AD} = 0$, $V_D = V_A$.

$\omega_{O_1C} = \dfrac{V_D}{DO_1} = 3$ рад/с;

$V_C = \omega_{O_1C} \cdot O_1C = 48$ см/с.

$CB = CP = 16$ см; $\omega_{CB} = \omega_{CL} = \dfrac{V_C}{CP} = 3$ рад/с.

$PL = \dfrac{CP}{\cos 30^\circ} = 18{,}48$ см; $PB = 2BC \cos 30^\circ$.

$V_L = \omega_{CL} \cdot PL = 55{,}44$ см/с;

$V_B = \omega_{CB} \cdot PB = 83{,}13$ см/с.

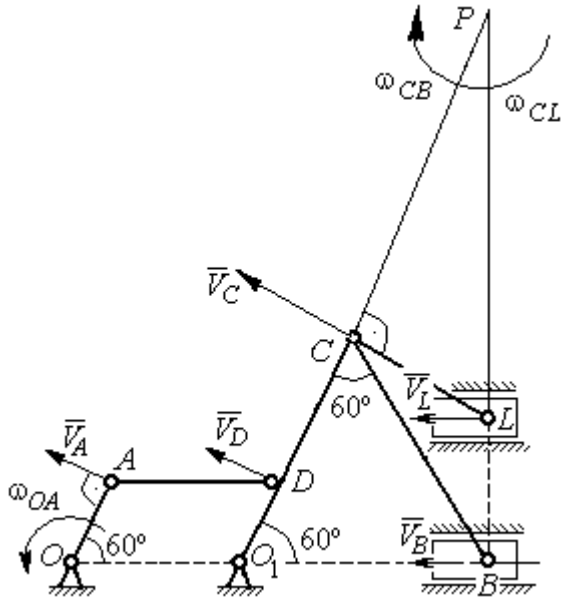


Рис. 7.20. Расчётная схема к упражнению 2.6.

2.7

$V_D = \omega_1 R_1 = 30$ см/с; $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 15$ см/с.

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = 3 \text{ рад/с.}$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2 B = 21{,}21 \text{ см/с.}$$

$V_C \cos 0^\circ = V_B \cos 45^\circ$; $V_C = 15$ см/с.

$CP_3 = CB$; $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 1{,}87$ рад/с.

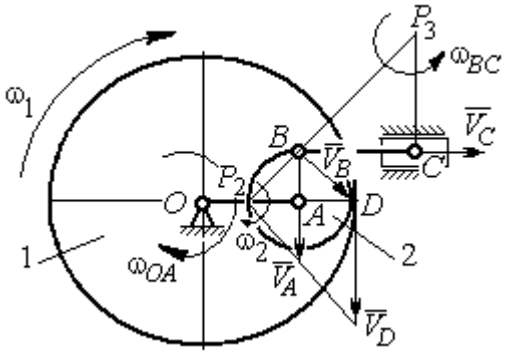


Рис. 7.21. Расчётная схема к упражнению 2.7

2.8

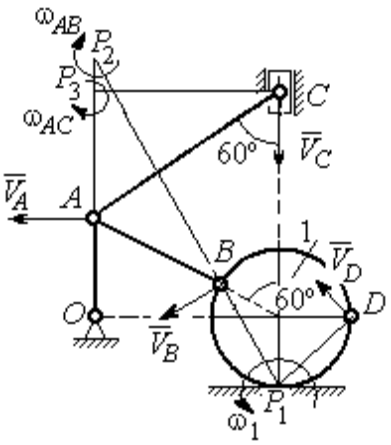


Рис. 7.22. Расчётная схема к упражнению 2.8

$AC = AB + R_1 = 12$ см; $CP_3 = AC \cos 30^\circ = 10{,}39$ см.

$\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_3} = 0{,}48$ рад/с; $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_3 = 2{,}89$ см/с.

$$AB = AP_2; \quad \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_2} = 0{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$BP_2 = 2AB \cos 30^\circ = 17{,}32 \text{ см.}$$

$$V_B = \omega_{AB} BP_2 = 5{,}02 \text{ см/с.}$$

$OA = (AB + R_1)\sin 30° = 6$ см; $\omega_{OA} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}48$ рад/с.

$$BP_1 = 2R_1 \cos 30^\circ = 3{,}46 \text{ см;} \quad \omega_1 = \frac{V_B}{BP_1} = 1{,}45 \text{ рад/с.}$$

$$DP_1 = R_1\sqrt{2} = 2{,}82 \text{ см;} \; V_D = \omega_1 DP_1 = 4{,}09 \text{ см/с.}$$

2.9

$$V_A = \omega_{OA} OA = 12 \text{ см/с;} \quad AP = 2AB = 2BC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 27{,}71 \text{ см.}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 0{,}43 \text{ рад/с;} \; V_B \cos 0^\circ = V_A \cos 30^\circ; \; V_B = 10{,}38 \text{ см/с.}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = 1{,}29 \text{ рад/с.}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC}, \; a_C = 0.$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO},\ a_O = 0.$$

$$\bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^\tau_{BC} = \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO} + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти a^τ_{BC}

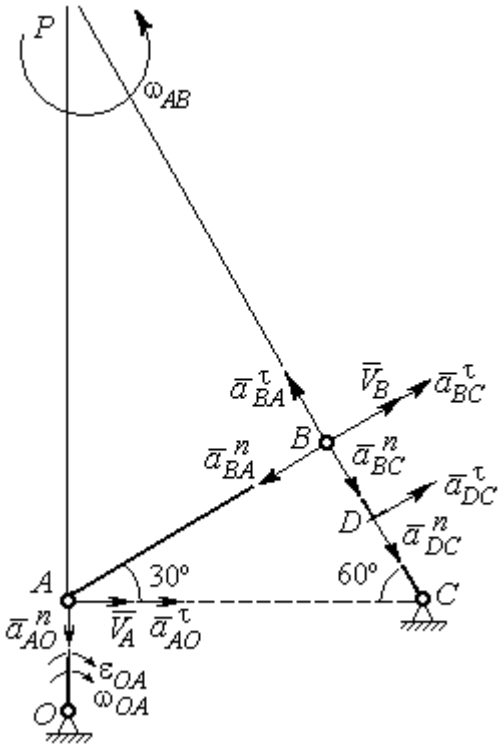


Рис. 7.23. Расчётная схема к упражнению 2.9

$$a^n_{AO} = \omega^2_{AO} \cdot AO = 36 \text{ см/с}^2;$$

$$a^\tau_{AO} = \varepsilon_{AO} \cdot AO = 8 \text{ см/с}^2;$$

$$AB = BC \cdot \text{tg}60^\circ = 13{,}86 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 2{,}56 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{AB} = \varepsilon_{AB} AB.$$

$$a^n_{BC} = \omega^2_{BC} \cdot BC = 13{,}31 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{BC} = \varepsilon_{BC} BC.$$

Проекция на AB:

$$a^\tau_{BC} = -a^n_{AO}\cos 60^\circ +$$

$$+ a^\tau_{AO}\cos 30^\circ - a^n_{BA} = 13{,}63 \text{ см/с}^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\left|a^\tau_{BC}\right|}{BC} = 1{,}7 \text{ рад/с}^2.$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^\tau_{DC}.$$

$$a^n_{DC} = \omega^2_{BC} \cdot DC = 6{,}65 \text{ см/с}^2;\ \ a^\tau_{DC} = \varepsilon_{BC} \cdot DC = 6{,}8 \text{ см/с}^2.$$

$$a_D = \sqrt{\left(a^n_{DC}\right)^2 + \left(a^\tau_{DC}\right)^2} = 9{,}51 \text{ см/с}^2.$$

2.10

$$V_A = \omega_1 r_1 = 12 \text{ см/с};\ P_2 A = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{P_2 A} = 2{,}4 \text{ рад/с}.$$

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ;\ V_B = 6{,}93 \text{ см/с}.$$

$$P_3 B = BC\cos 30^\circ = 8{,}66 \text{ см};$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{P_3 B} = 0{,}8 \text{ рад/с}.$$

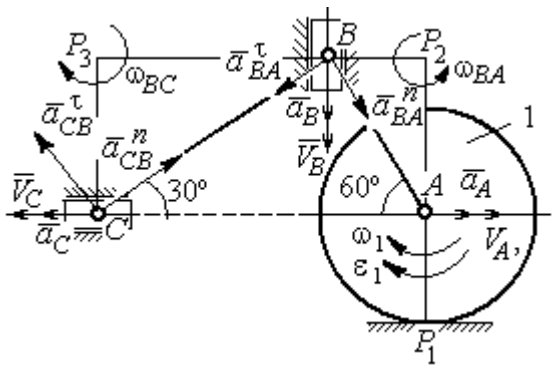


Рис. 7.24. Расчётная схема к упражнению 2.10

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$ Найти a_B.

Проекция на BA: $a_B\cos30° = a_A\cos60° + a^n_{BA}$.

$$a_A = a^\tau_A = \varepsilon_1 r_1 = 8 \text{ см/с}^2;\ AB = BC\operatorname{tg}30° = 5{,}77 \text{ см}.$$

$$a^n_{BA} = \omega^2_{BA}\cdot BA = 33{,}23 \text{ см/с}^2;\ \ a_B = 43{,}03 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar a_C = \bar a_B + \bar a^n_{CB} + \bar a^\tau_{CB}.$$

Проекция на BC: $a_C\cos60° = a_B\cos60° - a^n_{CB}$,

$$a^n_{CB} = \omega^2_{CB}\cdot CB = 6{,}4 \text{ см/с}^2;\ \ a_C = a_B - 2a^n_{CB} = 30{,}23 \text{ см/с}^2.$$

7.3. Ответы к упражнениям главы 3

3.1

$$CM_1 = S_r(1) = \frac{40}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 11{,}55 \text{ см}.$$

Так как $CM_1\cos30° = 10$ см $= R$, то точка M_1 лежит на вертикальном диаметре.

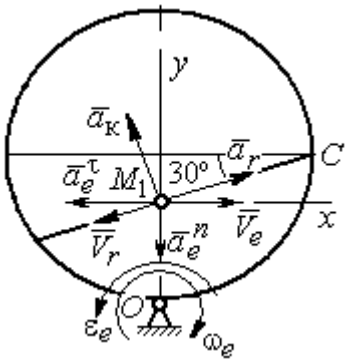


Рис. 7.25. Расчётная схема к упражнению 3.1

$$V_r = \dot S_r = \frac{40\pi}{9}\cos\frac{\pi t}{3};\ V_r(1) = 6{,}98 \text{ см/с}.$$

$$\omega_e(1) = 0{,}5 \text{ рад/с};\ OM_1 = R - \frac{1}{2}CM_1 = 4{,}23 \text{ см}.$$

$$V_e = \omega_e OM_1;\ \ V_e(1) = 2{,}12 \text{ см/с}.$$

$$\bar V_M = \bar V_e + \bar V_r.$$

$$V_{Mx} = V_e - V_r\cos30° = -3{,}93 \text{ м/с};\ V_{My} = -V_r\cos60° = -3{,}49 \text{ м/с};$$

$$V_M = \sqrt{(V_{Mx})^2 + (V_{My})^2} = 5{,}26 \text{ см/с}.$$

$$\bar a_M = \bar a_e + \bar a_r + \bar a_к.$$

$$\bar a_e = \bar a^n_e + \bar a^\tau_e,\ \ a^n_e = \omega^2_e OM_1;\ \ a^n_e(1) = 1{,}06 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot\omega_e = -\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3},\ \ \dot\omega_e(1) = -0{,}91 \text{ рад/с}^2;\ \ \varepsilon_e = |\dot\omega_e(1)| = 0{,}91 \text{ рад/с}^2,$$

$$a^\tau_e(1) = \varepsilon_e\cdot OM_1 = 3{,}85 \text{ см/с}^2.$$

$$\dot{V}_r = -\frac{40\pi^2}{27}\sin\frac{\pi t}{3},\ \dot{V}_r(1) = -12{,}66;\ a_r = \left|\dot{V}_r(1)\right| = 12{,}66 \text{ см/с}^2$$

$$a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 6{,}98 \text{ см/с}^2.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r + \bar{a}_к.$$

$$a_{Mx} = -a_e^\tau + a_r\cos 30° - a_к\cos 60° = 3{,}62 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n + a_r\cos 60° + a_к\cos 30° = 11{,}31 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 11{,}87 \text{ см/с}^2.$$

3.2

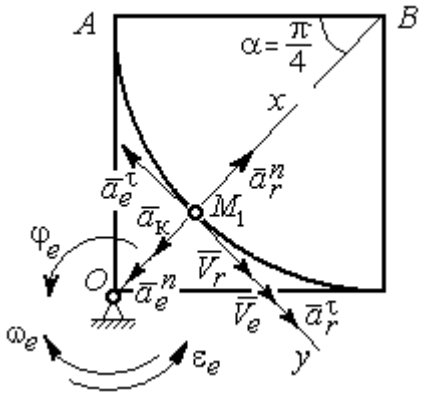


Рис. 7.26. Расчётная схема к упражнению 3.2

Положение M_1:

$$\alpha = \frac{S_r(1)}{R} = \frac{\pi}{4};\ \ OM_1 = 8{,}28 \text{ см}.$$

$$\dot{S}_r = 10\pi t;\ \ V_r = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 31{,}42 \text{ см/с}.$$

$$\dot{\varphi}_e = 2t - 5,$$

$$\dot{\varphi}_e(1) = -3 \text{ рад/с},\ \ \omega_e = \left|\dot{\varphi}_e(1)\right| = 3 \text{ рад/с}.$$

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 = 24{,}6 \text{ см/с}.$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_e + \bar{V}_r \cdot\ V_{Mx} = V_e + V_r = 56{,}02 \text{ см/с};$$

$$V_{My} = 0;\ V_M = 56{,}02 \text{ см/с}.$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_к.$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau\ \cdot\ a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 74{,}52 \text{ см/с}^2;$$

$$\dot{\omega}_e = 2 \text{ рад/с}^2;\ \varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|;\ \ a_e^\tau(1) = \varepsilon_e OM_1 = 16{,}56 \text{ см/с}^2;$$

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau \cdot \dot{V}_r = 10\pi;\ a_r^\tau = \left|\dot{V}_r\right| = 10\pi = 31{,}42 \text{ см/с}^2;$$

$$a_r^n(1) = \frac{V_r^2}{R} = 49{,}36 \text{ см/с}^2;\ \ a_к = 2\left|\omega_e\right| \cdot \left|V_r\right|;\ \ a_к(1) = 62{,}84 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{Mx} = -a_e^n + a_r^n - a_к = -88 \text{ см/с}^2;\ a_{My} = -a_e^\tau + a_r^\tau = 14{,}86 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = 89{,}24 \text{ см/с}^2.$$

7.4. Ответы к упражнениям главы 4

4.1

$$m\ddot{x} = F - P\cos 60° - F_{\text{тр}}, \quad m\ddot{y} = N - P\cos 30° = 0.$$

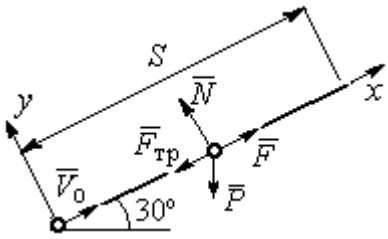


Рис. 7.27. Расчётная схема к упражнению 4.1

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 30°;$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}kt - 3{,}4, \quad \dot{x} = \frac{1}{4}kt^2 - 3{,}4t + V_0;$$

$$x = \frac{1}{12}kt^3 - 1{,}7t^2 + V_0 t.$$

Конечные условия: $t = 2$ с; $x = S = 2$ м; $V = 2V_0$.

$$V_0 = k - 6{,}8; \quad 1 = \frac{1}{3}k - 3{,}4 + V_0.$$

$$k = 8{,}4; \; V_0 = 1{,}6 \text{ м/с}.$$

4.2

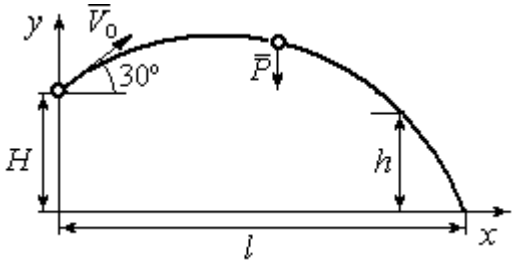


Рис. 7.28. Расчётная схема к упражнению 4.2

Уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = 0; \; \dot{x} = V_0\cos 30°; \; x = V_0 t\cos 30°.$$

$$m\ddot{y} = -P; \dot{y} = -gt + V_0\cos 60°;$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t\cos 60° + H.$$

Краевое условие пролёта высоты h:

$$t = 1 \text{ с}; \; y = h = 7 \text{ м}.$$

Подставляя краевые условия в уравнение движения, находим: $V_0 = 3{,}81$ м/с.

Краевое условие падения точки:

$$t = t_{\text{пад}}; \; x = l; \; y = 0.$$

Подстановка в уравнения движения условия приводит к системе:

$$l = V_0 t_{\text{пад}}\cos 30°; \; 0 = -\frac{1}{2}gt_{\text{пад}}^2 + V_0 t_{\text{пад}}\cos 60° + H.$$

Находим: $t_{\text{пад}} = 1{,}64$ с; $l = 5{,}41$ м.

4.3

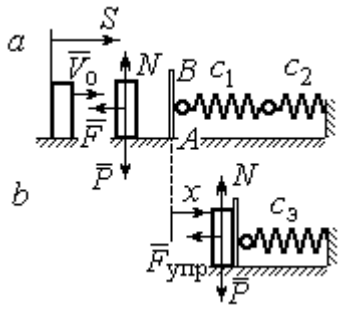


Рис. 7.29. Расчётная схема к упражнению 4.3: *a* – движение груза до начала колебаний; *b* – колебания груза

Уравнение движения груза (рис. 7.29, *a*):

$$m\ddot{S} = -F = -k\dot{S}.$$

Начальные условия: $t = 0;\ S = 0;\ \dot{S} = V_0$.

Решение: $S = \dfrac{mV_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 6\left(1 - e^{-t}\right)$ м.

Скорость груза: $\dot{S} = 6e^{-t}$.

Скорость груза в момент соединения с площадкой AB: $V_1 = \dot{S}(1) = 0{,}21$ м/с.

Уравнение колебаний груза на эквивалентной пружине (рис. 7.29, *b*):

$$m\ddot{x} = -F_{упр} = -c_э x;\ c_э = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 30 \text{ Н/м}.$$

Начальные условия движения: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = V_1$.

Общий вид решения: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\dfrac{c_э}{m}} = 7{,}75$ рад/с,

где константы: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_1}{\omega} = 0{,}28$ м. Закон движения груза $x = 0{,}28\sin 7{,}75t$.

Максимальное сжатие 0,28 м.

4.4

Жесткость эквивалентной пружины

$$c_э = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3}c.$$

Уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = P - F_{упр} = P - c_э(\lambda_{ст} + x) = -c_э x.$$

Общее решение:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\ \omega = \sqrt{\frac{c_э}{m}} = 10{,}33 \text{ рад/с}.$$

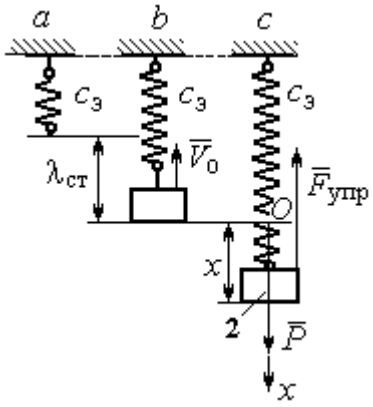


Рис. 7.30. Расчётная схема к упражнению 4.4: *a* – нерастянутая пружина; *b* – положение статического равновесия; *c* – произвольное положение груза

Начальные условия: $t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = -V_0$.

Находим константы интегрирования: $C_1 = 0;\ C_2 = \dfrac{V_0}{\omega} = 0{,}39$ м.

Закон движения груза: $x = 0{,}39\sin 10{,}33t$.

Амплитуда $A = 0{,}39$ м, частота $\omega = 10{,}33$ рад/с.

4.5

Скорость человека, находящегося в самолёте, в нижней точке траектории (точка C):

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mg\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right].$$

Откуда $V_C^2 = V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right]$.

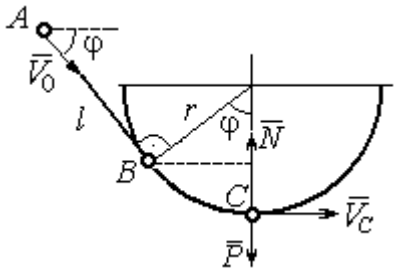


Рис. 7.31. Расчётная схема к упражнению 4.5

Уравнение движения человека, двигающегося вместе с самолётом, в проекции на нормаль в точке C: $\dfrac{mV_C^2}{r} = N - P$, где N – реакция корпуса самолёта. Сила давления человека на корпус самолёта по величине равна реакции, но направлена в противоположную сторону.

Из условия $N \le 3P$ следует неравенство: $V_C^2 \le 2gr$, или

$V_0^2 + 2g\left[l\sin\varphi + r(1-\cos\varphi)\right] \le 2gr$. Откуда $r \ge \dfrac{V_0^2 + 2gl\sin\varphi}{2g\cos\varphi}$.

4.6

Из уравнения теоремы об изменении кинетической энергии шарика в точке B с учётом, что $V_A = 0$, найдём:

$$\frac{mV_B^2}{2} = \frac{ca^2}{2} + mg\left[R + R\cos 60° - a\cos 30°\right].$$

Составим уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки на участке BD:

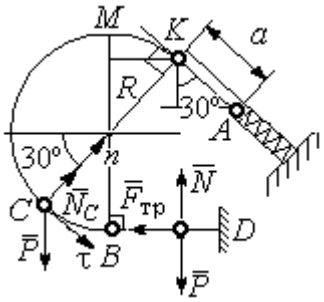


Рис. 7.32. Расчётная схема к упражнению 4.6

$-\frac{mV_B^2}{2} = -fNs$, где s – путь точки до остановки. С учётом данных задачи, получим: s = 5,39 м.

Уравнение движения шарика в проекции на нормальную ось в точке C

$$\frac{mV_C^2}{R} = N_C - P\cos 60°.$$

Для вычисления реакции опоры шарика на трубу имеем равенство $N_C = \frac{mV_C^2}{R} + P\cos 60° = \frac{1}{R}\left[mV_B^2 - 2mgR(1-\cos 60°)\right] + mg\cos 60°$, где кинетическая энергия шарика в точке B: $mV_B^2 = ca^2 + 2mgR\left[(1+\cos 60°) - \frac{a}{R}\cos 30°\right]$. Получим: $N_C = 18{,}71$ Н. Давление шарика на трубку равно реакции опоры и направлено в противоположную сторону.

7.5. Ответы к упражнениям главы 5

5.1

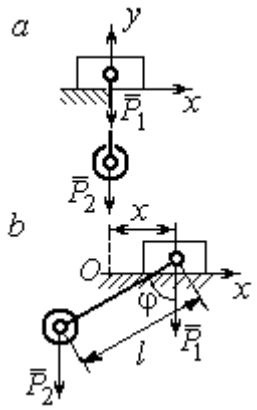


Рис. 7.33. Расчётная схема к упражнению 5.1:
a – начальное положение системы;
b – произвольное положение

x_0 – координата центра тяжести системы в начальном положении, x_0 = 0 (см. рис.7.33); x – текущая координата центра тележки; x_1 – координата центра тяжести системы в её произвольном положении: $x_1 = \frac{m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x)}{m_1 + m_2}$.

Уравнение закона сохранения движения центра масс системы: $x_1 = x_0$, или

$$m_1 x - m_2(l\sin\varphi - x) = 0.$$

Отсюда зависимость координаты движения тележки от положения груза 2: $x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\varphi$.

5.2

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси z: $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$.

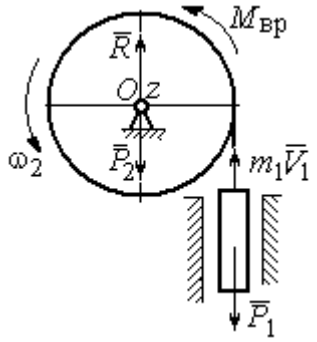


Рис. 7.34. Расчётная схема к упражнению 5.2

Кинетический момент системы:

$$L_z = L_z^{\text{бар}} + L_z^{\text{гр}} = \frac{m_2 r^2}{2}\omega + m_1 V_1 r = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\omega r^2.$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси z: $\sum M_z(\vec{F}_k^e) = M_{\text{вр}} - P_1 r = kt - m_1 g r$.

Дифференциальное уравнение вращения барабана:

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) r^2 \frac{d\omega}{dt} = kt - m_1 g r.$$

При нулевых начальных условиях $\omega = \dfrac{kt^2 - 2m_1 grt}{(2m_1 + m_2)r^2}$.

5.3

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем на конечном перемещении: $T - T_0 = \sum A(F_k)$, $T_0 = 0$.

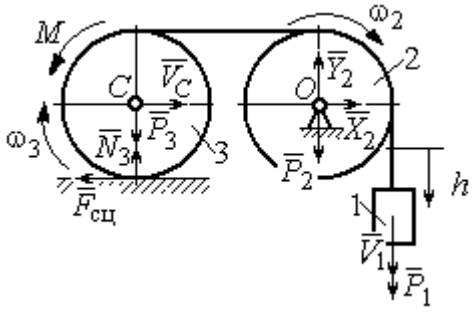


Рис. 7.35. Расчётная схема к упражнению 5.3

Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \dfrac{1}{2} J_O \omega_2^2$, где осевой момент инерции блока: $J_O = \dfrac{m_2 r^2}{2}$, угловая скорость блока $\omega_2 = \dfrac{V_1}{r}$. Кинетическая энергия катка 3: $T_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_C^2 + \dfrac{1}{2} J_C \omega_3^2$, где момент инерции катка относительно оси, проходя-

щей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_3 r^2}{2}$, угловая скорость катка и скорость его центра масс $\omega_3 = \frac{V_1}{2r}$, $V_C = \frac{V_1}{2}$.

Энергия системы: $T = T_1 + T_2 + T_3 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16}$.

Суммарная работа вешних сил на перемещении h: $\sum A(F_k) = P_1 h - M\frac{h}{2r}$.

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3)\frac{V_1^2}{16} = \left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h.$$

Скорость груза на высоте h: $V_1 = 4\sqrt{\frac{\left(m_1 g - \frac{M}{2r}\right)h}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}$.

5.4

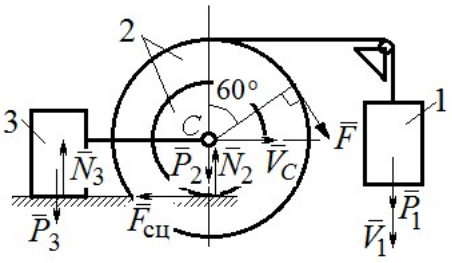


Рис. 7.36. Расчётная схема к упражнению 5.4

Для решения задачи используется теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в её текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Допустим, груз 1 движется вниз со скоростью V_1. Скорость центра масс катка V_C.

Кинетическая энергия катка 2: $T_2 = \frac{1}{2}m_2 V_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega_2^2$. Здесь $m_2 = \frac{2P}{g}$, $J_{zC} = m_2 i_z^2$, $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. В результате кинетическая энергия катка $T_2 = \frac{3P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 3 $V_3 = V_C$. Кинетическая энергия груза 3 $T_3 = \frac{P}{g}V_C^2$.

Скорость груза 1 $V_1 = \omega_2 3r = 3V_C$. Кинетическая энергия груза 1: $T_1 = \dfrac{9P}{2g}V_C^2$.

Суммарная кинетическая энергия (энергия системы): $T = T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{17P}{2g}V_C^2$. Производная $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{17P}{g}V_C\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{17}{g}V_C a_C$.

Мощности сил $\vec{P}_2$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{\text{сц}}$, $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ равны нулю.

Мощность силы $\vec{F}$, приложенной к колесу, определяется по формуле: $N(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{V}_C + \vec{M}_C(\vec{F})\cdot\vec{\omega}_2 = FV_C\cos 60° + FR\omega_2$. Мощность силы $\vec{P}_1$ $N(\vec{P}_1) = P_1V_1$. Суммарная мощность внешних сил: $\sum N(F^e) = 7PV_C$.

Составляем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии системы: $\dfrac{17P}{g}V_C a_C = 7PV_C$, откуда $a_C = \dfrac{7}{17}g$ м/с^2.

5.5

Рассмотрим движение катков отдельно, заменив невесомый стержень реакцией. Предположим, катки движутся направо (см. рис. 7.37). Уравнения движения катков:

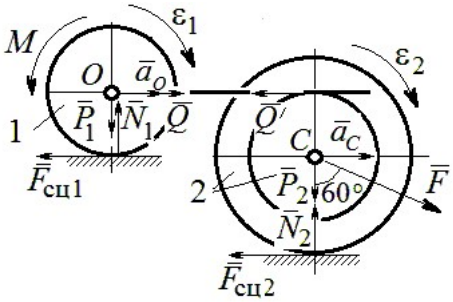


Рис. 7.37. Расчётная схема к упражнению 5.5

$$m_1 a_O = Q - F_{\text{сц1}},\ J_{1O}\varepsilon_1 = F_{\text{сц1}}r - M;$$

$$m_2 a_C = -Q' - F_{\text{сц2}} + F\cos 30°;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = F_{\text{сц2}}3r - Q'r.$$

Здесь $\vec{Q}$ – реакция невесомого стержня, $|\vec{Q}| = |\vec{Q}'|$; $\vec{F}_{\text{сц1}}$, $\vec{F}_{\text{сц2}}$ – силы сцепления катков с поверхностями качения; моменты инерции катков $J_{1O} = \dfrac{m_1 r^2}{2}$, $J_{2C} = m_2 i_2^2$. Подставляя кинематические соотношения $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{3r}$; $a_O = \dfrac{4}{3}a_C$; $\varepsilon_1 = \dfrac{4a_C}{3r}$, с учётом данных задачи, получим систему уравнений:

$$\frac{4P}{3g}a_C = Q - F_{\text{сц}1};\ \ \frac{2P}{3g}a_C = F_{\text{сц}1} - 4P;$$

$$\frac{2P}{g}a_C = -Q - F_{\text{сц}2} + P\sqrt{3};\ \ \frac{4P}{3g}a_C = 3F_{\text{сц}2} - Q.$$

Находим ускорение центра катка 2: $a_C = \dfrac{3\left(3\sqrt{3}-16\right)g}{46} \approx -\ 0{,}7g$. Каток движется в противоположную сторону. Реакция стержня $Q = 2{,}6P$.

5.6

Выделяем звенья механизма, заменяя действия нитей их реакциями. Допустим, направления движений тел в системе соответствуют подъёму груза 1.

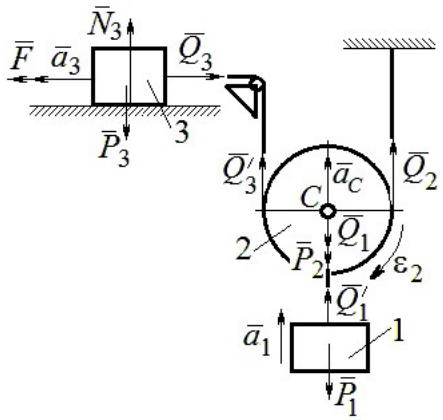


Рис. 7.38. Расчётная схема к упражнению 5.6

Уравнения движения тел:

$$m_3a_3 = F - Q_3,\ m_2a_C = Q_3' + Q_2 - P_2 - Q_1;$$

$$J_{2C}\varepsilon_2 = Q_3'r - Q_2r,\ m_1a_1 = Q_1' - P_1.$$

С учётом, что $\left|\vec{Q}_3\right| = \left|\vec{Q}_3'\right|$, $\left|\vec{Q}_1\right| = \left|\vec{Q}_1'\right|$ и $a_C = a_1$, $a_3 = 2a_1$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$, $J_{2C} = \dfrac{m_2r^2}{2}$, подставляя данные задачи, получим систему уравнений:

$$2ma_1 = 2{,}5mg - Q_3;\ \ ma_1 = Q_3 + Q_2 - mg - Q_1;$$

$$\frac{ma_1}{2} = Q_3 - Q_2;\ m_1a_1 = Q_1 - P_1.$$

Решая систему, находим: $a_1 = \dfrac{2}{17}g \approx 0{,}12g$; $Q_3 = 2{,}26mg$; $Q_2 = 2{,}15mg$.

5.7

Заменяем действия нитей реакциями. Предположим, груз 1 спускается по наклонной плоскости. Уравнения движения тел:

$$m_1a_1 = P_1\cos 30° - Q_1;\ \ m_3a_3 = Q_3;$$

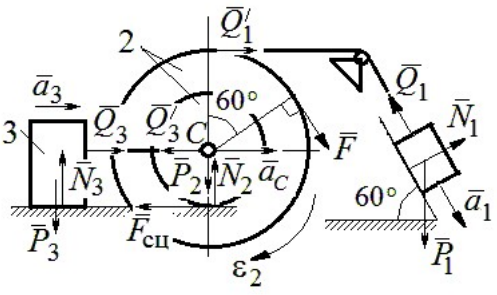


Рис. 7.39. Расчётная схема к упражнению 5.7

$$m_2 a_C = Q_1' - Q_3' - F_{\text{сц}} + F\cos 60^\circ;\ J_{2C}\varepsilon_2 = Q_1' R + FR + F_{\text{сц}} r,\ J_{2C} = m_2 i_2^2.$$

Соотношения ускорений: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R+r}$, $a_C = \dfrac{a_1 r}{R+r}$, $a_3 = a_C$. Подставляя данные задачи, с учётом, что модули сил $Q_1' = Q_1$ и $Q_3' = Q_3$, получим систему уравнений:

$$ma_1 = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - Q_1;\ \frac{2}{3}ma_1 = Q_3;$$

$$ma_1 = Q_1 - Q_3 - F_{\text{сц}} + \frac{1}{2}mg;\ 3ma_1 = 2Q_1 + 2mg + F_{\text{сц}}.$$

Находим $a_1 = \dfrac{3}{46}\left(5+3\sqrt{3}\right)g \approx 0{,}44g;\ Q_1 = 0{,}21mg;\ Q_3 = 0{,}44mg$.

7.6. Ответы к упражнениям главы 6

6.1

Внешние силы, действующие на систему: силы тяжести – $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор $\vec{N}_3$, $\vec{R}_3$ Приложим к телам системы, силы инерции $\vec{R}_1^{\text{ин}}$, $\vec{R}_2^{\text{ин}}$ (рис. 7.40, *a*). В соответствии с принципом Даламбера, полученная система сил находится в равновесии. Составляем условие равновесия системы сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

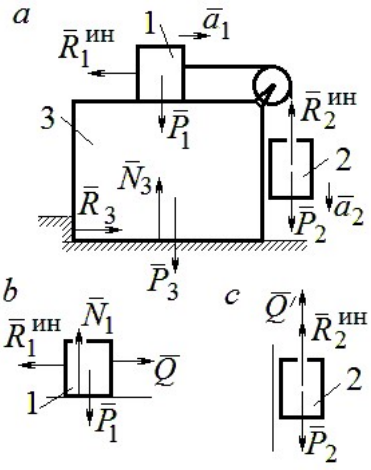


Рис. 7.40. Расчётная схема к упражнению 6.1

$$R_3 - R_1^{\text{ин}} = 0,\ N_3 - P_3 - P_1 - P_2 + R_2^{\text{ин}} = 0.$$

Для вычисления сил инерции рассмотрим отдельно грузы 1 и 2, заменяя действие соединяющей их нити реакцией (рис. 7.40, *b*, *c*). Присоединим к грузам силы инерции и, применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия систем сил - для груза 1 в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 – на вертикальную:

$$Q - R_1^{\text{ин}} = 0;\ P_2 - Q' - R_2^{\text{ин}} = 0,$$

где $R_1^{\text{ин}} = m_1 a_1$, $R_2^{\text{ин}} = m_2 a_2$.

Решая полученную систему с учётом равенства модулей сил $Q = Q'$ и ускорений грузов $a_1 = a_2$, находим ускорение грузов: $a_1 = a_2 = 0{,}5g$. Тогда давление призмы на горизонтальную поверхность: $N_3 = 2{,}5mg$.

6.2

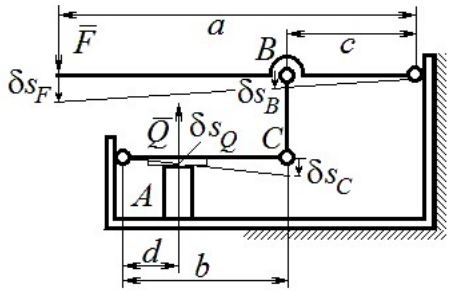


Рис. 7.41. Расчётная схема к упражнению 6.2

Активными силами в системе являются силы $\vec{F}$ и $\vec{Q}$. Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия: $\delta A\left(\vec{F}\right) + \delta A\left(\vec{Q}\right) = 0$ или $F\delta s_F - Q\delta s_Q = 0$, где δs_F и δs_Q – возможные перемещения точек приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{Q}$.

Имеем соотношения: $\dfrac{\delta s_F}{\delta s_B} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{\delta s_C}{\delta s_Q} = \dfrac{b}{d}$, где δs_B и δs_C – возможные перемещения точек B и C, причём $\delta s_B = \delta s_C$. Тогда $\delta s_Q = \dfrac{cd}{ab}\delta s_F$ и сила, сжимающая деталь A под прессом, равна $Q = \dfrac{ab}{cd}F$.

6.3

Активными силами, совершающими работу при движении системы, являются силы тяжести $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ и пары сил с моментами M_1 и M_2. Связи идеальные.

Для равновесия системы необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\delta A\left(\vec{P}_3\right) + \delta A\left(\vec{P}_4\right) + \delta A(M_1) + \delta A(M_2) = 0 \text{ или}$$

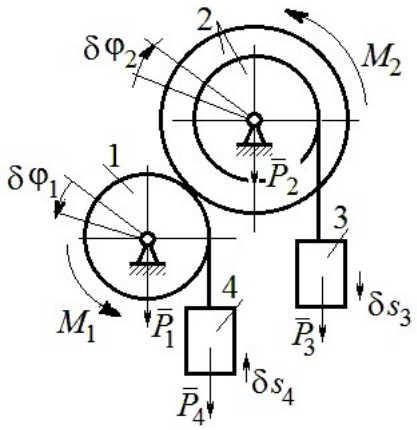


Рис. 7.42. Расчётная схема к упражнению 6.3

$$P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4 + M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0,$$

где $\delta s_3, \delta s_4$ – элементарные перемещения грузов 3, 4; $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ – элементарные повороты валов 1 и 2. Выразим все перемещения через угол поворота вала 2: $\delta s_3 = \delta\varphi_2 r$, $\delta\varphi_1 = 3\delta\varphi_2$, $\delta s_4 = 3r\delta\varphi_2$ и подставим в уравнение равновесия. Получим: $M_2 = 4Pr$.

6.4

Система с идеальными связями. Активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и пара сил с моментом $M_{\text{вр}}$ (рис. 7.43).

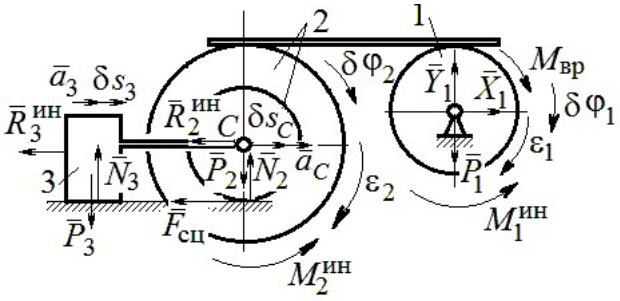


Рис. 7.43. Расчётная схема к упражнению 6.4

Направления поворотов дисков и их угловые ускорения показаны на рис. 7.43 дуговыми стрелками $\delta\varphi_1, \varepsilon_1$ и $\delta\varphi_2, \varepsilon_2$. Направления движения центра масс катка 2, груза 3 и их ускорения обозначены: $\delta s_C, a_C$ и $\delta s_3, a_3$.

Кинематические соотношения между перемещениями и ускорениями:

$$\delta s_C = \delta s_3,\ a_C = a_3,\ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_3}{r},\ \varepsilon_2 = \frac{a_3}{r},\ \delta\varphi_1 = \frac{3\delta s_3}{r},\ \varepsilon_1 = \frac{3a_3}{r}.$$

Присоединим к телам системы силы инерции.

Модули главных векторов сил инерции: $R_3^{\text{ин}} = m_3 a_3 = ma_3$;

$$R_2^{\text{ин}} = m_2 a_C = 2ma_3;\ M_2^{\text{ин}} = m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = 4{,}5mra_3;\ M_1^{\text{ин}} = \frac{m_1 R_1^2}{2}\varepsilon_1 = 1{,}5mra_3.$$

Элементарные работы активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = M_{\text{вр}}\delta\varphi_1 = (mg\sin\omega t)3\delta s_3.$$

Элементарные работы сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_2^{\text{ин}}\delta s_C - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2 - M_1^{\text{ин}}\delta\varphi_1 =$$

$$= -ma_3\delta s_3 - 2ma_3\delta s_3 - 4{,}5ma_3\delta s_3 - 1{,}5ma_3 3\delta s_3 = -12ma_3\delta s_3.$$

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = m(3g\sin\omega t - 12a_3)\delta s_3 = 0.$$

Ускорение груза 3: $a_3 = 0{,}25g\sin\omega t$, или $\ddot{s}_3 = 0{,}25g\sin\omega t$. Интегрируя дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза: $s_3 = \dfrac{0{,}25g}{\omega}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$.

6.5

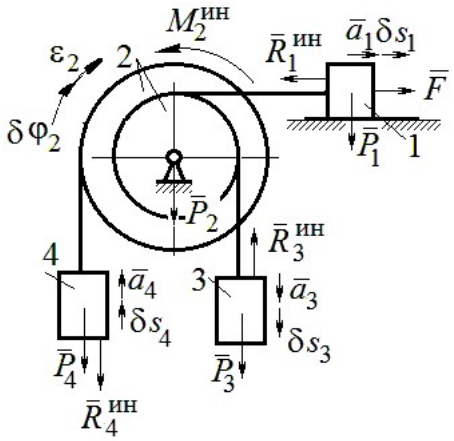


Рис. 7.44. Расчётная схема к упражнению 6.5

Система с идеальными связями. Активные силы и главные вектора сил инерции показаны на рис. 7.44.

Элементарные работы активных сил: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = F\delta s_1 + P_3\delta s_3 - P_4\delta s_4$ и сил инерции $\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = -R_1^{\text{ин}}\delta s_1 - R_3^{\text{ин}}\delta s_3 - R_4^{\text{ин}}\delta s_4 - M_2^{\text{ин}}\delta\varphi_2$, где модули сил инерции: $R_1^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_1$, $R_3^{\text{ин}} = \dfrac{P_3}{g}a_3$, $R_4^{\text{ин}} = \dfrac{P_1}{g}a_4$, $M_2^{\text{ин}} = \dfrac{P_2}{g}i_2^2\varepsilon_2$.

Кинематические соотношения: $\delta s_3 = \delta s_1$, $a_3 = a_1$, $\delta s_4 = 2\delta s_1$, $a_4 = 2a_1$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta s_1}{r}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}$. Общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{ин}}) = P(t+1)\delta s_1 + P\delta s_1 - 2P\delta s_1 -$$

$$-\left(\frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{P}{g}a_1\delta s_1 + \frac{2P}{g}2a_1 2\delta s_1 + \frac{2P}{g}2r^2\frac{a_1}{r}\frac{\delta s_1}{r}\right) = P\left(t - \frac{14a_1}{g}\right)\delta s_1 = 0.$$

Находим уравнение движения груза 3: $a_3 = a_1 = \dfrac{1}{14}gt$, или $\ddot{x}_3 = \dfrac{1}{14}gt$.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями, получим закон движения груза 3: $x_3 = \dfrac{1}{84}gt^3 \approx 0{,}012gt^3$.

6.6

Рассматриваемая механическая система (рис. 7.45) имеет одну степень свободы. Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$, где T – кинетическая энергия системы: Q_x – обобщенная сила.

В качестве обобщённой координаты x выберем положение точки C относительно недеформированной пружины, отмеченной на рис. 7.45 величиной l_0. Обобщённая скорость $\dot{x}$.

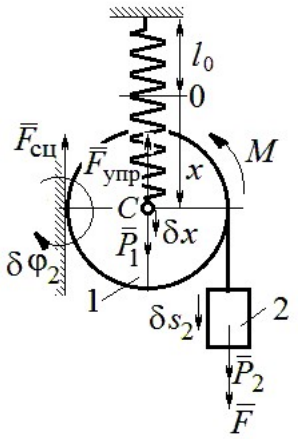


Рис. 7.45. Расчётная схема к упражнению 6.6

Кинетическая энергия катка: $T_1=\frac{1}{2}m_1V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_1^2$, где ω_1, V_C – угловая скорость катка и скорость его центра масс, $V_C=\dot{x}$, $\omega_1=\frac{V_C}{r}=\frac{\dot{x}}{r}$; момент инерции $J_{zC}=\frac{1}{2}m_1r^2$. Кинетическая энергия груза 2: $T_2=\frac{1}{2}m_2V_2^2$, где V_2 – скорость груза 2, $V_2=2V_C=2\dot{x}$. Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую скорость: $T=T_1+T_2=\frac{7P}{2g}\dot{x}^2$.

В произвольном положении системы, определяемом координатой x, дадим центру масс катка возможное перемещение δx (см. рис. 7.45). Элементарная работа активных сил $\sum\delta A(F_{\text{к}})=P_1\delta x-F_{\text{упр}}\delta x+(P_2+F)\delta s_2-M\delta\varphi_1$. Полагая перемещения $\delta s_2=2\delta x$, $\delta\varphi_1=\frac{\delta x}{r}$, модуль силы упругости $F_{\text{упр}}=cx$ и с учётом данных задачи, получим $\sum\delta A(F_{\text{к}})=(3P-cx)\delta x$. Обобщённая сила $Q_x=3P-cx$.

Уравнение Лагранжа $\frac{7P}{g}\ddot{x}=3P-cx$, или $\ddot{x}+\frac{4g}{7r}x=\frac{3g}{7}$.

Решение уравнения (с нулевыми начальными условиями): $x = \frac{3}{4} r\left(1 - \cos\omega t\right)$. Закон движения груза: $s_2 = 2x = \frac{3}{2} r\left(1 - \cos\omega t\right)$.

6.7

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обобщённые координаты – расстояния x_1, x_2 соответственно до грузов 1 и 2, отсчитываемые от неподвижных центров блоков *B* и *D* (рис. 7.46, *a*). Обобщённые скорости $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Кинетическая энергия грузов и блока 3:

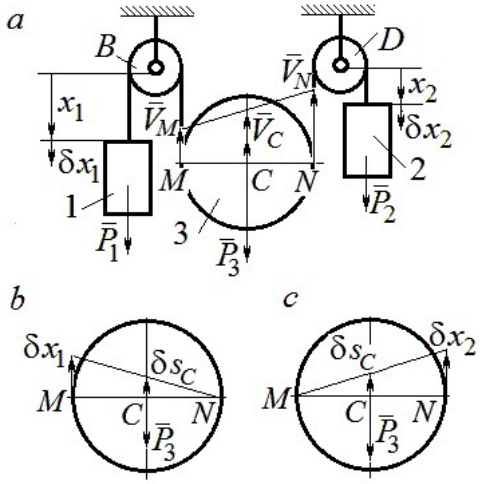


Рис. 7.46. Расчётная схема к упражнению 6.7: *a* – кинематика механизма; *b*, *c* – возможные перемещения блока 3 при вычислении обобщённых сил

$$T_1 = \frac{P_1 \dot{x}_1^2}{2g},\ T_2 = \frac{P_2 \dot{x}_2^2}{2g};$$

$$T_3 = \frac{P_3}{2g}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3 r^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}\right)^2.$$

Здесь учтено (см. рис. 7.46, *a*): что

$$V_C = \frac{V_N + V_M}{2} = \frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}{2};$$

$$\omega_2 = \frac{V_N - V_M}{2r} = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2r}.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1, оставляя координату x_2 постоянной: $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$. На этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *b*):

$$\sum \delta A(F_к) = P_1 \delta x_1 - P_3 \delta s_C = \left(P_1 - \frac{1}{2} P_3\right)\delta x_1.$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = P_1 - \frac{1}{2} P_3$.

Дадим системе другое независимое возможное перемещение – по координате x_2, так, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. При этом перемещении сумма элементарных работ внешних сил (см. рис. 7.46, *a*, *c*):

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = P_2 \delta x_2 - P_3 \delta s_C = \left(P_2 - \frac{1}{2} P_3 \right) \delta x_2 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_2} = P_2 - \frac{1}{2} P_3$.

Уравнения Лагранжа

$$\left(P_1 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_1}{g} + \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_1 - \frac{1}{2} P_3 , \quad \frac{1}{8} P_3 \frac{\ddot{x}_1}{g} + \left(P_2 + \frac{3}{8} P_3 \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} = P_2 - \frac{1}{2} P_3 \text{ или}$$

$$7\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 , \; \ddot{x}_1 + 9\ddot{x}_2 = 2g .$$

Ускорения грузов: $\ddot{x}_1 = -\frac{1}{31} g$, $\ddot{x}_2 = \frac{7}{31} g$. Ускорение центра масс блока $\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = \frac{6}{31} g$. Груз 1 и центр блока 3 движутся вверх, груз 2 – вниз. (Сравнить с задачей 70.)

6.8

Система с двумя степенями свободы. Обобщённые координаты: x_1 – положение центра масс катка 1 (точки C_1) относительно неподвижной вертикальной стены; x_2 – положение центра масс катка 2 (точки C_2) относительно подвижного края платформы.

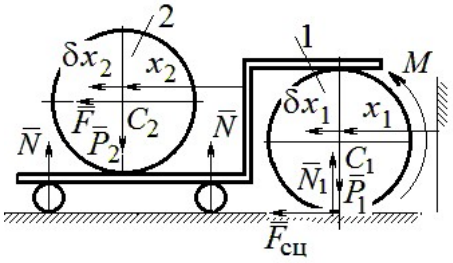


Рис. 7.47. Расчётная схема к упражнению 6.8

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left[m_2 \left(\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1 \right)^2 + \frac{m_2 r^2}{2} \left(\frac{\dot{x}_2}{r} \right)^2 \right] = \frac{P}{g} \left(\frac{11}{4} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \right).$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_1 $\left(\delta x_1 \neq 0 \right)$, оставляя другую координату x_2 неизменной $\left(\delta x_2 = 0 \right)$. Работу совершают момент M и сила $\overline{F}$. Суммарная работа

$$\sum \delta A(F_{\text{к}}) = M \delta \varphi_1 + F \delta s_{C_2} = M \frac{\delta x_1}{r} + F 2 \delta x_1 = 4P \delta x_1 .$$

Обобщённая сила $Q_{x_1} = 4P$.

При другом независимом возможном перемещении $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ суммарная работа внешних сил $\sum \delta A(F_к) = F\delta x_2$ и обобщённая сила, соответствующая координате x_2, равна $Q_{x_2} = P$.

Уравнения Лагранжа

$$\frac{P}{g}\left(\frac{11}{2}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2\right) = 4P,\ \frac{P}{g}\left(2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1\right) = P, \text{ или}$$

$$11\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = 8g,\ 2\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_1 = g$$

Ускорение центра катка 1 $\ddot{x}_1 = \frac{6}{7}g$. Тележка катится в направлении оси x_1. Ускорение центра катка 2 относительно тележки $\ddot{x}_2 = -\frac{5}{14}g$. Закон относительного движения центра катка 2 при нулевых начальных условиях: $x_2 = -\frac{5}{28}gt^2$. Каток катится к правому борту тележки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: В 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев*, *С. А*. Лекции по теоретической механике. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Валерий Григорьевич Брагин
Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Компьютерная версия

Подписано в печать 26.10.2018 г.
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 15,625. Уч. изд. л. 10,5. Тираж экз. Заказ №
Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный
горный университет»

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Екатеринбург
2017

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО
«Уральский государственный горный университет»

ОДОБРЕНО
Методической комиссией
горно-механического факультета
«15» декабря 2017 г.
Председатель комиссии
проф. В. П. Барановский

Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Издание УГГУ Екатеринбург, 2017

В 67

Рецензент: *Н. М. Суслов*, д-р техн. наук, заведующий кафедрой ГМК
Уральского государственного горного университета

Учебно-методическое пособие рассмотрено на заседании кафедры технической механики от 19.12.2016 г. (протокол № 2) и рекомендовано для издания в УГГУ.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета.

Волков Е. Б., Казаков Ю. М.

В67 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. / Е. Б. Волков, Ю. М. Казаков, Уральский государственный горный университет. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2017. 156 с.

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов содержит краткие методические указания, контрольные задания и примеры выполнения заданий по темам: «Статика твердого тела. Равновесие произвольной плоской и пространственной систем сил», «Кинематика вращательного и плоскопараллельного движений твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела», «Сложное движение точки», «Динамика точки. Дифференциальные уравнения движения точки. Гармонические и вынужденные колебания точки. Применение теоремы об изменении кинетической энергии при исследовании движения точки», «Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы», «Принципы механики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы», «Уравнения Лагранжа II рода».

Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей очной формы обучения.

© Волков Е. Б., Казаков Ю. М., 2017
©Уральский государственный горный университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 4
1.1. Основные виды связей и их реакции 4
1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары 5
1.3. Условия равновесия систем сил 7
1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел 8
1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил 17
2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА 26
2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки 26
2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси 28
2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела 29
2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях 32
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 38
2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении 46
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ 57
3.1. Основные понятия сложного движения точки 57
3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении 60
4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки ... 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы. 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155

1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика представляет раздел теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием системы сил.

1.1. Основные виды связей и их реакции

Опора тела на гладкую плоскость (поверхность) без трения. Реакция приложена в точке касания и направлена перпендикулярно к общей касательной соприкасающихся поверхностей. При опоре углом, или на угол (рис. 1.1, *a*), реакция направлена по нормали к одной из поверхностей. **Гибкая связь**. Если на тело наложена связь в виде гибкой нерастяжимой нити (каната, троса), то реакция связи $\vec{T}$, равная натяжению нити, приложена к телу и направлена вдоль нити (рис. 1.1, *b*).

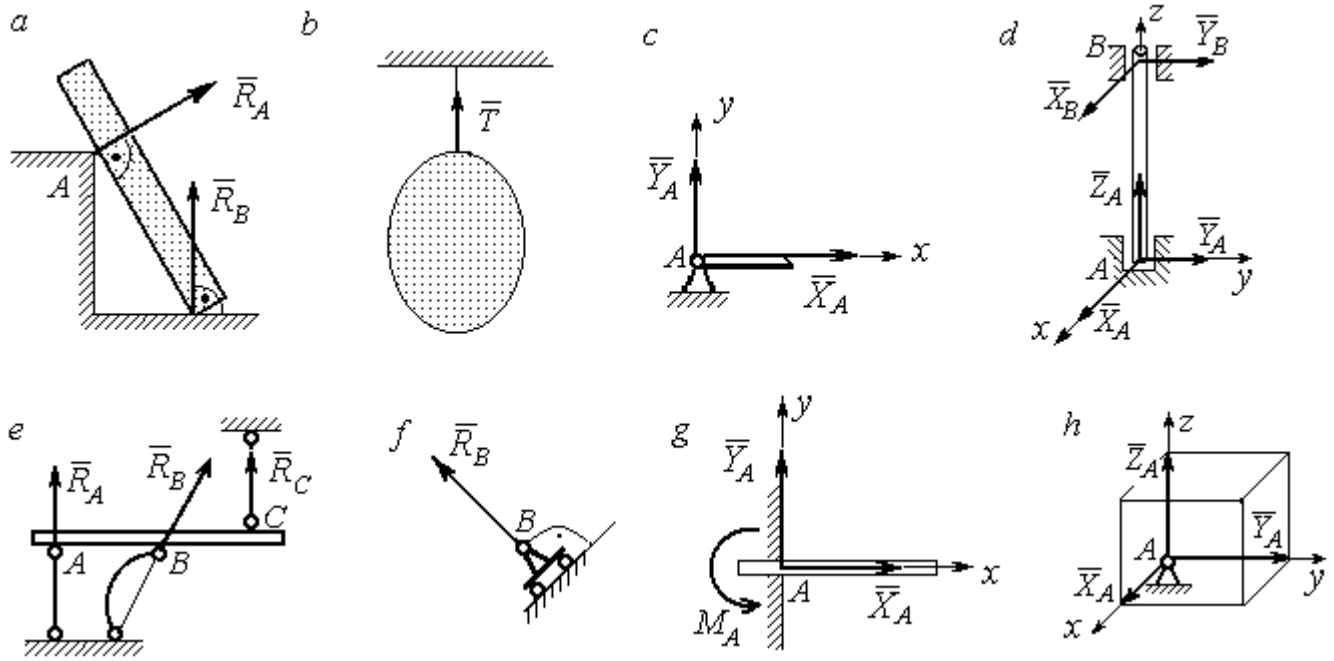


Рис. 1.1. Виды связей и их реакции:
a – реакция опоры тела на гладкую поверхность без трения; *b* – реакция связи гибкой нерастяжимой нити; *c* – реакция цилиндрического шарнира; *d* – реакция подшипника и подпятника; *e* – реакция невесомого стержня; *f* – реакция подвижной опоры; *g* – реакция жесткой заделки; *h* – реакция пространственного шарнира

Цилиндрический шарнир (подшипник) создает соединение, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому. Реакция цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При решении задач реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей (рис. 1.1, *c*). Реакция подшипника $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *d*) также изображается своими составляющими $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, взятыми по направлениям координатных осей в плоскости, перпендикулярной оси вращения подшипника. Величина реакции определяется по формуле: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. **Реакция прямолинейного невесомого стержня с шарнирными соединениями на краях** направлена вдоль самого стержня, а криволинейного – вдоль линии, соединяющей точки крепления стержня (рис. 1.1, *e*). **Реакция подвижной опоры** $\vec{R}_B$ (рис. 1.1, *f*) направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры. **Жесткая заделка** (рис. 1.1, *g*) препятствует не только линейным перемещениям тела, но и повороту. Реакция заделки состоит из силы реакции $\vec{R}_A$ и пары сил с моментом M_A. При решении задач силу реакции жесткой заделки $\vec{R}_A$ изображают ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, взятыми по направлениям координатных осей. Модуль реакции определяется по формуле $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. Виды связей и их реакции показаны на рис. 1.1.

1.2. Моменты силы относительно центра и относительно оси. Пара сил. Момент пары

Алгебраическим моментом силы *F* относительно центра *O* $M_O(\vec{F})$, или просто **моментом силы** $\vec{F}$ относительно центра *O*, называют взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние *h* от центра *O* до линии действия силы: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$ (рис. 1.2, *a*).

Величину h называют **плечом силы**. Момент силы относительно центра считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

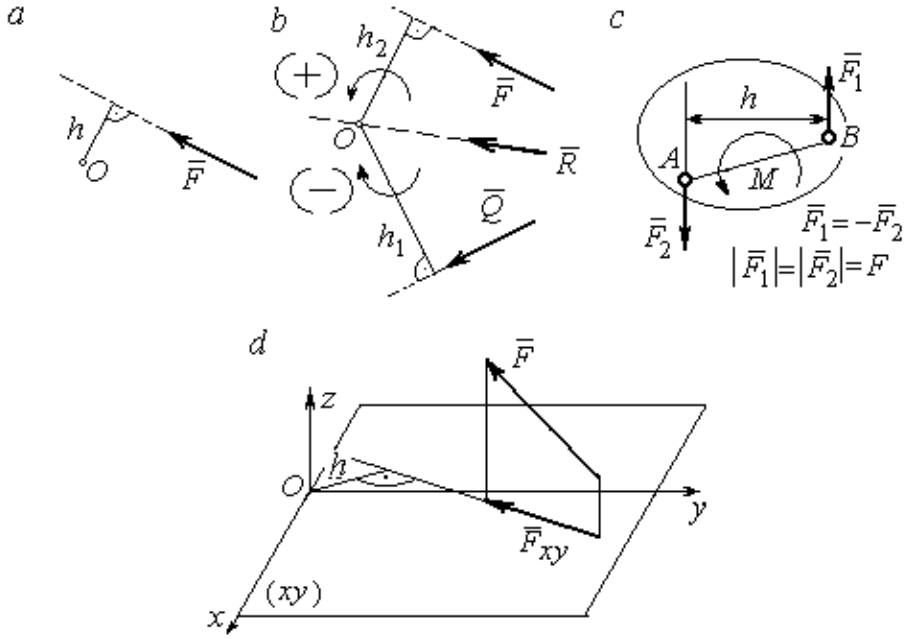


Рис. 1.2. Схемы для вычисления моментов сил:
a, *b* – момент силы относительно центра; *c* – момент пары сил;
d – момент силы относительно оси

На рис. 1.2, *b* показано, что момент силы $\vec{F}$ относительно центра O положительный, а момент силы $\vec{Q}$ относительно того же центра – отрицательный. Момент силы $\vec{R}$ относительно центра O равен нулю, так как линия действия этой силы проходит через центр O и плечо силы равно нулю.

Парой сил, или просто парой (рис.1.2, *c*), называют систему двух равных по модулю сил, параллельных, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой. Алгебраическим моментом пары сил, или **моментом пары,** называют взятое со знаком плюс или минус произведение модуля одной из сил пары на плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия ее сил. Правило знаков такое же, как и для момента силы. На рисунках пару часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление поворота твердого тела под действием пары (см. M на рис. 1.2, *c*).

Моментом силы относительно оси называют момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. На рис. 1.2, *d* показано вычисление момента силы F относительно оси *z*: $M_z(\vec{F}) = F_{xy}h$, где F_{xy} – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость *xy*, перпендикулярную оси *z*, *h* – плечо проекции F_{xy} относительно центра *O* – точки пересечения оси *z* и плоскости *xOy*.

1.3. Условия равновесия систем сил

Плоской системой сил называется система сил, расположенных в одной плоскости.

Основная форма условий равновесия плоской системы сил. Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух осей прямоугольной системы координат, расположенной в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов сил относительно любого центра, находящегося в плоскости действия сил, также была равна нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky} – проекции всех сил на координатные оси; $M_A(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно произвольно выбранного центра A.

Пространственной системой сил называется система сил, расположенных произвольно в пространстве.

Для **равновесия пространственной системы сил** необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси прямоугольной системы координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно тех же осей также были равны нулю:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0,$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции всех сил на координатные оси x, y, z; $M_x(\vec{F}_k)$, $M_y(\vec{F}_k)$, $M_z(\vec{F}_k)$ – моменты всех сил относительно выбранных осей.

Равновесие систем тел

Связи, соединяющие части конструкции, называют **внутренними,** в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с внешними телами, не входящими в данную конструкцию. Одним из способов решения задач на равновесие сил, действующих на сочленённую конструкцию с внутренними связями, является **разбиение конструкции на отдельные тела** и составление уравнений равновесия для каждого из тел, входящих в конструкцию. При этом в уравнения равновесия должны входить только силы, непосредственно приложенные к тому телу, равновесие которого рассматривается.

1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел

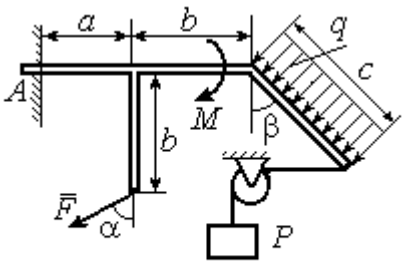
Каждый вариант задания включает две задачи по темам: «Равновесие произвольной плоской системы сил» и «Равновесие системы тел».

В задачах требуется определить реакции связей конструкции исходя из условия равновесия произвольной плоской системы сил. Весом стержневых подпорок, поддерживающих балочные конструкции, и блоков, через которые перекинуты невесомые нити, пренебречь.

Варианты заданий даны на рис. 1.3 – 1.6. Исходные данные приведены в табл. 1.1. Из таблицы исходных данных выбираются значения тех параметров, которые указаны на схемах.

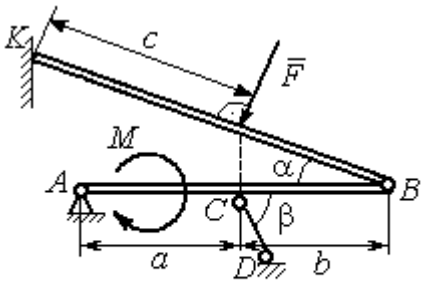
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

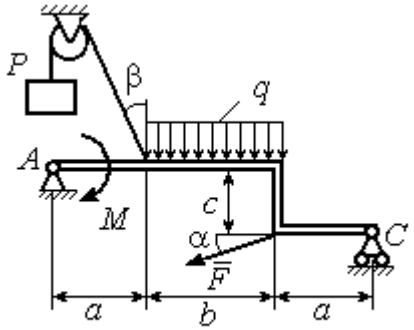
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

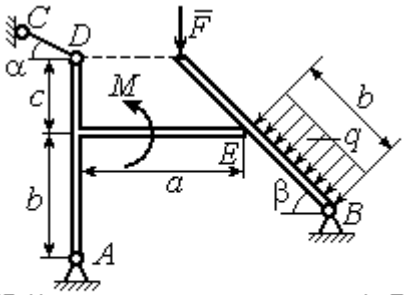
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

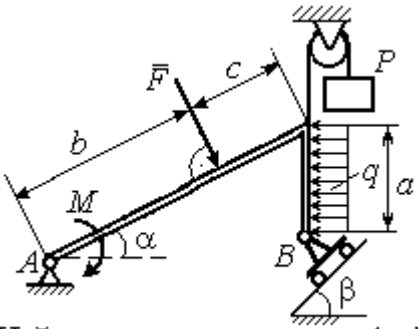
Задача 2



Найти реакции шарниров A, B, реакцию опоры в точке E и реакцию стержня CD

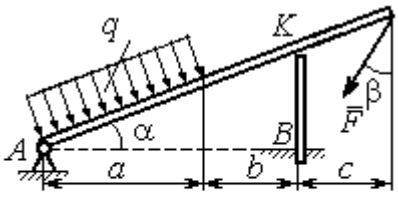
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Найти реакцию шарниров A и B

Задача 2

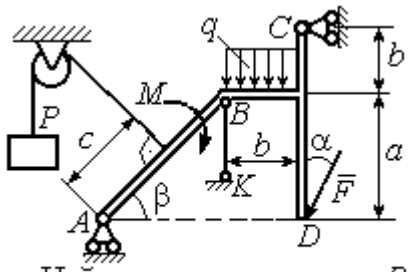


Найти реакцию шарнира A, реакцию опоры в точке K и реакцию жесткой заделки в точке B

Рис. 1.3. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

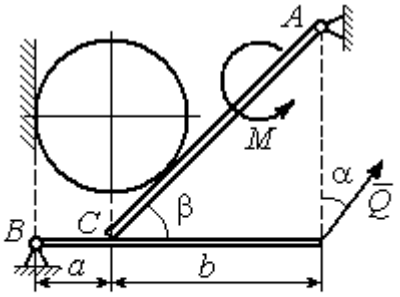
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



Найти усилие в стержне BK и реакцию шарниров A, C

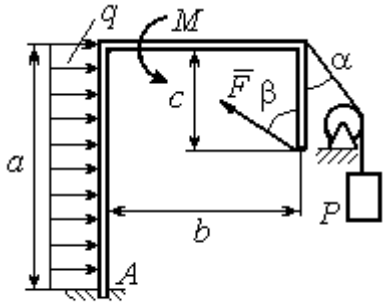
Задача 2



Вес шара P. Найти реакцию шарниров A, B, давление шара на балку и стенку, реакцию опоры балки в точке C и уравновешивающую силу Q

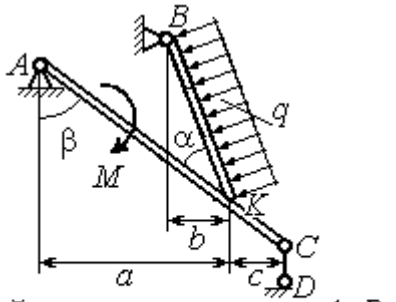
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

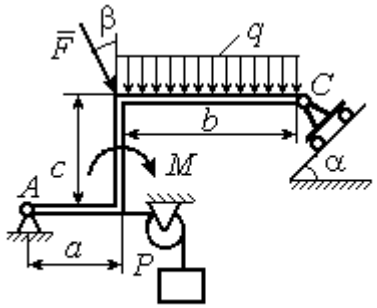
Задача 2



Найти реакцию шарнирв A, B, реакцию стержня CD и реакцию опоры в точке K

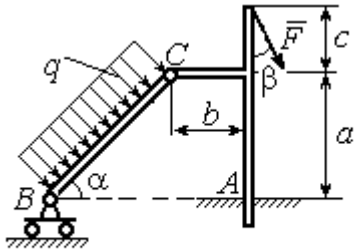
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Найти реакции шарниров A и C

Задача 2

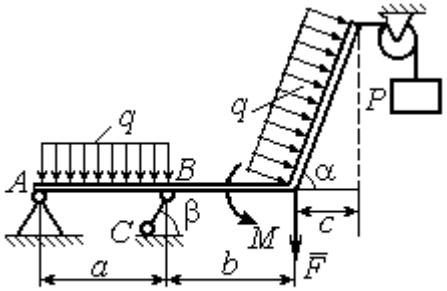


Найти реакцию жесткой заделки в точке A и реакции шарниров B и C

Рис. 1.4. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 –26

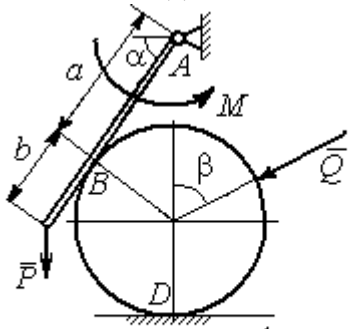
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

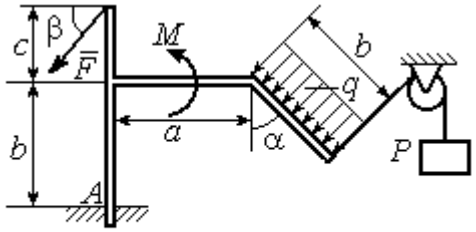
Задача 2



Найти реакцию шарнира A, давление балки на шар, реакцию опоры шара в точке D и уравновешивающую силу Q

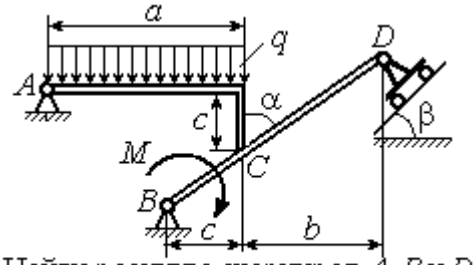
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

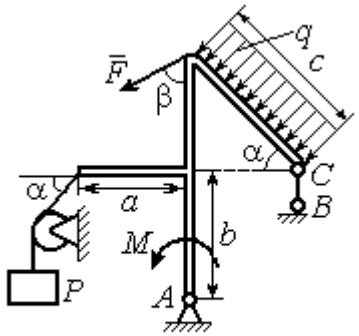
Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B и D и реакцию опоры в точке C

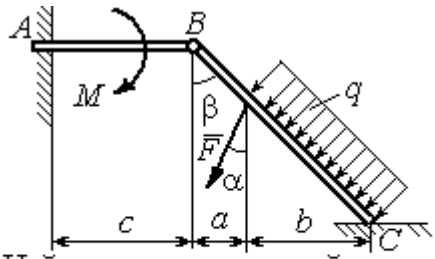
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Найти реакцию стержня BC и реакцию шарнира A

Задача 2



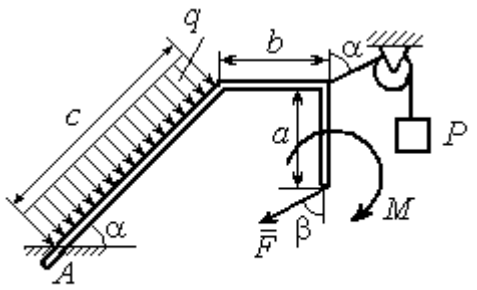
Найти реакцию жесткой заделки в точке A, реакцию шарнира B и реакцию опоры в точке C

Рис. 1.5. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Окончание вариантов задания С1

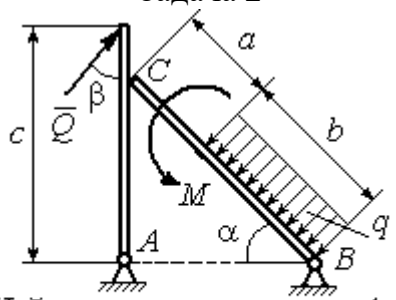
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Найти реакцию жесткой заделки в точке A

Задача 2



Найти реакцию шарниров A, B, реакцию опоры в точке C и уравновешивающую силу Q

Рис. 1.6. Задание С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел. Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 1.1

Исходные данные задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P, кН	6	5	6	12	6	6	10	3	8	5	10	4	8	10	8
F, кН	12	6	10	5	12	8	6	5	6	2	12	8	12	6	10
q, кН/м	5	4	2	3	6	3	5	2	2	4	6	2	3	4	5
M, кН·м	12	8	6	8	12	5	12	8	4	6	8	12	10	6	10
α, град	45	60	30	60	30	30	45	60	30	30	45	30	60	45	60
β, град	60	30	45	30	60	90	60	60	30	45	30	45	30	60	30
a, м	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	2	3	2	3	4
b, м	3	3	4	3	2	4	3	3	2	3	3	3	4	3	2
c, м	4	2	2	2	3	2	2	1	5	4	4	2	1	2	2

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	8	10	6	4	6	12	10	5	6	8	6	8	4	6
F, кН	6	12	12	8	3	14	10	8	15	10	12	8	10	10	2
q, кН/м	5	3	4	3	2	3	2	5	4	2	3	4	5	2	4
M, кН·м	10	6	8	6	5	12	4	6	8	10	12	10	6	4	8
α, град	60	60	30	45	60	30	60	45	30	60	45	30	30	30	45
β, град	45	30	30	60	60	45	30	60	30	45	90	30	60	45	30
a, м	3	4	3	1	2	2	4	1	4	3	4	3	2	1	2
b, м	2	4	3	3	4	1	4	3	2	2	2	2	2	2	2
c, м	3	2	2	4	5	4	2	2	1	1	1	2	1	3	5

Пример выполнения задания С1. Равновесие произвольной плоской системы сил. Равновесие системы тел.

Задача 1**.** Рама *ACE* (рис. 1.7) в точке *A* закреплена на цилиндрической шарнирной опоре, а в точке *B* поддерживается вертикальным невесомым стержнем *BK*. На раму действуют: пара с моментом $M = 8$ Нм, сила $F = 10$ Н, приложенная в точке *D* под углом 60° к раме, и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ Н/м, приложенная на отрезке *AB*. В точке *E* под прямым углом к участку балки *CE* прикреплен трос, несущий груз $P = 20$ Н. Пренебрегая весом балки, определить реакцию шарнира *A* и реакцию стержневой опоры *BK*, если $a = 2$ м.

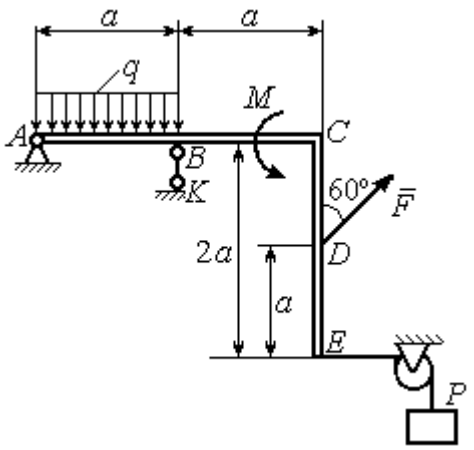


Рис. 1.7. Конструкция рамы

Решение

Выбираем систему координат *xAy*, например, как показано на рис. 1.8. Заменяем действие связей их реакциями. Изображаем реакцию шарнира *A* двумя ее составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленными вдоль горизонтальной и вертикальной осей (см. рис. 1.8). Реакция $\vec{R}_B$ невесомой стержневой опоры *BK* приложена в точке *B* и направлена вдоль стержня *BK*. Заменяем распределенную нагрузку её равнодействующей $\vec{Q}$. Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка *AB* и по модулю равна $Q = qa = 4$ Н. Действие груза *P* на раму изображается реакцией $\vec{T}$, равной по величине весу груза.

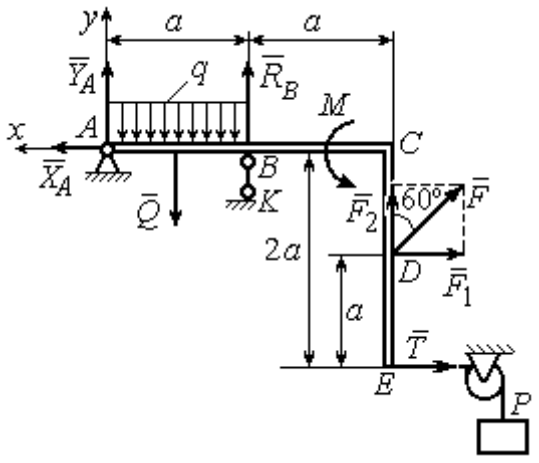


Рис. 1.8. Силы и реакции связей, действующие на раму при её равновесии

При равновесии рамы действующие на неё силы составляют уравновешенную произвольную плоскую систему. Условия равновесия системы сил имеют вид: $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\vec{F}_k) = 0$. Вычисляя проекции сил на оси *x*, *y*, и моменты сил относительно центра *A*, уравнения равновесия получим в виде:

$$\sum F_{kx} = X_A - F\cos 30^\circ - T = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A - Q + R_B + F\cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Q\frac{a}{2} + R_B a + M + F\cos 60^\circ \cdot 2a + F\cos 30^\circ \cdot a + T2a = 0.$$

Здесь для вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно центра *A* использована теорема Вариньона: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a$, где $F_1 = F\cos 30^\circ$, $F_2 = F\cos 60^\circ$ (см. рис. 1.8).

Подставляя в уравнения равновесия исходные данные задачи, получим систему уравнений относительно неизвестных X_A, Y_A, R_B:

$$X_A - 28{,}66 = 0, \quad Y_A + R_B + 1 = 0, \quad R_B \cdot 2 + 121{,}32 = 0.$$

Решая систему, найдем X_A = 28,66 Н, Y_A = 59,66 Н, R_B = – 60,66 Н.

Отрицательное значение величины R_B означает, что фактическое направление реакции R_B стержневой опоры *BK* противоположно направлению, показанному на рис. 1.8. Численное значение реакции шарнира

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{28{,}66^2 + 59{,}66^2} = 66{,}18 \text{ Н}.$$

Задача 2. Балка *ABLC* с вертикальной частью *AB* и горизонтальной перекладиной *LC* закреплена в точке *A* с помощью жесткой заделки (рис. 1.9). Наклонная балка *EC* с углом наклона к горизонту 60° в точке *C* шарнирно прикреплена к горизонтальной перекладине *CL*, а в точке *E* закреплена на шарнирно-подвижной опоре, установленной на горизонтальной поверхности. На конструкцию действуют равномерно распределенная на отрезках *BL* и *DE* нагрузка с одинаковой интенсивностью $q = 2$ кН/м, сила $\vec{F}$, приложенная в точке *D* перпендикулярно балке *EC* и равная по величине $F = 10$ кН, и пара сил

с моментом M = 5 кН·м. Определить реакцию жесткой заделки A и реакции шарниров C и E, если a = 2 м.

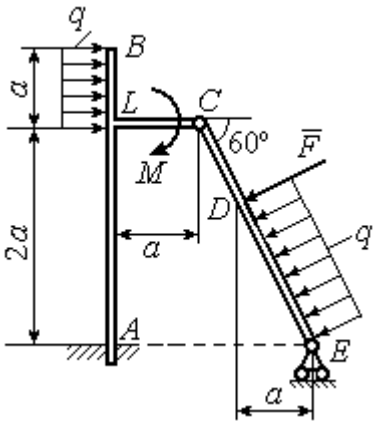


Рис. 1.9. Равновесие конструкции двух балок, соединённых шарниром

Решение

Разделяем систему на две части по шарниру C и рассмотрим равновесие балок $ABLC$ и EC отдельно. Изобразим обе балки и расставим внешние силы и реакции связей (рис. 1.10). Рассмотрим балку $ABLC$ (рис. 1.10, *a*). Заменим распределенную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_1$, приложенной в середине отрезка BL, направленной в сторону действия нагрузки и равной $Q_1 = q \cdot a =$ 4 кН. Кроме силы $\vec{Q}_1$ и пары сил с моментом M на балку действуют реакция жёсткой заделки в точке A, имеющая своими составляющими силы $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и пару сил с моментом M_A, а также реакция шарнира C, разложенная на составляющие $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ (см. рис. 1.10, *a*). Действующие на раму силы составляют уравновешенную плоскую систему сил. Выберем систему координат xAy, как показано на рис. 1.10, *a*, и составим уравнения равновесия:

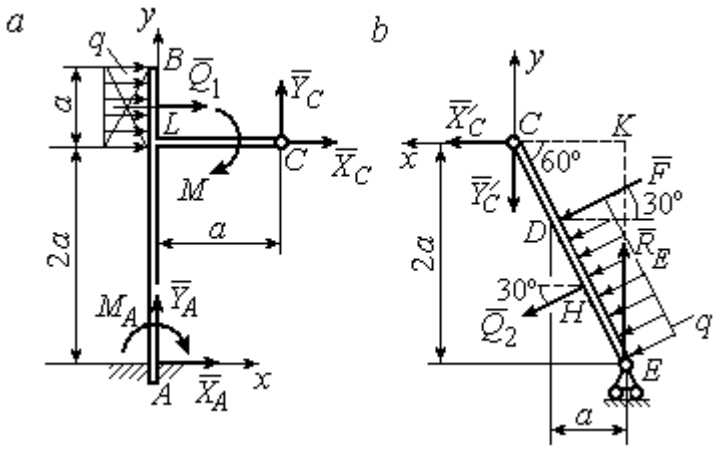


Рис. 1.10. Равновесие частей конструкции:
a - силы и реакции связей, действующие на балку $ABLC$;
b - силы и реакции связей, действующие на балку CE

$$\sum F_{kx} = X_A + Q_1 + X_C = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -M_A - Q_1 \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - M + Y_C a - X_C 2a = 0.$$

Рассмотрим равновесие балки *EC*. Заменим равномерную нагрузку эквивалентной силой $\vec{Q}_2$, приложенной в середине отрезка *ED*, направленной в сторону действия нагрузки и равной по модулю $Q_2 = q \cdot 2a = 8$ кН. На балку кроме сил $\vec{Q}_2$, $\vec{F}$ действуют реакции связей: $\vec{R}_E$ – реакция шарнирно-подвижной опоры в точке *E* и $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ – составляющие реакции шарнира *C*. Силы $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ направлены противоположно силам $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и равны им по модулю $X_C = X'_C$, $Y_C = Y'_C$ (см. рис. 1.10, *a*, *b*). Действующие на балку *EC* силы образуют плоскую уравновешенную систему сил. Выберем систему координат *xCy,* как показано на рис. 1.10, *b,* и составим уравнения равновесия. При этом центром, относительно которого будем считать моменты сил, выберем точку *C*. Получим:

$$\sum F_{kx} = Q_2 \sin 60^\circ + F\cos 30^\circ + \vec{X}'_C = 0,\ \sum F_{ky} = R_E - Q_2 \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ - Y'_C = 0,$$

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = -F \cdot CD - Q_2 \cdot CH + R_E \cdot CK = 0.$$

Здесь плечи сил: $CD = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - 2a$, $CH = \dfrac{2a}{\cos 30^\circ} - a$, $CK = 2a\,\mathrm{tg}30^\circ$. Заменяя в уравнениях величины X'_C на X_C, а Y'_C на Y_C и подставляя исходные данные, получим систему уравнений:

$$X_A + X_C + 4 = 0,\ Y_A + Y_C = 0,\ -M_A - 4X_C + 2Y_C - 25 = 0,$$

$$X_C + 15{,}59 = 0,\ -Y_C + R_E - 9 = 0,\ 2{,}31R_E - 27{,}14 = 0,$$

откуда найдём величины реакции жесткой заделки и реакции шарниров:

$$X_A = 11{,}59 \text{ кН},\ Y_A = -2{,}76 \text{ кН},\ M_A = 42{,}87 \text{ кН·м},$$

$$X_C = -15{,}59 \text{ кН},\ Y_C = 2{,}76 \text{ кН},\ R_E = 11{,}76 \text{ кН}.$$

Модули реакций жесткой заделки *A* и шарнира *C*:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 11{,}91 \text{ кН},\ R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 15{,}83 \text{ кН}.$$

1.5. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил

В заданиях рассматривается равновесие однородной плиты или вала (прямого или с «ломаной» осью) с насаженным на него шкивом.

Вал закреплен подпятником и подшипником и удерживается в равновесии. На вал действуют сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и сила $\vec{P}$. На шкив вала намотана нить, к свободному концу которой, перекинутому через невесомый блок, подвешен груз весом Q. Для вала определить реакции подшипника и подпятника и величину уравновешивающей силы Q (или момента M).

Плита весом P закреплена пространственным шарниром, подшипником и удерживается в заданном положении невесомым стержнем. На плиту действуют силы $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и пара сил с моментом M. Для плиты найти реакции сферического и цилиндрического шарниров и реакцию стержня.

Варианты задания даны на рис. 1.11 – 1.13. Исходные данные для выполнения задания приведены в табл. 1.2.

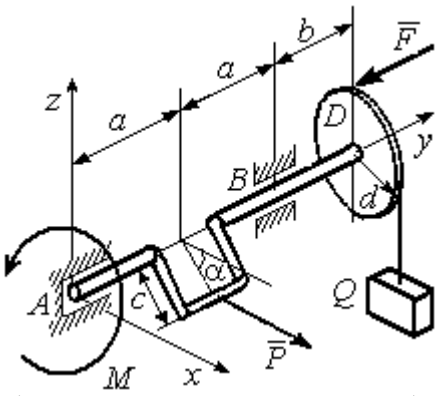
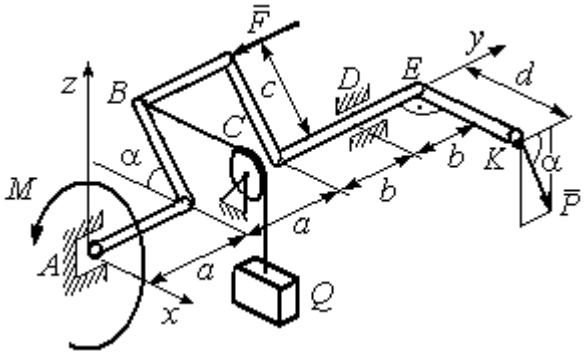
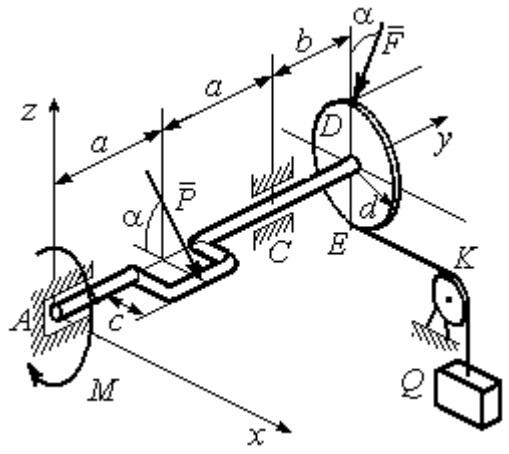
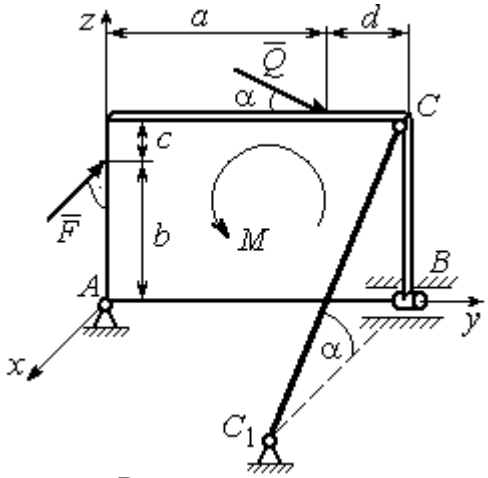
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ параллельна оси Ax; нить, удерживающая груз, сходит со шкива вертикально. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и B и величину уравновешивающего груза Q	Сила $\vec{F}$ параллельна оси Ay; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной zAy; отрезок нити BC параллелен оси Ax; рукоять вала EK параллельна оси Ax. Найти реакции подпятника и подшипника в точках A и D и величину уравновешивающего момента M

Рис. 1.11. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 1 – 2, 11 – 12, 21 – 22

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Сила $\vec{F}$, лежит в плоскости *zAy*; сила $\vec{P}$ лежит в плоскости, параллельной *zAx*, отрезок нити *EK* параллелен оси *Ax*. Найти реакции подпятника и подшипника в точках *A* и *C*, а также величину уравновешивающего груза *Q*	Плита весом *P* расположена в плоскости *zAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной *zAx*; сила $\vec{Q}$ действует в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1

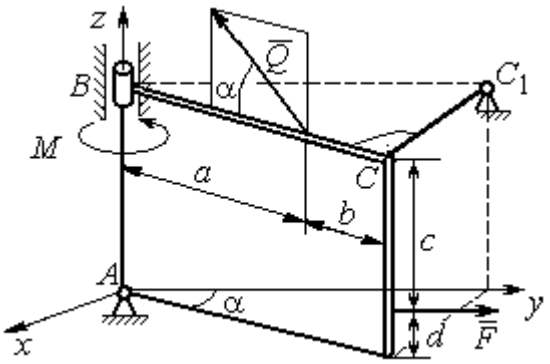
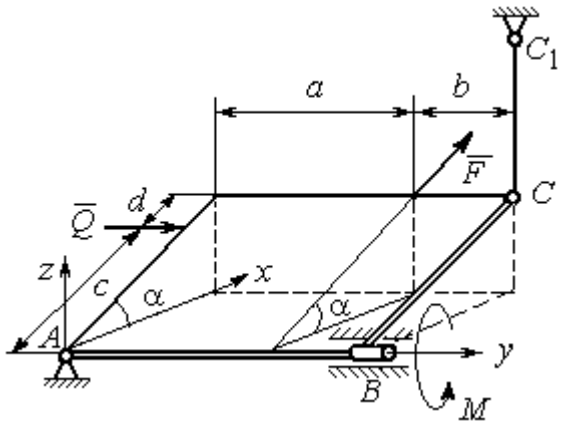
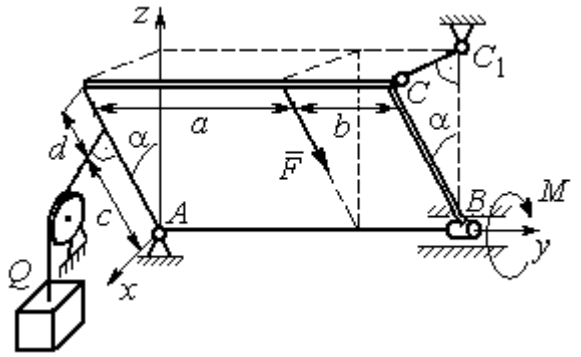
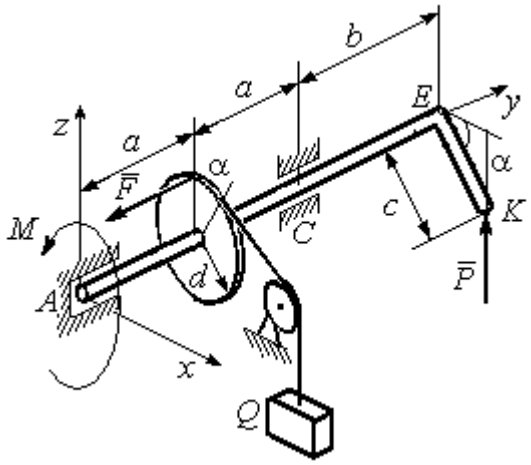
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости *zAy*; сила $\vec{Q}$ лежит в плоскости плиты; сила $\vec{F}$ параллельна оси *Ay*; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Плита весом *P* отклонена на угол α от горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна боковой стенке плиты и параллельна оси *Ay*; сила $\vec{F}$ расположена в плоскости плиты и параллельна её боковым стенкам; стержень CC_1 параллелен оси *Az*. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1

Рис. 1.12. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 3 – 6, 13 – 16, 23 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Плита весом *P* отклонена на угол α от вертикальной плоскости *zAy*; нить, удерживающая груз *Q*, находится плоскости *zAx*, прикреплена к боковой стенке плиты и перпендикулярна ей; сила $\vec{F}$ параллельна боковым стенкам плиты; стержень CC_1 перпендикулярен плоскости *zAy*. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Рукоять *EK* перпендикулярна оси вала и наклонена под углом α к горизонтальной плоскости *xAy*; сила $\vec{P}$ параллельна оси *Az*; сила $\vec{F}$ параллельна оси A*y*; нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива по касательной. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *C*, и величину уравновешивающего груза *Q*

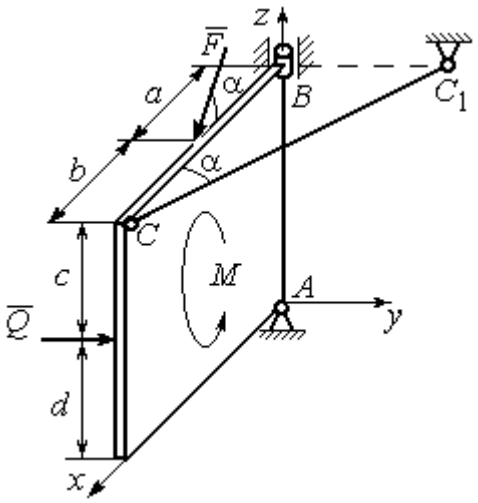
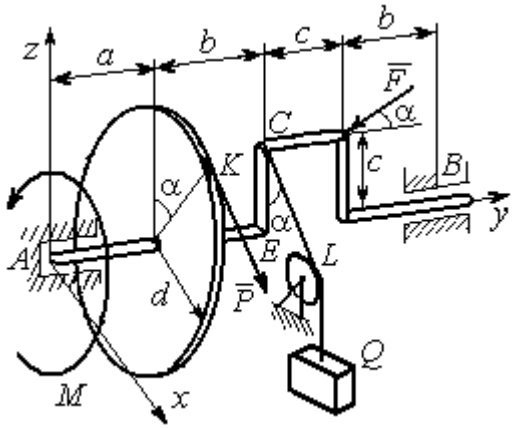
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Плита весом *P* находится в вертикальной плоскости *zAx*; стержень CC_1 расположен в плоскости, параллельной *xAy*; пара сил с моментом *M* действует в плоскости плиты; сила $\vec{Q}$ перпендикулярна плоскости плиты; сила $\vec{F}$ лежит в плоскости плиты. Найти реакции сферического и цилиндрического шарниров в точках *A* и *B* и реакцию стержня CC_1	Сила $\vec{F}$ находится в плоскости *zAy*; стойка *CE* находится в плоскости *zAy*; отрезок *CL* нити, удерживающей груз, находится в плоскости параллельной *xAz*; сила $\vec{P}$ находится в плоскости шкива и направлена по касательной к ободу в точке *K*. Найти реакции подпятника *A*, подшипника *B* и величину уравновешивающего момента *M*

Рис. 1.13. Задание С2. Равновесие пространственной системы сил.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 1.2

Исходные данные для задания С2.
Равновесие пространственной системы сил

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P, кН	5	4	6	10	16	15	12	10	15	14
F, кН	8	6	12	6	10	10	8	12	12	10
Q, кН	–	12	–	12	8	12	10	–	10	12
M, кН·м	12	–	10	8	12	6	8	6	8	–
α, град	60	30	30	30	60	60	60	30	30	60
a, м	1,2	0,8	1,4	0,6	1,2	0,9	1,4	0,4	0,8	0,8
b, м	1,0	0,6	1,1	0,4	0,8	0,4	0,6	1,2	0,2	0,6
c, м	0,8	0,5	0,8	0,3	1,4	0,8	1,2	0,8	0,4	0,4
d, м	0,4	0,4	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Номер варианта задания	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
P, кН	8	10	10	15	14	10	16	9	10	12
F, кН	6	12	16	8	12	14	10	15	8	10
Q, кН	–	14	–	10	10	12	14	–	12	14
M, кН·м	10	–	12	12	12	8	10	10	10	–
α, град	30	60	60	60	30	30	30	60	60	30
a, м	0,8	1,3	0,9	0,5	1,3	1,2	1,6	0,6	0,9	1,2
b, м	0,6	1,1	0,6	0,4	0,9	0,6	0,8	1,2	0,3	0,8
c, м	0,4	0,8	0,5	0,2	1,5	0,9	1,2	0,4	0,6	0,6
d, м	0,2	0,4	0,4	0,1	0,5	0,4	0,6	0,2	0,2	0,8

Номер варианта задания	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P, кН	10	12	5	8	10	14	18	12	14	10
F, кН	12	8	15	10	12	8	10	15	9	8
Q, кН	–	10	–	12	14	10	16	–	12	6
M, кН·м	12	–	16	14	8	10	8	12	10	–
α, град	90	30	60	30	45	30	30	60	60	30
a, м	0,6	0,8	1,1	1,2	1,5	0,8	1,0	0,8	1,2	0,9
b, м	0,8	0,6	0,9	1,0	0,9	0,6	0,8	1,4	0,6	0,4
c, м	0,4	1,2	0,8	0,6	1,5	0,9	1,1	0,5	0,8	0,6
d, м	0,4	1,5	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,4	0,6	0,5

Примеры решения задания С2. Равновесие пространственной системы сил

Задача 1. Горизонтальный вал (рис. 1.14) закреплен в подпятнике *C* и подшипнике *K*. Вал имеет шкив I радиуса *R* и шкив II радиуса *r*, перпендикулярные оси вала. Рукоять *AE* параллельна оси *Cx*. Нить, удерживающая груз *Q*, сходит со шкива I по касательной вертикально вниз. На вал действуют силы $\vec{F}$, $\vec{P}$ и пара сил с моментом *M*, закручивающая вал вокруг оси *Cy*. Сила $\vec{F}$ находится в плоскости, параллельной *zCy*, и составляет угол 60° с направлением оси *Cy*. Сила $\vec{P}$ приложена в точке *B* шкива II, определяемой центральным углом 30º, и направлена по касательной. Определить величину уравновешивающего момента *M* и реакции подшипника и подпятника, если $P = 4$ кН, $F = 2$ кН, $Q = 3$ кН, $R = 0{,}6$ м, $r = 0{,}3$ м, $a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}4$ м.

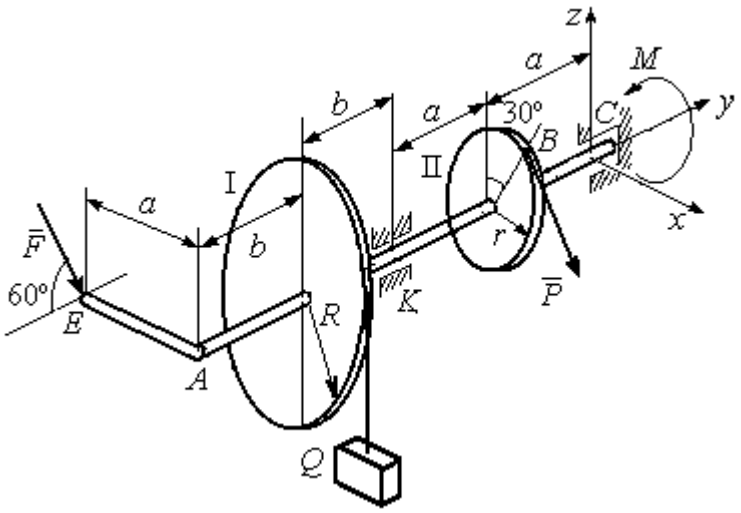


Рис. 1.14. Схема вала и его нагрузка

Решение

Рассмотрим равновесие вала. На вал действуют внешние силы $\vec{F}$, $\vec{P}$, пара сил с моментом *M* и реакции связей. Связями являются нить, натянутая грузом *Q*, подпятник *C* и подшипник *K*. Освобождаем вал от связей, заменяя их действие реакциями. Реакцию подпятника *C* раскладываем на три со-

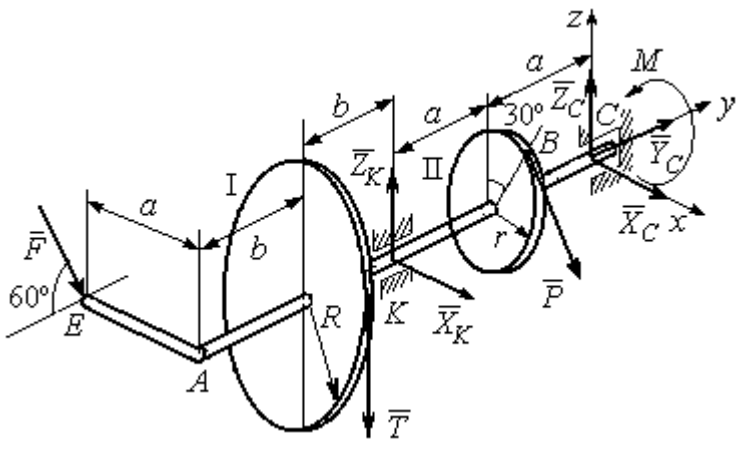


Рис. 1.15. Внешние силы и реакции связей вала

ставляющие: $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{Z}_C$, направленные вдоль координатных осей. Реакция подшипника *K* лежит в плоскости, перпендикулярной оси вала, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_K, \vec{Z}_K$, направленные вдоль координатных осей *x*, *z*. Реакция нити $\vec{T}$ направлена вдоль нити от точки *K* и по модулю равна весу груза. Действие на вал внешних сил и реакций связи показано на рис. 1.15.

Внешние силы, действующие на вал, и реакции связей составляют произвольную пространственную систему сил, эквивалентную нулю ($\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_K, \vec{Z}_K, \vec{T}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Z}_C, M$) ∞ 0, для которой уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Для удобства при составлении уравнений равновесия изобразим вал вместе с действующими на него силами в проекциях на координатные плоскости (рис. 1.16)

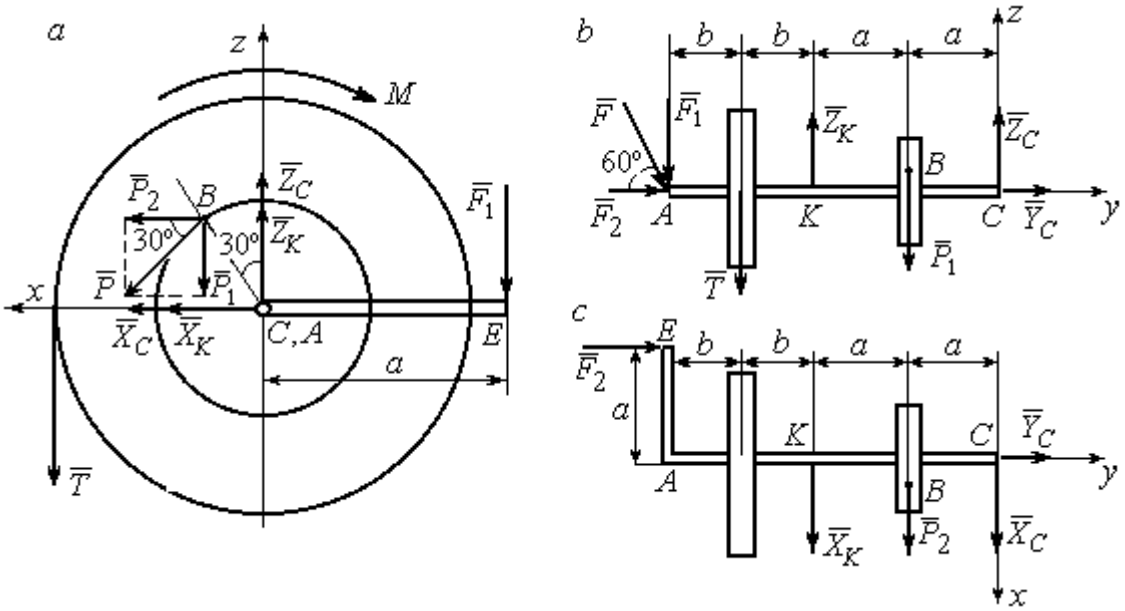


Рис. 1.16. Вал и действующие на него силы в проекциях на координатные плоскости:
a – вид вала в проекции на плоскость *zCx* с положительного конца оси *y*;
b – вид вала в проекции на плоскость *zCy* с положительного конца оси *x*;
c – вид вала в проекции на плоскость *xCy* с положительного конца оси *z*.

На рис. 1.16, *а* показаны проекции всех сил на плоскость *zCx*. Вычисляя моменты проекций этих сил относительно точки *C*, получим значения моментов исходных сил относительно оси *y*.

Для вычисления моментов сил относительно оси *x* достаточно найти моменты проекций сил на плоскость *zCy* относительно точки *C* (см. рис. 1.16, *b*), а вычисляя моменты проекций сил на плоскость *xCy* относительно точки *C*, получим значения моментов сил относительно оси z.

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = P_2 + X_K + X_C = 0,\ \sum F_{ky} = F_2 + Y_C = 0,$$

$$\sum F_{kz} = -P_1 + Z_K - T + Z_C - F_1 = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = P_1 a - Z_K 2a - T(2a + b) + F_1(2a + 2b) = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -F_1 a + TR + Pr - M = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = P_2 a + X_K 2a - F_2 a = 0.$$

Подставляя исходные данные задачи, с учётом того, что

$$P_1 = P\cos 60^\circ = 0{,}5P,\ P_2 = P\cos 30^\circ = 0{,}87P,$$

$$F_1 = F\cos 30^\circ = 0{,}87F,\ F_2 = F\cos 60^\circ = 0{,}5F$$ (см. рис. 1.16 *а*, *b*),

получим систему уравнений:

$$0{,}87 \cdot 4 + X_K + X_C = 0,\ \ 2 \cdot 0{,}5 + Y_C = 0,\ -4 \cdot 0{,}5 + Z_K - 3 + Z_C - 2 \cdot 0{,}87 = 0,$$

$$0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}8 - 1{,}6Z_K - 3 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4) + 2 \cdot 0{,}87(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}4) = 0,$$

$$-0{,}87 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3 - M = 0,\ 0{,}87 \cdot 4 \cdot 0{,}8 + 1{,}6 \cdot X_K - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0.$$

Решая систему, найдём: $X_C = -2{,}24$ кН, $Y_C = -1$ кН, $Z_C = 6{,}39$ кН, $X_K = -1{,}24$ кН, $Z_K = 0{,}35$ кН, $M = 2{,}3$ кН·м.

Окончательно, реакция подпятника $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2 + Z_C^2} = 6{,}84$ кН,

реакция подшипника $R_K = \sqrt{X_K^2 + Z_K^2} = 1{,}29$ кН.

Задача 2. Плита весом P расположена в вертикальной плоскости zAy. В точке А плита закреплена пространственным шарниром, а в точке B на оси y опирается на цилиндрический шарнир (подшипник). Плита удерживается в равновесии при помощи невесомого стержня CC_1, прикреплённого шарниром к плите в её верхнем углу, в точке C перпендикулярно плоскости плиты (рис. 1.17).

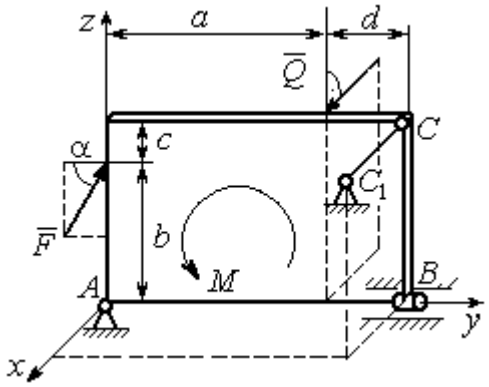


Рис. 1.17. Равновесие плиты

На плиту действует сила $\vec{Q}$, приложенная на краю плиты перпендикулярно её плоскости, и сила $\vec{F}$, лежащая в плоскости плиты и направленная под углом α к горизонту (см. рис. 1.17). Кроме того, в плоскости плиты на неё действует пара сил с моментом M. Найти реакции шарниров A и B и усилие в стержневой подпорке CC_1 при равновесии плиты, если параметры нагрузки: P = 1 кН, Q = 500 Н, F = 400 Н, M = 300 Н·м, $\alpha = 35^\circ$, a = 2 м, b = 1,5 м, c = 0,2 м, d = 0,4 м.

Решение

Заменим связи плиты их реакциями. Реакция шарнира A раскладывается на три составляющие: $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ по направлениям координатных осей. Направления координатных осей показаны на рис. 1.17. Реакция подшипника B лежит в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, и ее составляющими будут вектора $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$, направленные вдоль координатных осей x, z. Реакция стержня $\vec{T}$ направлена вдоль стержня. Действие сил и реакций показано на рис.1.18.

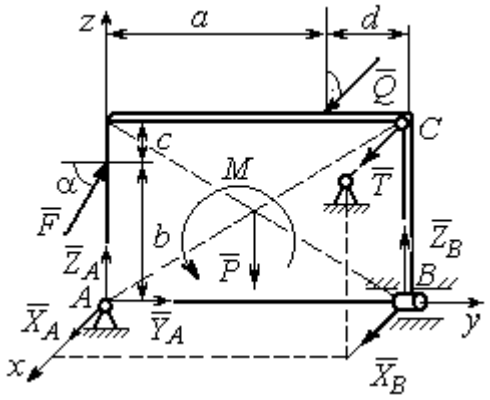


Рис. 1.18. Действие сил и реакций при равновесии плиты

Пространственная система сил, действующих на плиту, является уравновешенной: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, M) \infty 0$. Уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

В вычислениях моментов сил относительно осей будем считать момент положительным, если при взгляде со стороны положительного направления оси, сила вращает тело (плиту) против хода часовой стрелки. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + Q + X_B + T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + F\cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0,\ Z_A + F\sin\alpha - P + Z_B = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0,\ -F\cos\alpha \cdot b - P \cdot 0{,}5(a+d) + Z_B(a+d) + M = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,\ Q \cdot (b+c) + T \cdot (b+c) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0,\ -Q \cdot a - T \cdot (a+d) - X_B \cdot (a+d) = 0.$$

Подставив исходные данные задачи, получим систему уравнений:

$$X_A + 500 + X_B + T = 0,\ Y_A + 400 \cdot 0{,}82 = 0,\ Z_A + 400 \cdot 0{,}57 - 1000 + Z_B = 0,$$

$$-400 \cdot 0{,}82 \cdot 1{,}5 - 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}4 + Z_B \cdot 2{,}4 + 300 = 0,$$

$$500 \cdot 1{,}7 + T \cdot 1{,}7 = 0,\quad -500 \cdot 2 - T \cdot 2{,}4 - X_B \cdot 2{,}4 = 0,$$

откуда находим значения составляющих реакций:

$$T = -500\ \text{Н},\ X_B = 83{,}33\ \text{Н},\ Z_B = 580\ \text{Н},$$

$$X_A = -83{,}33\ \text{Н},\ Y_A = -328\ \text{Н},\ Z_A = 192\ \text{Н}.$$

Полные реакции пространственного шарнира *A*:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 389{,}09\ \text{Н},$$

цилиндрического шарнира *B*: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 585{,}95\ \text{Н}$.

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются свойства движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

2.1. Кинематика точки. Основные параметры движения точки

Кривая, которую описывает движущаяся точка, называется **траекторией** точки. Движение точки может быть задано **векторным**, **координатным** или **естественным** способами.

Векторный способ основан на определении положения точки ее радиусом-вектором в виде векторного уравнения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. При **координатном способе** задания движения точки положение точки определяется ее координатами, заданными для каждого момента времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. **Естественный способ** задания движения используется, если заранее известна траектория движения точки. Тогда положение точки однозначно определяется длиной дуги $\breve{OM} = S(t)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки *O*, принятой за начало отсчета.

Мгновенная скорость, или скорость точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от радиуса-вектора точки: $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

При координатном способе задания движения величины проекций вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси определяются как производные по времени от соответствующих координат: $V_x = \dot{x}$, $V_y = \dot{y}$, $V_z = \dot{z}$. Модуль вектора скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$. При естественном способе задания движения вектор скорости точки определяется равенством: $\vec{V} = \dot{S}\vec{\tau}$, где $S = S(t)$ – закон измене-

ния длины дуги, $\vec{\tau}$ –единичный вектор касательной к траектории движения, направленный в сторону возрастающих расстояний.

Величина $V = |\dot{S}|$ называется алгебраической скоростью точки. При $\dot{S} > 0$ вектор скорости $\vec{V}$ направлен по единичному вектору $\vec{\tau}$ – в сторону возрастающих расстояний. При $\dot{S} < 0$ он имеет направление, противоположное единичному вектору $\vec{\tau}$, т. е. в сторону убывающих расстояний.

Мгновенное ускорение, или ускорение точки в данный момент времени, является векторной величиной и определяется как производная по времени от вектора скорости точки или как вторая производная от радиус-вектора точки: $\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$. При координатном способе проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси – величины a_x, a_y, a_z – определяются равенствами: $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}$, $a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}$, $a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}$. Модуль вектора ускорения равен: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При естественном способе задания движения вектор ускорения точки $\vec{a}$ раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, параллельные осям n и τ естественной системы координат, и представляется в виде равенства $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$, или $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, где $\vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор оси, касательной к траектории (касательная ось); $\vec{n}$ – единичный направляющий вектор главной нормали траектории. Величина a_n называется **нормальным ускорением** точки и вычисляется по формуле: $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории. (У окружности радиус кривизны равен её радиусу, у прямой линии – бесконечности.) Вектор $\vec{a}_n$ нормальной составляющей ускорения всегда направлен к центру кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории равен радиусу окружности, а центр кривизны траектории совпадает с центром окружности. Величина a_τ называется **касательным ускорением** и равна модулю второй производной от заданно-

го закона изменения длины дуги: $a_\tau = |\ddot{S}|$, где $S = S(t)$ – закон изменения длины дуги. Направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ зависит от знака второй производной $\ddot{S}$. При $\ddot{S} > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ в направлен в сторону возрастающих расстояний, по направлению единичного вектора $\vec{\tau}$, при $\ddot{S} < 0$ – в сторону убывающих расстояний (противоположно единичному вектору $\vec{\tau}$). Вектор полного ускорения $\vec{a}$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. Модуль вектора ускорения: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

2.2. Вращение тела вокруг неподвижной оси

Движение тела, при котором все точки некоторой его прямой остаются неподвижными, называется **вращательным**, а указанная прямая называется осью вращения. Вращение тела задается углом поворота $\varphi = \varphi(t)$ подвижной плоскости, связанной с телом, относительно некоторого ее начального положения. Направление вращения с возрастанием угла поворота считается положительным.

Величина **угловой скорости** вращения тела равна модулю производной от угла поворота тела по времени: $\omega = |\dot{\varphi}|$. Направление угловой скорости вращения тела зависит от знака производной $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} > 0$ вращение происходит в положительном направлении, в сторону возрастания угла поворота, при $\dot{\varphi} < 0$ – в отрицательном. Направление угловой скорости обычно показывают дуговой стрелкой вокруг оси вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда вращение тела видно против хода часовой стрелки.

Величина **углового ускорения** при вращении тела равна модулю второй производной от угла поворота тела по времени: $\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$. Если $\ddot{\varphi}$ одного знака с

φ, то угловое ускорение ускоряет вращение тела, если разных знаков, то угловое ускорение замедляет вращение.

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, радиусы которых равны расстояниям от выбранной точки до неподвижной оси. **Скорость точки вращающегося твердого тела (**в отличие от угловой скорости тела) называют **линейной,** или **окружной скоростью** точки. Величина скорости рассчитывается по формуле: $V = \omega h$, где ω – величина угловой скорости тела; h – расстояние от точки до оси вращения. Вектор скорости точки лежит в плоскости описываемой точкой окружности и направлен по касательной к ней в сторону вращения тела. Отношение скоростей двух точек вращающегося тела равно отношению расстояний от этих точек до оси: $\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{h_1}{h_2}$.

Ускорение точки вращающегося твердого тела рассчитывается как ускорение точки при естественном способе задания движения в виде суммы векторов касательного и нормального ускорений: $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Величины касательного, нормального и полного ускорений точки вращающегося тела, соответственно: $a_\tau = \varepsilon h$, $a_n = \omega^2 h$, $a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела; h – расстояние от точки до оси вращения.

2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Плоскопараллельным, или плоским движением твердого тела, называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение представляется в виде суммы мгновенного поступательного движения, при котором все точки плоской фигуры движутся со скоростью выбранной точки-полюса, и мгновенного вращательного движения вокруг этого полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры равна векторной сумме вектора скорости точки-полюса и вектора скорости точки M при вращении тела вокруг этого полюса: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$, где $\vec{V}_M$ – скорость точки M; $\vec{V}_A$ – скорость полюса A; $\vec{V}_{MA}$ – вектор скорости точки M при вращении тела вокруг полюса A, модуль скорости $V_{MA} = \omega \cdot MA$, где ω – угловая скорость мгновенного вращательного движения тела вокруг полюса; MA – расстояние между полюсом A и точкой M.

Мгновенным центром скоростей называется такая точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Выбрав в качестве полюса мгновенный центр скоростей, скорость любой точки плоской фигуры находят так, как если бы мгновенное движение фигуры было вращательным вокруг мгновенного центра скоростей.

Способы построения мгновенного центра скоростей

1. Если известны направления скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к векторам скоростей (рис. 2.1, *a*).

2. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B плоской фигуры известны и параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (и, конечно, $\vec{V}_B$), то мгновенный центр скоростей определяется как точка пересечения линий, проведенных через основания и вершины векторов скоростей (построение показано на рис. 2.1, *b*, *c*).

3. Если скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ двух точек A и B параллельны друг другу, но линия AB, соединяющая эти точки, не перпендикулярна векторам скоростей (рис. 2.1, *d*), то мгновенная угловая скорость тела равна нулю и движение тела

в данный момент времени является мгновенным поступательным. В этом случае скорости всех точек равны по величине и направлению.

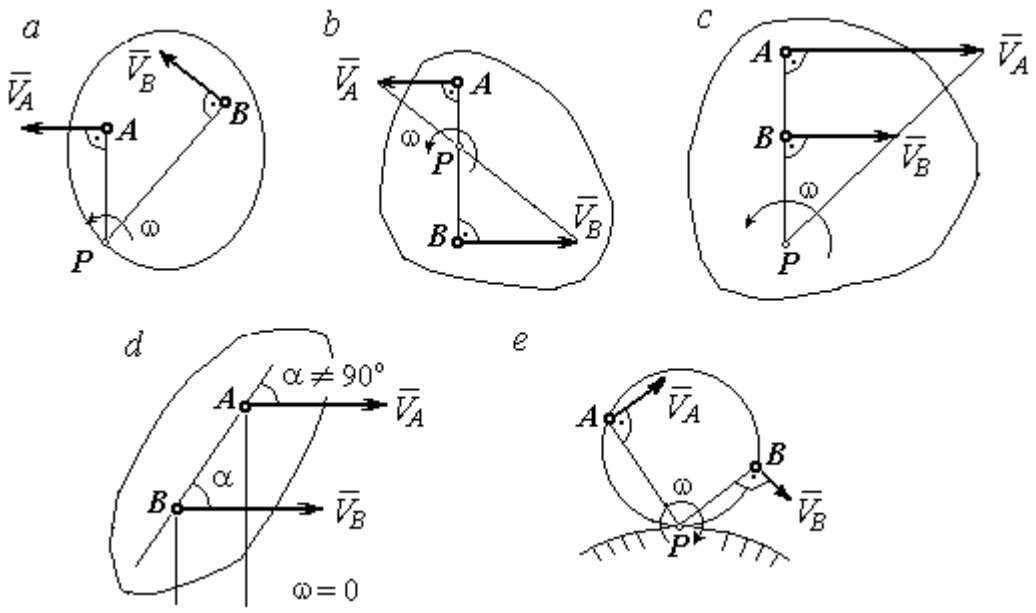


Рис. 2.1. Способы построения мгновенного центра скоростей

4. Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого, то мгновенный центр скоростей расположен в точке касания катящегося тела с неподвижной поверхностью (рис. 2.1, *e*).

Ускорение любой точки *M* плоской фигуры при плоскопараллельном движении твердого тела представляется как сумма векторов – ускорения полюса и ускорения точки *M* при вращении фигуры вокруг полюса. Учитывая, что ускорение точки вращающегося тела представляется как сумма нормального и касательного ускорений, получим:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA},$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{\tau}_{MA}$, $\vec{a}^{n}_{MA}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M при вращении фигуры вокруг полюса A.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{MA}$ всегда направлен от точки M к полюсу A. Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, если оно ускоренное (рис. 2.2, *a*), и против вращения, если оно замедленное (рис. 2.2, *b*). Численно величины касательного и нормального составляющих ускорения точки M определяются по формулам:

$$a^{\tau}_{MA} = \varepsilon \cdot AM\,,\quad a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot AM\,,$$

где ω, ε – угловая скорость и угловое ускорение тела (плоской фигуры); AM – расстояние от точки M до полюса A (см. рис. 2.2).

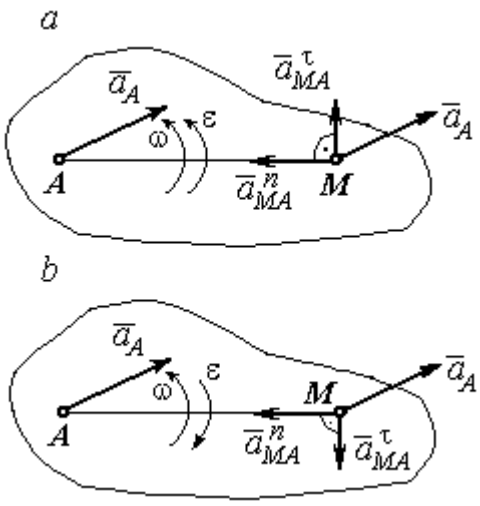


Рис. 2.2. Ускорение точки плоской фигуры:
a – ускоренное движение;
b – замедленное движение

Если при движении плоской фигуры известны траектории движения полюса A и точки M, то для определения ускорения точки M используется векторное равенство

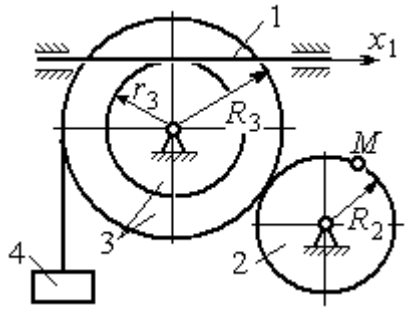
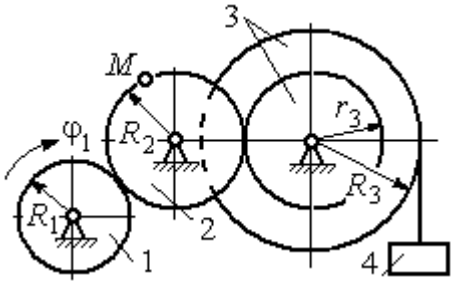
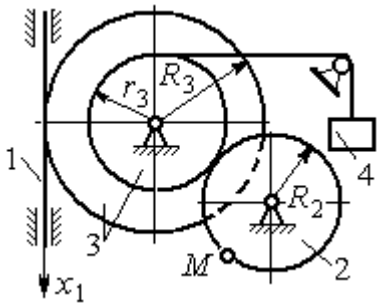
$$\vec{a}^{\,\tau}_{M} + \vec{a}^{\,n}_{M} = \vec{a}^{\,\tau}_{A} + \vec{a}^{\,n}_{A} + \vec{a}^{\,\tau}_{MA} + \vec{a}^{\,n}_{MA},$$

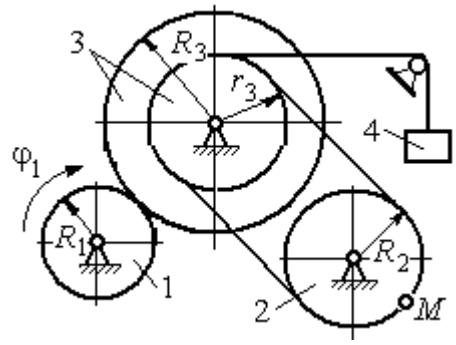
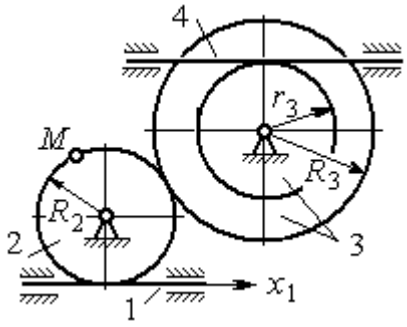
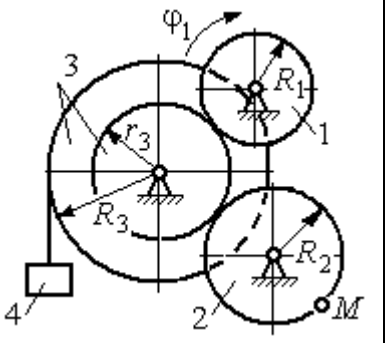
где $\vec{a}^{\,\tau}_{M}$, $\vec{a}^{\,n}_{M}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{A}$, $\vec{a}^{\,n}_{A}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки M и полюса A при движении их по заданным траекториям.

2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

По заданному движению одного из звеньев механизма $x_1 = x_1(t)$ (варианты 1, 3, 5, 7, 9) или $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ (варианты 2, 4, 6, 8, 10) найти в момент времени t_1 скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки M звена механизма, совершающего вращательное движение, а также скорость и ускорение звена 4, совершающего поступательное движение.

Варианты заданий даны на рис. 2.3, 2.4. Исходные данные представлены в табл. 2.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22	Варианты № 3, 13, 23
		

Варианты № 4, 14, 24	Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
		

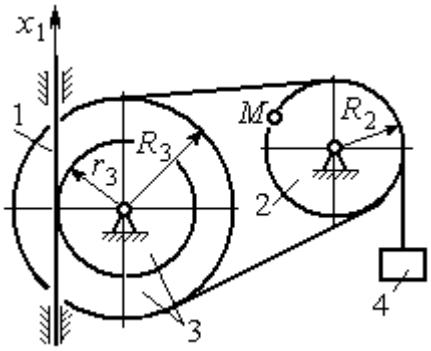
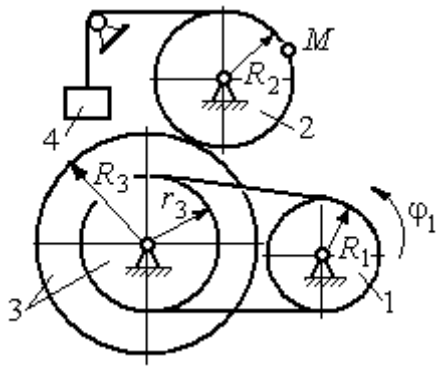
Варианты № 7, 17, 27	Варианты № 8, 18, 28
	

Рис. 2.3. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 1 – 8, 11 – 18, 21 – 28

Окончание вариантов задания К1

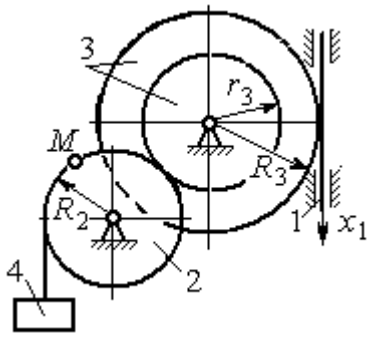
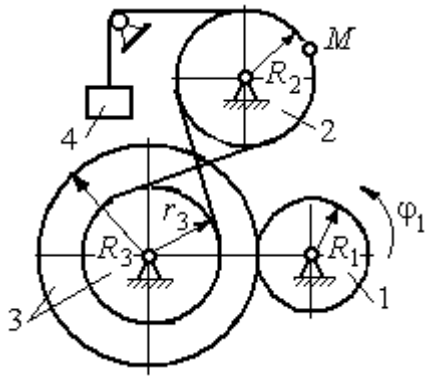
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 2.4. Задание К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
1	–	40	45	35	$x_1(t) = (3t-1)^2$	2
2	10	20	38	18	$\varphi_1(t) = t^2 + 6\cos(\pi t/6)$	3
3	–	30	42	18	$x_1(t) = 5t^2 - 2\cos(\pi t/2)$	1
4	15	30	45	20	$\varphi_1(t) = 5t^2 + \cos(\pi t/2)$	2
5	–	30	40	20	$x_1(t) = 6t - \cos(\pi t/3)$	3
6	10	20	30	10	$\varphi_1(t) = t^3 - \cos(\pi t/2)$	1
7	–	30	40	30	$x_1(t) = 2\sin(\pi t/2) + \cos(\pi t/2)$	2
8	8	10	30	25	$\varphi_1(t) = 5t + \cos(\pi t/2)$	2
9	–	18	30	18	$x_1(t) = 5t + \cos(\pi t/3)$	3
10	15	30	50	20	$\varphi_1(t) = 2t^2 + \sin(\pi t/4)$	2
11	–	30	40	25	$x_1(t) = (t^2 - 3t)$	2
12	12	20	40	28	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 6\sin(\pi t/6)$	3
13	–	25	60	42	$x_1(t) = 2t^2 + \cos(\pi t/2)$	1
14	10	30	45	30	$\varphi_1(t) = 3t^2 + 2\cos(\pi t/2)$	2

Окончание табл. 2.1

Номер варианта задания	R_1,см	R_2, см	R_3, см	r_3, см	$x_1(t)$, см $\varphi_1(t)$, рад	t_1, с
15	–	20	30	20	$x_1(t)=3t^2-\cos(\pi t/3)$	3
16	12	18	40	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\cos(\pi t/2)$	1
17	–	20	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	2
18	15	18	40	25	$\varphi_1(t)=5t+\cos(\pi t/2)$	1
19	–	22	50	18	$x_1(t)=t^2+\cos(\pi t/3)$	3
20	10	20	45	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\sin(\pi t/4)$	4
21	–	20	40	20	$x_1(t)=t+(3t-4)^2$	2
22	8	18	42	18	$\varphi_1(t)=2t^2+12\cos(\pi t/6)$	3
23	–	45	60	40	$x_1(t)=4t^2+\sin(\pi t/2)$	1
24	5	15	30	20	$\varphi_1(t)=2t^2+4\cos(\pi t/2)$	2
25	–	15	35	25	$x_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/3)$	3
26	18	20	35	20	$\varphi_1(t)=2t^3+\sin(\pi t/2)$	1
27	–	15	35	15	$x_1(t)=2\sin(\pi t/2)-\cos(\pi t/2)$	1
28	10	12	40	25	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/2)$	1
29	–	35	50	10	$x_1(t)=t^3-\cos(\pi t/2)$	1
30	10	20	40	10	$\varphi_1(t)=2t^2+\cos(\pi t/4)$	4

Пример выполнения задания К1. Определение скоростей и ускорений точек при поступательном и вращательном движениях твёрдого тела

По заданному уравнению движения звена 1 механизма (рис. 2.5, *а*) определить скорость, нормальное, касательное и полное ускорения точки *M* на момент времени t_1, а также скорость и ускорение звена 4, если значения радиусов колес механизма и закон движения звена 1: R_2= 20 см, r_2= 5 см, R_3= 8 см, r_3 = 4 см, $x_1 = 2t^2 - 5t$ см, t_1=1 с.

Решение

Отметим на схеме положительные направления отсчета углов поворота дисков 2 и 3, соответствующие заданному положительному направлению движения звена 1.

Направления показаны на рис 2.5, *b* дуговыми стрелками φ_2, φ_3, а положительное направление движения звена 4 – направлением оси x_4.

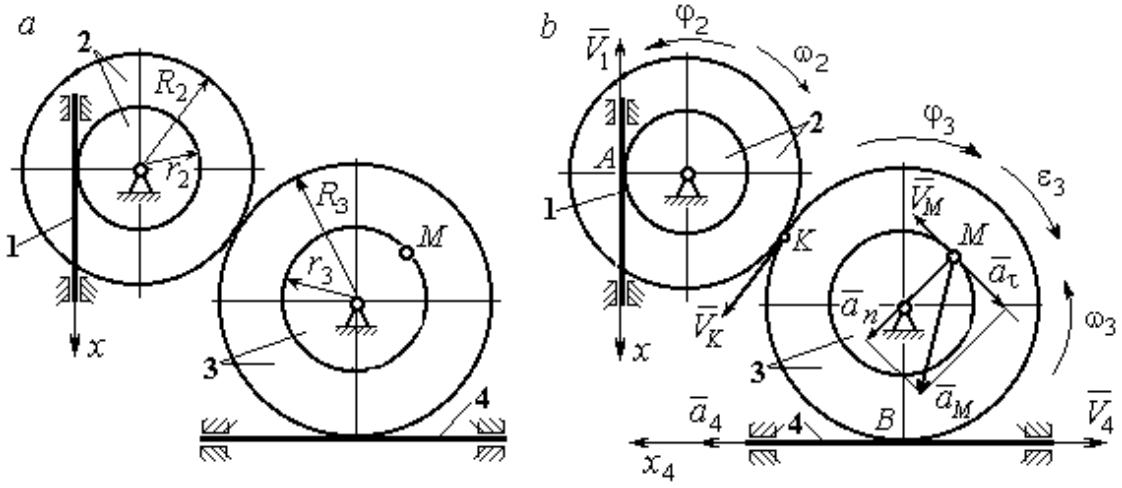


Рис. 2.5. Кинематика вращательного движения твердого тела:
a – схема механизма; *b* – расчетная схема для определения скоростей и ускорений точек механизма

Звено 1 движется поступательно. Движение задано координатным способом в виде закона изменения координаты x. Дифференцируем по времени уравнение движения: $\dot{x} = 4t - 5$ см/с. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной: $\dot{x}(1) = -1$ см/с. Отрицательное значение производной $\dot{x}$ показывает, что в данный момент времени звено 1 движется в отрицательном направлении оси *x*. Скорость звена 1 равна модулю производной: $V_1 = |\dot{x}|$. На рис. 2.5, *b* направление движения звена 1 в момент времени $t_1 = 1$ с показано вектором скорости $\vec{V}_1$, направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси *x*. Эту же скорость будет иметь точка *A* – точка контакта звена 1 с диском 2, лежащая на расстоянии r_2 от оси вращения диска. Следовательно, $V_1 = V_A = \omega_2 r_2$, где ω_2 – угловая скорость диска 2. Отсюда угловая скорость диска: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{r_2} = \dfrac{|4t-5|}{5} = |\dot{\varphi}_2|$ рад/с. При $t_1 = 1$ с значение производной отрицательно: $\dot{\varphi}_2(1) = -0{,}2$ рад/с. Это означает, что в заданный момент времени вращение диска 2 с угловой скоростью $\omega_2(1) = |\dot{\varphi}_2(1)| = 0{,}2$ рад/с происходит

в отрицательном для диска 2 направлении. На рис. 2.5, *b* направление вращения диска 2 показано дуговой стрелкой ω_2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_2. При передаче вращения диска 2 диску 3 величины угловых скоростей дисков обратно пропорциональны радиусам дисков, которым принадлежит точка контакта: $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$. Тогда, угловая скорость диска 3 $\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3} = |2t - 2{,}5| = |\dot{\varphi}_3|$ рад/с.

В момент времени $t_1 = 1$с значение производной $\dot{\varphi}_3$ отрицательно: $\dot{\varphi}_3(1) = -0{,}5$ рад/с, и, следовательно, вращение диска 3 в данный момент времени с угловой скоростью $\omega_3(1) = |\dot{\varphi}_3(1)| = 0{,}5$ рад/с происходит в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла φ_3, как показано на рис. 2.5, *b*. Величина (модуль) скорости точки *M* рассчитывается по формуле: $V_M = \omega_3 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с модуль скорости $V_M(1) = 2$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_M$ расположен по касательной к траектории движения точки *M* (окружности) и направлен в сторону вращения диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Звено 4 движется поступательно. Скорость звена 4 равна скорости точки касания его с диском 3: $V_4 = V_B = \omega_3 R_3 = |2t - 2{,}5| \cdot 8 = |\dot{x}_4|$. В момент времени $t_1 = 1$ с значение производной от координаты движения звена 4 отрицательно: $\dot{x}_4(1) = -4$ см/с. В результате, вектор скорости $\vec{V}_4(1)$, равный по модулю $V_4(1) = 4$ см/с, направлен вдоль оси x_4 в сторону, противоположную ее положительному направлению (см. рис. 2.5, *b*).

Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3(t) = |\dot{\omega}_3| = |\ddot{\varphi}_3| = 2$ рад/с^2. Из того, что угловая скорость ω_3 и угловое ускорение $\dot{\omega}_3$ диска 3 имеют разные знаки, следует, что вращение диска 3 замедленное. Угловое ускорение диска направлено в сторону положительного направления отсчета угла поворота φ_3, диска 3 (см. рис. 2.5, *b*).

Касательное ускорение a_τ точки M рассчитывается по формуле $a_\tau = \varepsilon_3 r_3$ и в момент времени $t_1 = 1$ с: $a_\tau = 8$ см/с^2. Так как вращение диска 3 замедленное, вектор касательного ускорения точки M $\vec{a}_\tau(t)$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_M(1)$ (см. рис. 2.5, *b*). Нормальное ускорение a_n точки M рассчитывается как $a_n = \omega_3^2 r_3$. В момент времени $t_1 = 1$ с величина нормального ускорения: $a_n(1) = 1$ см/с^2. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n(1)$ направлен по радиусу к центру диска 3 (см. рис. 2.5, *b*). Полное ускорение точки M в заданный момент времени: $a_M(1) = \sqrt{a_\tau^2(1) + a_n^2(1)} = 8{,}06$ см/с^2. Вектор полного ускорения $\vec{a}_M$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$.

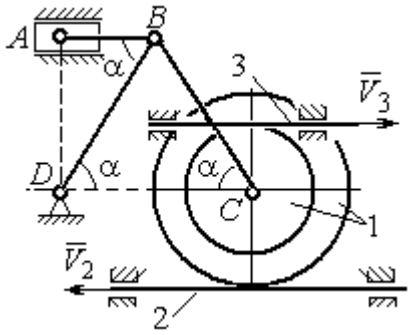
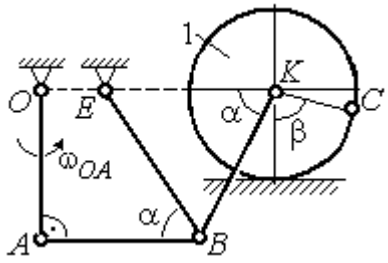
Ускорение a_4 звена 4 находится из условия, что звено 4 движется поступательно и прямолинейно. При прямолинейном движении нормальная составляющая ускорения равна нулю. Тогда $a_4 = a_{4\tau} = \dot{V}_4 = = \dot{V}_B = |\dot{\omega}_3| R_3 = \varepsilon_3 R_3$.

Так как угловое ускорение диска 3 является постоянной величиной, ускорение a_4 не зависит от времени: $a_4 = 16$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_4$ направлен вдоль оси x_4 в сторону положительных значений.

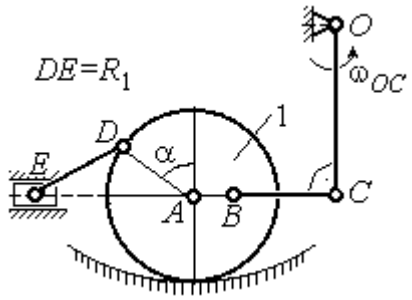
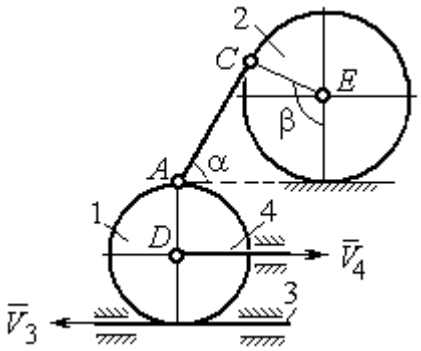
2.5. Задание К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить скорости точек и угловые скорости звеньев механизма.

Варианты заданий показаны на рис. 2.6 – 2.8. Исходные данные вариантов заданий выбираются из таблиц, приведённых на рисунках схем механизмов.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_{AB}, \omega_{BC}, \omega_1, \omega_{BD}$	 Найти: V_A, V_B, V_K, $\omega_1, \omega_{AB}, \omega_{OA}$, ω_{BE}, ω_{BK}

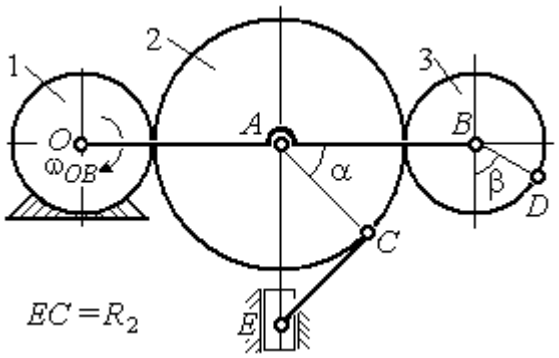
Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	AD, см	α, град	V_2, см/с	V_3, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	OE, см	α, град	β, град	V_C, см/с
1	10	5	20	30	8	10	**2**	3	5	4	30	60	10
11	12	8	25	45	10	4	**12**	4	8	6	45	90	8
21	10	6	15	60	5	5	**22**	5	12	2	60	120	12

Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, $\omega_{BC}, \omega_1, \omega_{DE}$	 Найти: V_A, V_C, V_E, $\omega_1, \omega_2, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OC, см	AB, см	BC, см	α, град	ω_{OC}, рад/с	Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	α, град	β, град	V_3, см/с	V_4, см/с
3	12	18	10	35	60	4	**4**	10	15	30	60	8	4
13	10	15	10	25	90	8	**14**	6	10	45	90	4	6
23	15	20	5	20	120	6	**24**	10	12	60	120	3	3

Рис. 2.6. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

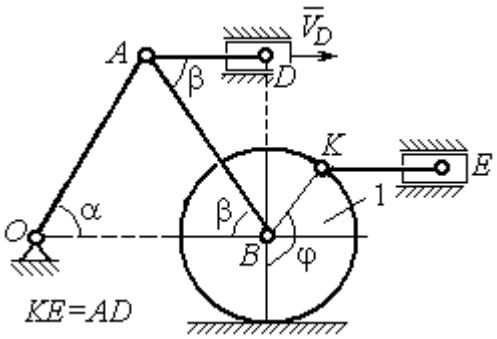
Варианты № 5, 15, 25



Найти: V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, ω_2, ω_3, ω_{EC}

Номер варианта задания	R_1, см	R_2, см	R_3, см	α, град	β, град	ω_{OB}, рад/с
5	10	20	12	60	0	6
15	6	18	10	90	90	8
25	20	25	15	120	180	4

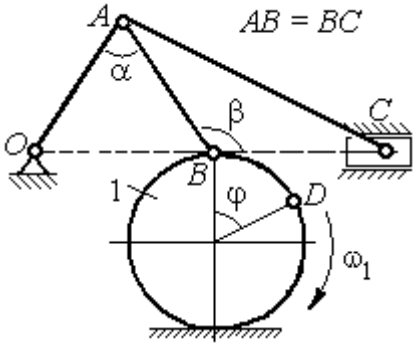
Варианты № 6, 16, 26



Найти: $V_A, V_B, V_K, V_E,$ ω_1, ω_{OA}, ω_{AB}, ω_{AD}, ω_{KE}

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
6	10	20	30	60	60	12
16	12	26	30	30	90	8
26	15	30	60	60	120	15

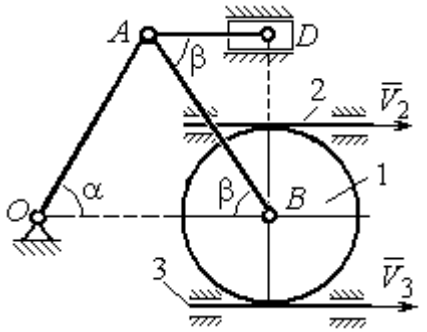
Варианты № 7, 17, 27



Найти: $V_A, V_B, V_C, \omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	AB, см	α, град	β, град	φ, град	V_D, см/с
7	10	20	30	60	60	12
17	12	25	60	120	90	16
27	8	16	30	60	120	10

Варианты № 8, 18, 29

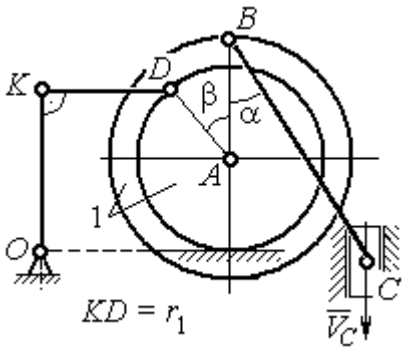
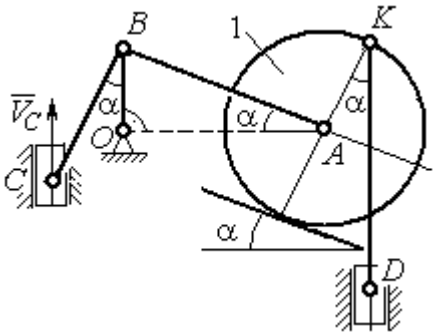


Найти: V_A, V_B, V_D, $\omega_1, \omega_{OA}, \omega_{AB}, \omega_{AD}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	α, град	β, град	V_2, см/с	V_3, см/с
8	10	20	30	60	12	4
18	12	26	30	30	8	2
28	15	30	60	60	6	3

Рис. 2.7. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К2

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $\omega_{OK}, \omega_{KD}, \omega_{BC}, \omega_1,$ V_A, V_B, V_K, V_D	 Найти: $V_A, V_B, V_D, V_K,$ $\omega_{CB}, \omega_1, \omega_{OB}, \omega_{AB}, \omega_{KD}$

Номер варианта задания	R_1, см	r_1, см	α, град	β, град	BC, см	V_C, см/с	Номер варианта задания	R_1, см	CB, см	OB, см	KD, см	α, град	V_C, см/с
9	20	12	45	60	60	8	**10**	10	20	30	60	30	4
19	24	16	60	90	50	4	**20**	12	26	30	50	45	2
29	16	10	30	120	40	6	**30**	15	30	60	60	60	3

Рис. 2.8. Задание К2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Пример выполнения задания К2. Определение скоростей точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Плоский механизм (рис. 2.9) состоит из стержня OC и подвижных дисков 2 и 3 радиусами r_2, r_3, шарнирно закрепленными на стержне, соответственно, в точках A и C. Стержень OC вращается вокруг неподвижного центра O с угловой скоростью ω_{OC}. Диск 2, увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзывания по неподвижной поверхности диска 1 радиусом r_1. Диск 3, также увлекаемый стержнем OC, катится без проскальзыва-

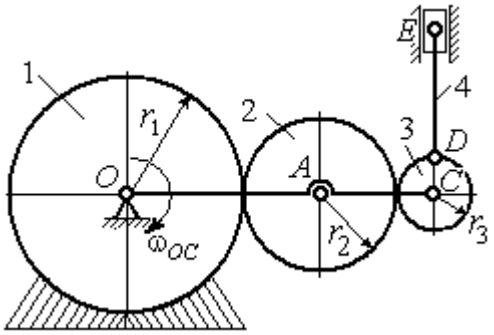


Рис. 2.9. Схема плоского механизма

ния по подвижному диску 2. В точке *D*, расположенной на краю диска 3, шарнирно прикреплен стержень 4, к которому в точке *E* шарнирно прикреплен поршень *E*, способный совершать только вертикальное перемещение. Для заданного положения механизма (см. рис. 2.9), когда стержень *OC* горизонтален, стержень *DE* направлен по линии вертикального диаметра диска 3, найти скорости точек *A*, *C*, *D*, *E*, угловые скорости дисков 2, 3 и стержня 4, если: r_1 = 6 см, r_2 = 4 см, r_3 = 2 см, *DE* = 10 см, ω_{OC} = 1 рад/с.

Решение

Определим скорость точки *A*, общей для стержня *OC* и диска 2: $V_A = \omega_{OC}(r_1 + r_2)$ = 10 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ перпендикулярен стержню *OC* и направлен в сторону его вращения (рис. 2.10).

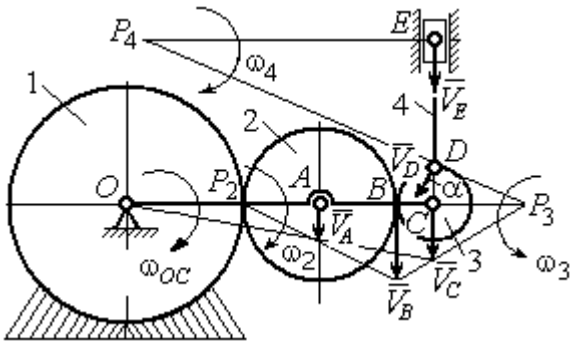


Рис. 2.10. Расчетная схема для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Диск 2 катится по неподвижной поверхности диска 1. Точка касания диска 2 с неподвижным диском 1 является мгновенным центром скоростей диска 2. На рис. 2.10 центр скоростей диска 2 обозначен точкой P_2. В этом случае скорость точки *A* может быть определена через угловую скорость диска ω_2 следующим образом: $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = 4\omega_2$. Так как V_A = 10 см/с, получим ω_2 = 2,5 рад/с.

Для того чтобы найти угловую скорость диска 3, необходимо определить положение его мгновенного центра скоростей. С этой целью вычислим скорости точек *B* и *C*. Скорость точки *B* может быть найдена через угловую скорость диска 2: $V_B = \omega_2 \cdot BP_2$ = 20 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_B$ перпендикулярен отрезку BP_2 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 2 вокруг своего центра скоростей P_2.

Скорость точки C определяется через угловую скорость стержня OC: $V_C = \omega_{OC}(r_1 + 2r_2 + r_3)$ = 16 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_C$ перпендикулярен стержню OC и направлен в сторону его вращения (см. рис. 2.10).

Построение мгновенного центра скоростей P_3 диска 3 по известным скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ показано на рис. 2.10. Его положение определяется из условия, что отношение скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, равно отношению расстояний от этих точек до мгновенного центра скоростей: $\frac{V_B}{V_C} = \frac{r_3 + CP_3}{CP_3}$. Разрешая пропорцию относительно неизвестной величины CP_3, получим: CP_3= 8 см. Скорость точки C выражается через угловую скорость диска 3 $V_C = \omega_3 \cdot CP_3$. Отсюда величина угловой скорости диска 3: $\omega_3 = \frac{V_C}{CP_3}$= 2 рад/с. Направление мгновенного вращения диска 3 вокруг своего центра скоростей определяется известными направлениями скоростей точек C и B, принадлежащих диску 3 (см. рис. 2.10). Скорость точки D $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$ = $=2 \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}$ = 16,5 см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ перпендикулярен отрезку DP_3 и направлен в сторону мгновенного вращения диска 3 вокруг центра P_3.

Для определения скорости поршня E воспользуемся теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны между собой. Проведем ось через точки D и E. По построению, угол α между вектором $\vec{V}_D$ и осью DE равен углу $\angle DP_3C$ (см. рис. 2.10). Тогда, $\cos\alpha = \frac{CP_3}{DP_3} = \frac{8}{\sqrt{2^2 + 8^2}} = 0{,}97$, откуда $\alpha = 14^\circ$. На основании теоремы о проекциях скоростей точек плоской фигуры имеем равенство: $V_D \cos\alpha = V_E \cos 0$, откуда скорость точки E: V_E=16 см/с.

Мгновенный центр скоростей стержня 4 – точка P_4 – определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$, восстановленных, соответственно, из точек D и E (см. рис. 2.10). Угловая скорость стержня 4, совершающего мгновенный поворот вокруг своего центра скоростей, равна: $\omega_4 = \dfrac{V_E}{EP_4}$, где EP_4 – расстояние от точки E до мгновенного центра скоростей звена 4, $EP_4 = DE \cdot \mathrm{ctg}\alpha$ = 40 см. В результате, $\omega_4 = 0{,}4$ рад/с. Направление мгновенного вращения звена 4 вокруг своего центра скоростей определяется направлением скорости точки D.

Задача 2. В плоском стержневом механизме (рис. 2.11) кривошипы OA и ED вращаются вокруг неподвижных центров O и E. В крайней точке D кривошипа ED к нему прикреплён шатун DB, второй конец которого в точке B прикреплён к кривошипу OA. Шатун AC прикреплён в точке A к кривошипу AO, а другим своим концом – к ползуну C, способному совершать только вертикальное движение. Все соединения шарнирные. В заданном положении механизма кривошип OA вертикален, шатун DB расположен горизонтально, кривошип ED наклонен под углом 60° к горизонтали, а шатун AC отклонён на угол 30° от вертикального положения кривошипа AO. Найти скорости всех отмеченных на схеме точек и угловые скорости всех звеньев, если линейные размеры звеньев механизма AC = 6 см, AB = 2 см, BO = 8 см, DB = 10 см и скорость ползуна в данный момент V_C = 4 см/с.

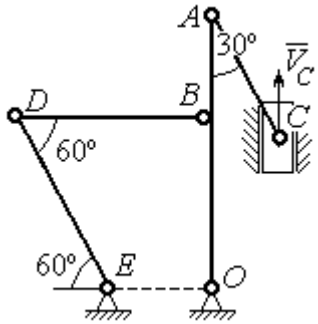


Рис. 2.11. Стержневой механизм

Решение

Кривошипы OA и ED совершают вращательные движения вокруг неподвижных центров. Скорости $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B перпендикулярны кривоши-

пу OA, а скорость $\vec{V}_D$ точки D перпендикулярна кривошипу ED. Направления векторов скоростей точек показаны на рис. 2.12.

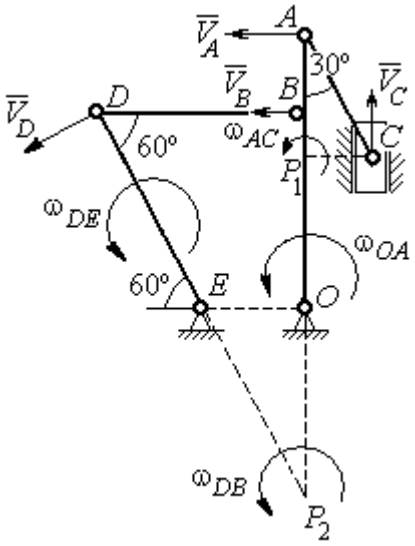


Рис. 2.12. Расчётная схема определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев

Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. Его мгновенный центр скоростей P_1 находится как точка пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$. Угловая скорость звена AC равна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{P_1C} = \dfrac{V_C}{AC \cdot \sin 30^\circ} = \dfrac{4}{3}$ рад/с. Далее, полагая, что точка A принадлежит шатуну AC, найдем её скорость:

$$V_A = \omega_{AC} \cdot P_1A = \frac{4}{3} AC \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ см/с.}$$

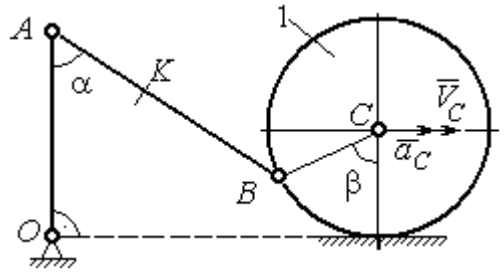
Теперь, исходя из того, что точка A принадлежит как шатуну AC, так и кривошипу OA, найдём его угловую скорость: $\omega_{AO} = \dfrac{V_A}{AO} = 0{,}4\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки B кривошипа $V_B = \omega_{AO} \cdot OB = 3{,}2\sqrt{3}$ см/с.

Шатун DB совершает плоскопараллельное движение. Зная направления скоростей точек B и D, построим мгновенный центр скоростей P_2 звена DB как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_D$ (см. рис. 2.12). Тогда, угловая скорость шатуна DB $\omega_{DB} = \dfrac{V_B}{P_2B} = \dfrac{3{,}2\sqrt{3}}{DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 0{,}32$ рад/с. Скорость точки D $V_D = \omega_{DB} \cdot P_2D = 0{,}32 \dfrac{DB}{\sin 30^\circ} = 6{,}4$ см/с. Угловая скорость кривошипа DE $\omega_{DE} = \dfrac{V_D}{DE} = \dfrac{6{,}4}{(OB / \sin 60^\circ)} = 0{,}69$ рад/с.

2.6. Задание К3. Определение ускорений точек твёрдого тела при плоскопараллельном движении

Для заданного положения плоского механизма определить ускорения точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев. Варианты заданий и исходные данные приведены на рис. 2.13 – 2.15.

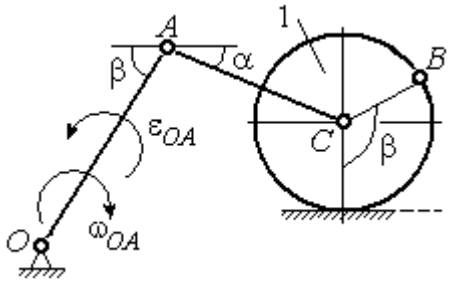
Варианты № 1, 11, 21



Найти: $a_A, a_K, \varepsilon_{AB}$

Номер варианта задания	AB, см	AK, см	α, град	β, град	R_1, см	V_C, см/с	a_C, см/с^2
1	16	10	60	120	10	12	6
11	20	16	30	60	8	10	8
21	18	10	60	180	6	8	4

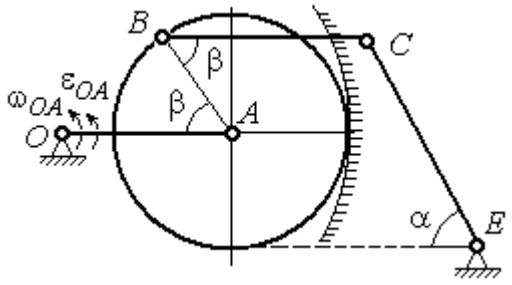
Варианты № 2, 12, 22



Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AC}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	AC, см	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
2	5	10	12	30	60	2	4
12	8	24	20	30	120	1	2
22	6	12	15	60	90	2	3

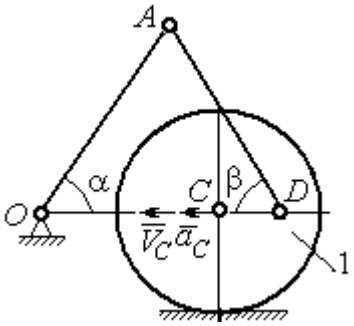
Варианты № 3, 13, 23



Найти: a_C, a_B, ε_{BC}

Номер варианта задания	BC, см	AO, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
3	16	15	60	90	10	2	3
13	18	12	90	60	8	3	2
23	14	12	30	120	10	2	4

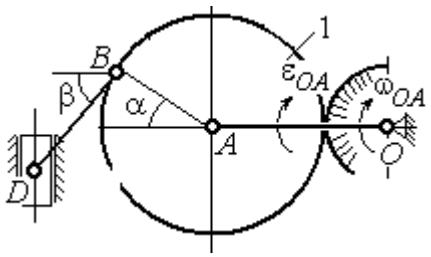
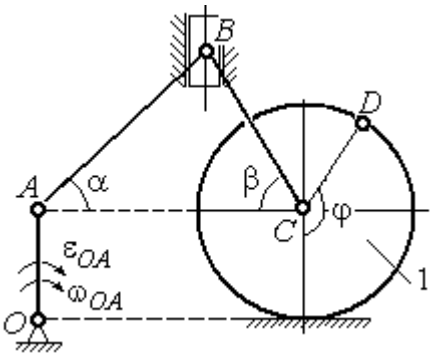
Варианты № 4, 14, 24



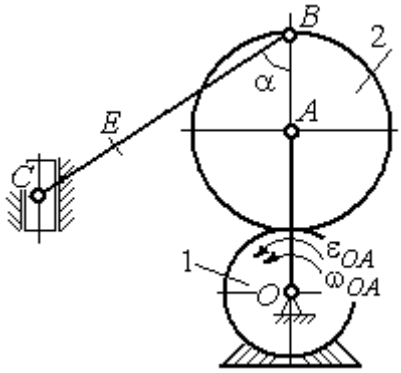
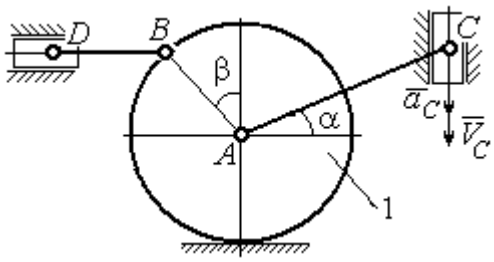
Найти: $a_A, a_D, \varepsilon_{DA}$

Номер варианта задания	R_1, см	OA, см	DC, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
4	10	28	5,78	60	30	10	2
14	8	24	4,62	30	90	8	3
24	6	20	6	45	45	12	2

Рис. 2.13. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
 Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$	 Найти: $a_B, a_D, \varepsilon_{BC}$

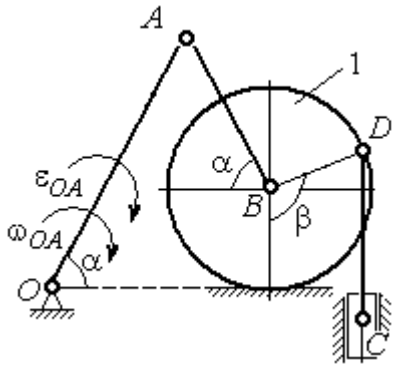
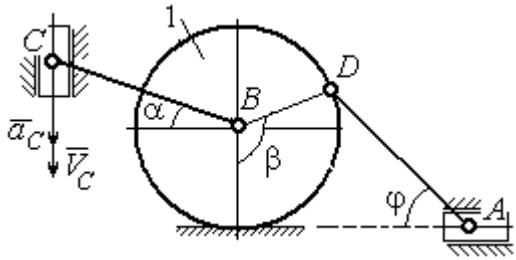
Номер варианта задания	*OA*, см	*BD*, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	*AB*, см	φ, град	α, град	β, град	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
5	16	10	60	30	10	4	3	**6**	6	18	60	30	30	2	3
15	18	8	90	45	12	2	4	**16**	8	20	90	60	30	2	4
25	14	12	30	60	8	3	2	**26**	5	16	120	30	60	3	4

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
 Найти: $a_E, a_C, \varepsilon_{BC}$	 Найти: $a_D, a_B, \varepsilon_{BD}$

Номер варианта задания	*BC*, см	*BE*, см	α, град	R_1, см	R_2, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	*BD*, см	*AC*, см	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
7	22	10	60	2	10	2	3	**8**	4	5	12	60	60	12	5
17	28	15	30	3	6	3	4	**18**	6	10	16	45	90	10	8
27	20	8	45	4	8	2	2	**28**	8	8	16	30	120	8	6

Рис. 2.14. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 5 – 8, 15 – 18, 25 – 28

Окончание вариантов задания К3

Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
 Найти: $a_C, a_B, \varepsilon_{AB}$	 Найти: $a_A, a_B, \varepsilon_{CB}$

Номер варианта задания	OA, см	DC, см	α, град	β, град	R_1, см	ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	Номер варианта задания	R_1, см	BC, см	φ, град	α, град	β, град	V_C, см/с	a_C, см/с^2
9	18	10	30	120	4	2	3	**10**	6	14	60	30	120	15	3
19	20	12	60	60	6	3	4	**20**	5	18	45	60	90	10	5
29	18	8	60	90	4	2	3	**30**	4	16	30	45	60	12	4

Рис. 2.15. Задание К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении. Номера вариантов задания 9 – 10, 19 – 20, 29 – 30

Примеры решения задания К3. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Задача 1. Ступенчатый барабан 1 с радиусами ступенек R = 0,5 м и r = 0,3 м катится окружностью малой ступеньки по горизонтальной поверхности без скольжения (рис. 2.16). Барабан приводится в движение шатуном AC, один конец которого соединён с центром барабана в точке A, а другой – с ползуном C, перемещающимся вертикально. В положении механизма, когда шатун AC отклонён от вертикали на угол 60°, найти ускорение точки B барабана, лежащей на его горизонтальном диаметре, если заданы скорость и ускорение ползуна C: V_C = 9м/с, a_C = 4 м/с^2.

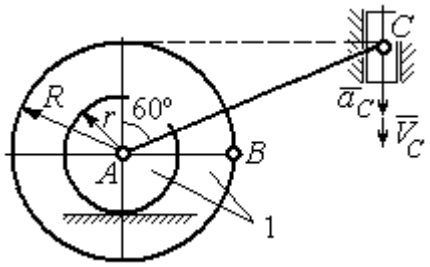


Рис. 2.16. Схема движения плоского механизма

Решение

Найдём угловые скорости ω_{AC}, ω_1 шатуна AC и барабана 1. Шатун совершает плоское движение. Его мгновенный центр скоростей P_2 находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_C$ (рис. 2.17). По условию, скорость точки C направлена вертикально вниз. Точка A принадлежит как шатуну AC, так и барабану 1. При качении барабана по горизонтальной поверхности скорость его центра – точки A параллельна поверхности качения барабана.

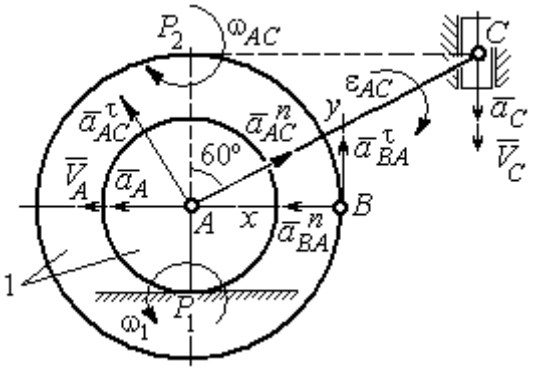


Рис. 2.17. Расчётная схема определения скоростей и ускорений точек механизма

Угловая скорость шатуна $\omega_{AC} = \dfrac{V_C}{CP_2} = \dfrac{9}{R\text{tg}60^\circ} = 6\sqrt{3}$ рад/с. Скорость точки A шатуна $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2 = 3\sqrt{3}$ м/с. Угловая скорость барабана 1 $\omega_1 = \dfrac{V_A}{AP_1} = 10\sqrt{3}$ рад/с.

При расчёте угловой скорости барабана учтено, что качение барабана по неподвижной поверхности представляет собой плоское движение, при котором мгновенный центр скоростей находится в точке касания с поверхностью (в точке P_1 на рис. 2.17).

Выразим ускорение $\vec{a}_A$ точки A через полюс C на основании векторного равенства: $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,\tau}_{AC} + \vec{a}^{\,n}_{AC}$, где $\vec{a}_C$ – ускорение точки C, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,\tau}_{AC}$, $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки A при вращении шатуна AC вокруг полюса C. Вектор нормального ускорения $\vec{a}^{\,n}_{AC}$ направлен вдоль шатуна AC от точки A к полюсу C и равен по величине $a^n_{AC} = \omega^2_{AC} \cdot AC = (6\sqrt{3})^2 \cdot 2R = 108$ м/с^2. Вектор касательного ускорения

$\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$, модуль которого вычисляется по формуле $a_{AC}^{\tau} = \varepsilon_{AC} \cdot AC$, направлен перпендикулярно отрезку AC.

На данном этапе величина вектора касательного ускорения не может быть вычислена, поскольку угловое ускорение шатуна AC ε_{AC} неизвестно. На рис. 2.17 направление вектора касательного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ выбрано из предположения, что вращение шатуна ускоренное и направление углового ускорения совпадает с направлением его угловой скорости.

Направление вектора $\vec{a}_A$ ускорения точки A определяется из того, что центр барабана движется по прямой, параллельной горизонтальной поверхности качения. На рис. 2.17 направление вектора ускорения $\vec{a}_A$ выбрано из предположения, что качение барабана ускоренное.

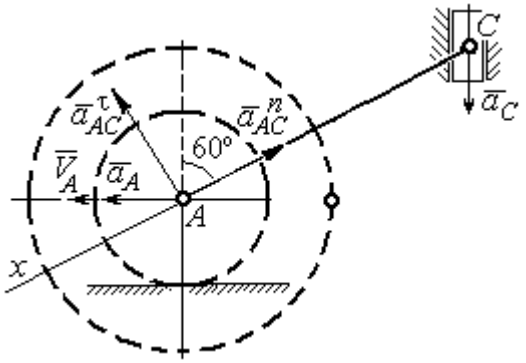


Рис. 2.18. Схема для определения ускорения центра барабана

Выберем ось x вдоль линии AC (рис. 2.18) и спроектируем векторное равенство $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^{\,\tau} + \vec{a}_{AC}^{\,n}$ на эту ось. При таком выборе оси проекция неизвестного ускорения $\vec{a}_{AC}^{\,\tau}$ обращается в нуль. Получим $a_A \cos 30^\circ = a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}$. Отсюда найдём ускорение центра барабана $a_A = \dfrac{1}{\cos 30^\circ}\left(a_C \cos 60^\circ - a_{AC}^{n}\right) = -\,122{,}4$ м/с^2. Отрицательное значение ускорения точки A означает, что на рис. 2.17, 2.18 вектор ускорения $\vec{a}_A$ должен иметь противоположное направление. Таким образом, вектор ускорения $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости $\vec{V}_A$, и движение барабана замедленное.

Для того чтобы найти ускорение точки B, выразим его через полюс A на основании векторного равенства $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение

точки A, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$, $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ – касательная и нормальная составляющие ускорения точки B при вращении барабана вокруг полюса A.

Модуль вектора нормального ускорения $\vec{a}_{BA}^{\,n}$ равен по величине $a_{BA}^{n} = \omega_1^2 \cdot BA = (10\sqrt{3})^2 \cdot R = 150$ м/с^2. Вектор направлен вдоль радиуса барабана от точки B к полюсу A (см. рис. 2.17).

Модуль вектора касательного ускорения $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ вычисляется по формуле $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot BA$, где ε_1 – угловое ускорение барабана. Значение углового ускорения катящегося барабана (в отличие от углового ускорения ε_{AC} шатуна AC) может быть найдено. Расчёт основан на том, что при движении барабана расстояние AP_1 от точки A до центра скоростей барабана P_1 остаётся постоянным, равным r. Тогда выражение $V_A = \omega_1 \cdot AP_1 = \omega_1 \cdot r$ для расчёта скорости точки A можно продифференцировать. Получим $\dfrac{dV_A}{dt} = \dfrac{d\omega_1}{dt} \cdot r$. Так как точка A движется по прямой, производная от скорости точки равна её полному ускорению, а производная от угловой скорости барабана равна его угловому ускорению. Тогда имеем: $a_A = \varepsilon_1 \cdot r$, откуда находим угловое ускорение $\varepsilon_1 = \dfrac{a_A}{r} = 40{,}8$ рад/с^2, а затем и модуль вектора касательного ускорения $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot BA = 20{,}4$ м/с^2.

Заметим, что для вычисления углового ускорения ε_{AC} шатуна AC подобные рассуждения неприменимы. Формулу $V_A = \omega_{AC} \cdot AP_2$ невозможно продифференцировать, так как при движении механизма расстояние AP_2 от точки A до центра скоростей P_2 шатуна AC является неизвестной функцией времени.

Выберем систему координат xBy как показано на рис. 2.17, и спроецируем на эти оси векторное равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n}$. Полагая, что движение барабана ускоренное (т. е. вектора ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^{\,\tau}$ направлены, как показано на рис. 2.17), получим значения составляющих ускорения точки B:

$a_{Bx} = a_A + a_{BA}^n$, $a_{By} = a_{BA}^\tau$. Подставляя значения ускорений, найдём $a_{By} = 20{,}4$ м/с^2, $a_{Bx} = -122{,}4 + 150 = 27{,}6$ м/с^2. Вектор полного ускорения точки B направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\vec{a}_{Bx}$, $\vec{a}_{By}$. Величина ускорения точки B: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 34{,}32$ м/с^2.

Задача 2. В плоском механизме (рис. 2.19) кривошип OA вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω_{OA} и угловым ускорением ε_{OA}. Диск 2, шарнирно присоединённый к кривошипу в точке A, катится без проскальзывания по неподвижному диску 1. Радиусы дисков R_1 и R_2. На краю диска 2 в точке B шарнирно прикреплен стержень BC, соединенный с центром C диска 3. Радиус диска 3 равен радиусу диска 2: $R_3 = R_2$. Диск 3 катится без скольжения по горизонтальной поверхности, по прямой. Для положения механизма, изображенного на рис. 2.19, определить ускорение точки D и угловое ускорение стержня BC, если $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2, $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см. Длина стержня $BC = 20$ см.

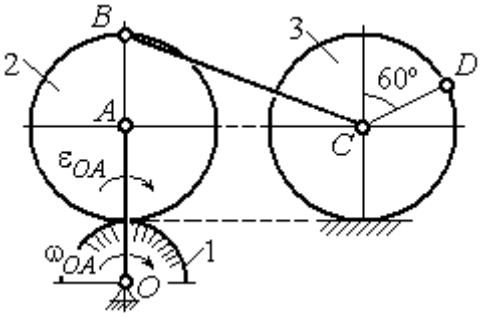


Рис. 2.19. Схема движения плоского механизма

Решение

Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Рассмотрим вращательное движение кривошипа OA. Скорость точки A: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 48$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону движения кривошипа (рис. 2.20).

При движении диска 2 точка P_2 соприкосновения второго диска с неподвижным первым является мгновенным центром скоростей диска 2. Угловая скорость диска 2: $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = \dfrac{48}{8} = 6$ рад/с.

Скорость точки B диска 2: $V_B = \omega_2 BP_2 = 6 \cdot 16 = 96$ см/с.

Для определения угловой скорости стержня BC заметим, что скорости двух точек стержня $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ параллельны, но точки B и C не лежат на общем перпендикуляре к скоростям. В этом случае мгновенный центр скоростей стержня BC отсутствует (бесконечно удалён), угловая скорость стержня равна нулю: $\omega_{BC} = 0$, а стержень совершает мгновенное поступательное движение. В результате имеем: $V_C = V_B = 96$ см/с.

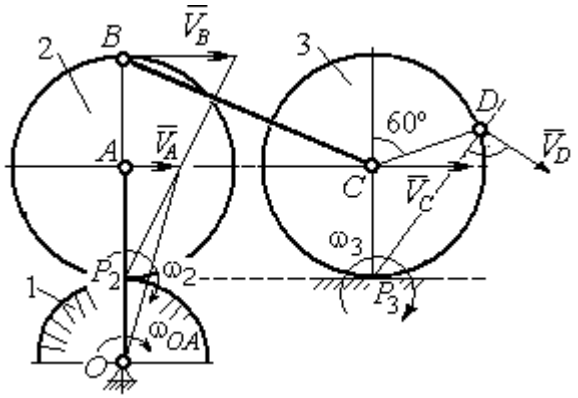


Рис. 2.20. Расчетная схема для определения угловых скоростей звеньев механизма

При качении диска 3 по неподвижной поверхности без проскальзывания точка P_3 касания его с поверхностью является мгновенным центром скоростей. Тогда угловая скорость диска 3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{CP_3} = 12$ рад/с. Скорость точки D диска 3: $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$. Величину DP_3 находим из треугольника P_3DC. В результате $DP_3 = 2R_3\cos 30^\circ = 13{,}8$ см и $V_D = 165{,}6$ см/с. Вектор скорости $\vec{V}_D$ направлен в сторону движения диска 3 перпендикулярно линии DP_3 и (см. рис. 2.20).

Определение ускорений точек механизма.

Представим ускорение $\vec{a}_C$ точки C векторной суммой $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,\tau}_{CB}$, где $\vec{a}_B$ – ускорение точки B, выбранной в качестве полюса; $\vec{a}^{\,n}_{CB}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{CB}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки C при вращении стержня BC вокруг полюса B, $a^n_{CB} = \omega^2_{CB} \cdot CB$, $a^{\tau}_{CB} = \varepsilon_{CB} \cdot CB$.

Нормальная составляющая ускорения точки C $a^n_{CB} = 0$, так как стержень CB совершает мгновенное поступательное движение и $\omega_{BC} = 0$.

Направление касательной составляющей $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ неизвестно, так как неизвестно направление углового ускорения стержня ε_{CB}. Для определённости выберем направление углового ускорения стержня BC в сторону против хода часовой стрелки. На рис. 2.21 это направление показано дуговой стрелкой ε_{CB}.

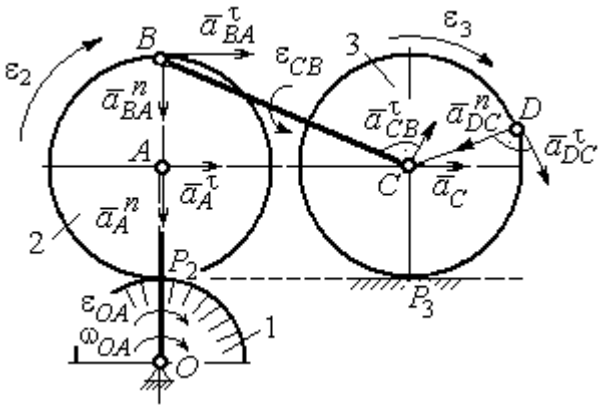


Рис. 2.21. Расчетная схема для определения ускорений точек механизма и угловых ускорений его звеньев

В соответствии с выбранным направлением углового ускорения вектор $\vec{a}^{\tau}_{CB}$ строится перпендикулярно линии стержня BC в сторону углового ускорения ε_{CB} (см. рис. 2.21).

Выразим ускорение точки B через полюс A: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$, где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса A; $\vec{a}^{n}_{BA}$, $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ – нормальная и касательная составляющие ускорения точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A. Величина нормальной составляющей ускорения точки B $a^{n}_{BA} = \omega_2^2 \cdot BA = 288$ см/с^2. Вектор $\vec{a}^{n}_{BA}$ направлен вдоль радиуса BA от точки B к полюсу A (см. рис. 2.21). Касательное ускорение точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A вычисляется по формуле $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 \cdot BA$. Для определения углового ускорения ε_2 диска 2 заметим, что во время движения диска 2 расстояние AP_2 остается постоянным, равным R_2. Дифференцируя равенство $V_A = \omega_2 \cdot AP_2 = \omega_2 R_2$, получим: $\frac{dV_A}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2$, или $a^{\tau}_A = \varepsilon_2 R_2$, откуда $\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_A}{R_2}$.

Для того чтобы найти величину a^{τ}_A, рассмотрим вращательное движение кривошипа OA вокруг неподвижной оси O. Ускорение точки A представляется в виде векторного равенства $\vec{a}_A = \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_A$, где $\vec{a}^{n}_A$ и $\vec{a}^{\tau}_A$ – известные

нормальная и касательная составляющие ускорения точки A кривошипа OA: $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 192$ см/с^2, $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 24$ см/с^2. Направления векторов нормального ускорения $\vec{a}_A^n$ и касательного ускорения $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. 2.21.

Теперь найдём величину углового ускорения диска 2 и модуль касательного ускорения a_{BA}^τ точки B при вращении диска 2 вокруг полюса A: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_A^\tau}{R_2} =$ $= 3$ рад/с^2, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BA = 24$ см/с^2.

Для определения ускорения точки C имеем векторное равенство $\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{CB}^\tau$. Выберем оси Cx, Cy, как показано на рис. 2.22, – вдоль отрезка BC и перпендикулярно ему и спроецируем на них имеющееся векторное равенство. Получим:

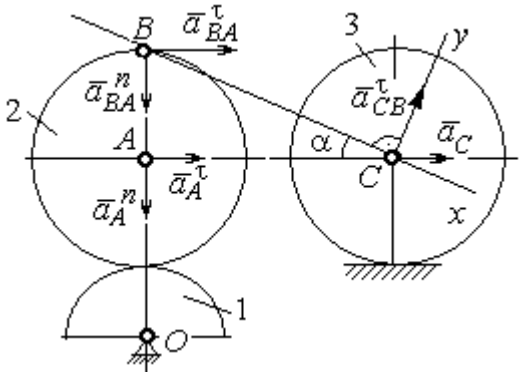


Рис. 2.22. Расчетная схема для вычисления ускорения точки С

$$a_C \cos\alpha = a_A^n \sin\alpha + a_A^\tau \cos\alpha + a_{BA}^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\alpha;$$

$$a_C \sin\alpha = a_A^n \cos\alpha + a_A^\tau \sin\alpha + a_{BA}^n \cos\alpha + a_{BA}^\tau \sin\alpha + a_{CB}^\tau,$$

где α – угол между стержнем BC и линией центров AC; $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = 0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}92$. Решая систему, найдём: $a_C = 256{,}7$ см/с^2, $a_{CB}^\tau = -358{,}12$ см/с^2.

Модуль углового ускорения стержня BC: $\varepsilon_{CB} = \dfrac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = 17{,}9$ рад/с^2.

Знак «минус» величины a_{CB}^τ означает, что вектор касательного ускорения $\vec{a}_{CB}^\tau$ на рис. 2.21 – 2.22 следует направить в противоположную сторону. Направление углового ускорения стержня BC, показанное на рис. 2.21 дуговой стрелкой ε_{CB}, также следует заменить на противоположное.

Выразим ускорение точки D через полюс C: $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,n}_{DC} + \vec{a}^{\,\tau}_{DC}$, где $\vec{a}_C$ – известное ускорение точки C; $\vec{a}^{\,n}_{DC}$, $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ – нормальное и касательное составляющие ускорения точки D при вращении диска 3 вокруг полюса C. Величина нормального ускорения точки D: $a^n_{DC} = \omega_3^2 \cdot DC = 1152$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}^{\,n}_{DC}$ направлен по радиусу от точки D к полюсу C (рис. 2.23).

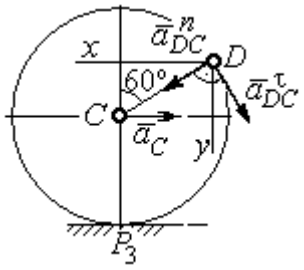


Рис.2.23. Расчетная схема для определения ускорения точки D

Для расчёта касательной составляющей a^{τ}_{DC} ускорения точки D найдём угловое ускорение диска 3. Продифференцируем по времени равенство $V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = \omega_3 R_3$. Получим: $\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} R_3$, или $a_C = \varepsilon_3 R_3$. Угловое ускорение диска 3: $\varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = 32{,}09$ рад/с^2. Тогда величина касательной составляющей ускорения точки D: $a^{\tau}_{DC} = \varepsilon_3 \cdot DC = 256{,}7$ см/с^2. Направление вектора $\vec{a}^{\,\tau}_{DC}$ соответствует ускоренному движению диска 3.

Проведём оси Dx и Dy, как показано на рис. 2.23, и спроецируем векторное равенство ускорения точки D на оси:

$$a_{Dx} = -a_C + a^n_{DC}\cos 30^\circ - a^{\tau}_{DC}\cos 60^\circ, \quad a_{Dy} = a^n_{DC}\cos 60^\circ + a^{\tau}_{DC}\cos 30^\circ.$$

Решая систему, находим значения проекций модуля ускорения $a_{Dx} = 612{,}5$ см/с^2, $a_{Dy} = 798{,}3$ см/с^2. Величина ускорения точки D:

$$a_D = \sqrt{a^2_{Dx} + a^2_{Dy}} = 1006{,}2 \text{ см/с}^2.$$

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Основные понятия сложного движения точки

В неподвижной системе координат рассматривается подвижное твердое тело и точка, перемещающаяся относительно тела.

Траектория точки в её движении относительно тела называется **относительной траекторией.** Скорость точки в этом движении называют **относительной скоростью**, ускорение – **относительным ускорением**.

Траектория точки, перемещающейся вместе с телом, называется переносной траекторией точки, скорость точки при таком её движении – **переносной скоростью**, а ускорение – **переносным ускорением**.

Суммарное движение точки вместе с телом и относительно тела называется **сложным движением**. Траектория точки относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной траекторией точки**, скорость и ускорение – **абсолютной скоростью и абсолютным ускорением.**

При вычислении абсолютной скорости используется теорема о сложении скоростей: **при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:** $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $\vec{V}$, $\vec{V}_e$, $\vec{V}_r$ – вектора абсолютной, переносной и относительной скоростей точки.

В случае, когда относительное движение точки задается естественным способом в виде закона изменения пути $S = S(t)$, величина относительной скорости точки равна модулю производной: $V_r = \left|\dot{S}_r\right|$. Если переносное движение точки есть вращение тела вокруг неподвижной оси, скорость точки в переносном движении будет: $V_e = \omega_e h_e$, где ω_e – величина угловой скорости вращения тела; h_e – кратчайшее расстояние от места положения точки на теле до оси вращения тела.

При вычислении абсолютного ускорения используется теорема Кориолиса о сложении ускорений: **при сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и ускорения Кориолиса** $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к$, где $\vec{a}$ – вектор абсолютного ускорения точки; $\vec{a}_e, \vec{a}_r$ – вектора соответственно переносного и относительного ускорений точки; $\vec{a}_к$ – вектор ускорения Кориолиса. (Иногда его называют поворотным ускорением.)

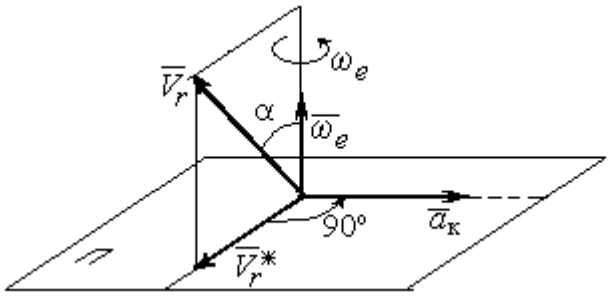


Рис. 3.1. Определение направления ускорения Кориолиса по правилу Жуковского

Вектор ускорения Кориолиса определяется векторным произведением $\vec{a}_к = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$, где $\vec{\omega}_e$ – вектор угловой скорости переносного движения; $\vec{V}_r$ – вектор относительной скорости точки. Модуль ускорения Кориолиса: $|\vec{a}_к| = 2|\vec{\omega}_e| \cdot |\vec{V}_r| \sin\alpha$, где α – угол между вектором угловой скорости переносного движения и вектором относительной скорости точки (см. рис. 3.1). Направление вектора ускорения Кориолиса может быть получено по правилу построения вектора векторного произведения.

На рис. 3.1 показана последовательность выбора направления вектора ускорения Кориолиса по правилу Н. Е. Жуковского. Правило состоит в следующем: пусть имеется точка, движущаяся с относительной скоростью $\vec{V}_r$. Построим плоскость П, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, и спроецируем вектор $\vec{V}_r$ на эту плоскость. Проекцию обозначим $\vec{V}_r^*$ (см. рис. 3.1). Чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости $\vec{V}_r^*$ повернуть на 90° в плоскости П вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Если сложное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, направление ускорения Кориолиса можно получить простым поворотом вектора относительной скорости на угол 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ представляется как сумма векторов относительного касательного $\vec{a}_r^{\tau}$ и относительного нормального $\vec{a}_r^{n}$ ускорений: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$. Переносное ускорение точки $\vec{a}_e$ тела имеет своими составляющими переносное касательное $\vec{a}_e^{\tau}$ и переносное нормальное $\vec{a}_e^{n}$ ускорения так, что $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n}$.

Таким образом, абсолютное ускорение точки в сложном движении можно представить в виде векторного равенства

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{\tau} + \vec{a}_e^{n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Модули относительного касательного и относительного нормального ускорений при естественном способе задания относительного движения точки равны: $a_r^{\tau} = \left|\dot{V}_r\right|$, $a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны относительной траектории. При движении точки по окружности радиус кривизны равен радиусу окружности, при движении по прямой – бесконечности, и в этом случае $a_r^{n} = 0$.

При вращательном переносном движении точки значения переносного касательного и нормального ускорений вычисляются по формулам: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e h_e$, $a_e^{n} = \omega_e^2 h_e$, где ε_e – угловое ускорение вращательного переносного движения, $\varepsilon_e = \left|\dot{\omega}_e\right|$; h_e – расстояние от точки до оси вращения тела; ω_e – величина угловой скорости вращения тела.

Вектора ускорений строятся по общим правилам построения векторов нормального и касательного ускорений.

При поступательном переносном движении ускорение Кориолиса и переносное нормальное ускорение равны нулю: $a_{\text{к}} = 0,\ a_e^n = 0$. Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении можно представить в виде векторного равенства $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}$.

3.2. Задание К4. Определение скорости и ускорения точки при сложном движении

Задание включает две задачи с вращательным и поступательным видами переносного движения точки.

Задача 1. Вращение тела относительно неподвижной оси задается законом изменения угла поворота: $\varphi_e = \varphi_e(t)$ или законом изменения его угловой скорости: $\omega_e = \omega_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = S_r = S_r(t)$.

Определить абсолютные скорость и ускорение точки в заданный момент времени t_1.

Задача 2. Поступательное движение тела, несущего точку, задается законом изменения координаты $x_e = x_e(t)$. Движение точки относительно тела отсчитывается от её начального положения в точке C и задается законом изменения длины дуги окружности или отрезка прямой линии: $CM = y_r = y_r(t)$.

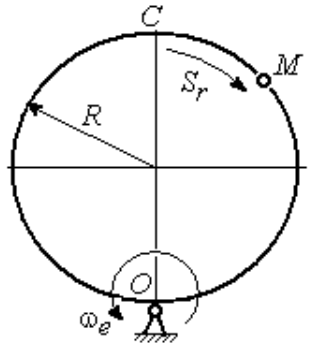
Определить абсолютные скорость и ускорение точки в момент времени t_2, который либо задаётся в исходных данных задачи, либо на схемеописаны условия, из которых он находится.

Номера вариантов заданий даны на рис. 3.2 – 3.5.

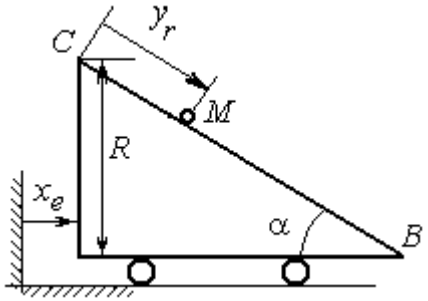
Варианты исходных данных приведены в табл. 3.1.

Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



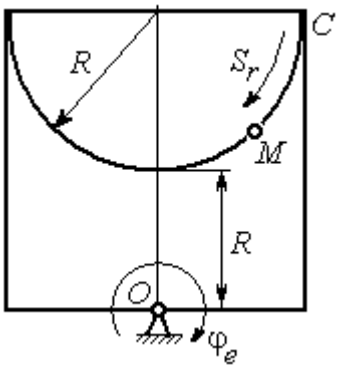
Задача 2



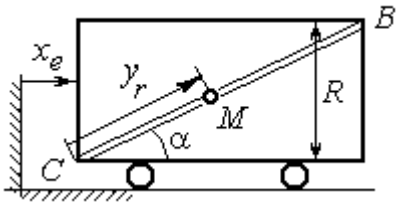
В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути CB

Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



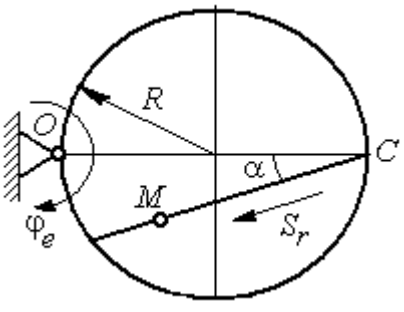
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла 2/3 пути CB

Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



Задача 2

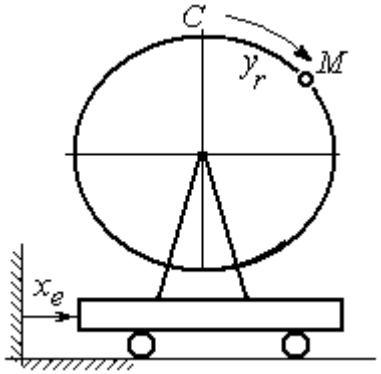
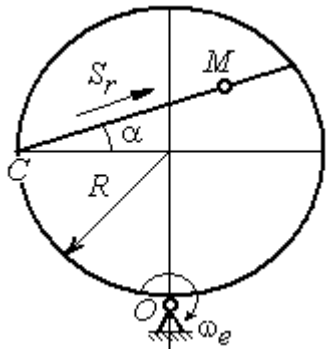


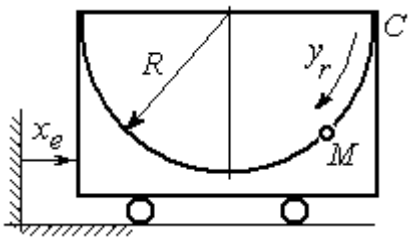
Рис. 3.2. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

Варианты № 4, 14, 24

Задача 1

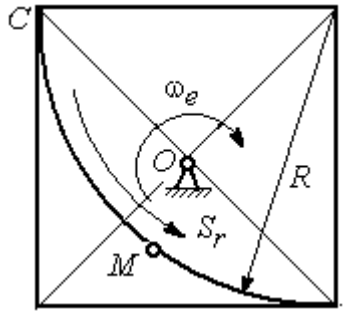


Задача 2

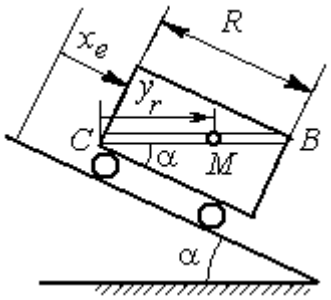


Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



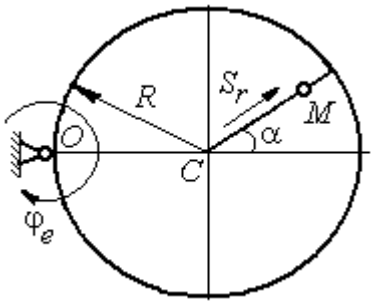
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла путь CB

Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Задача 2

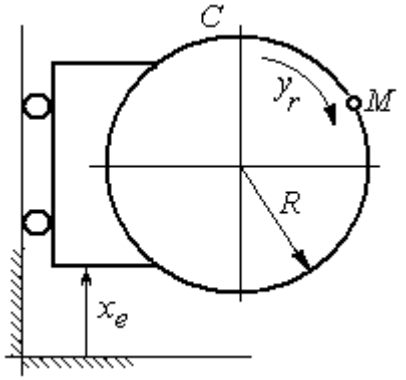
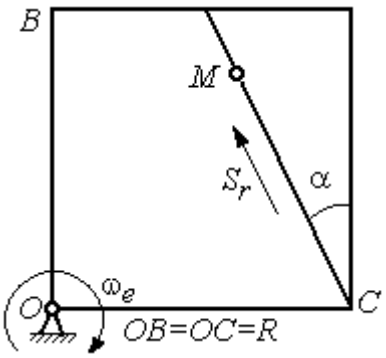


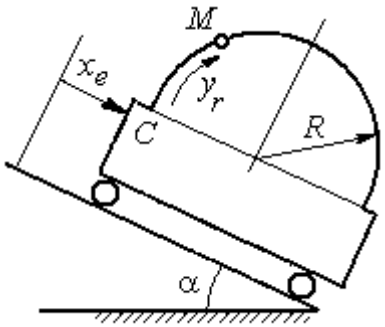
Рис. 3.3. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

Варианты № 7, 17, 27

Задача 1

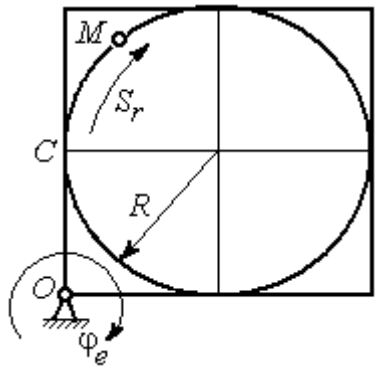


Задача 2

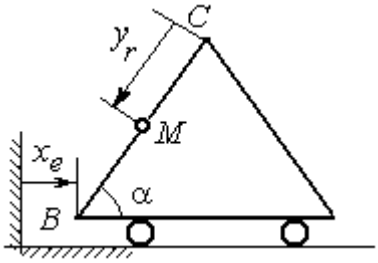


Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



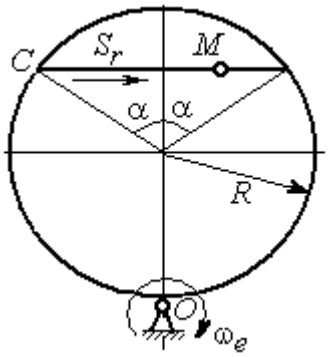
Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Задача 2

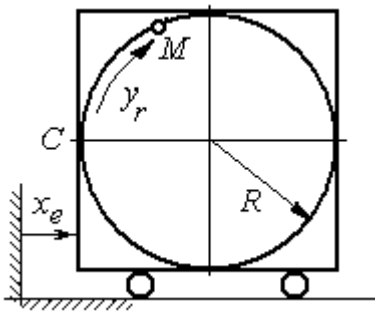
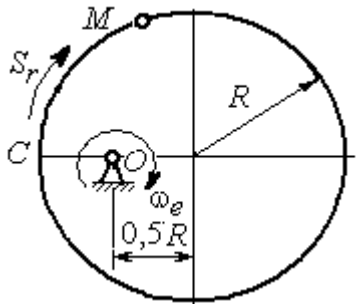


Рис. 3.4. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

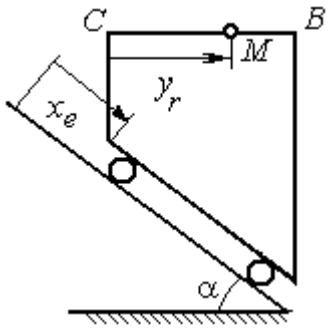
Окончание вариантов задания К4

Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



Задача 2



В момент $t = t_2$ точка M прошла половину пути $CB = R$

Рис. 3.5. Задание К4. Сложное движение точки.
Номера вариантов задания 10, 20, 30

Таблица 3.1

Исходные данные для заданий по сложному движению точки

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
1	1	3	–	$S_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 4t^2$	1
	2	4	30	$y_r = 4t^2$	$x_e = 2\cos(\pi t/6)$	–
2	1	2	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	3	60	$y_r = t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
3	1	4	30	$S_r = 2\sqrt{3}[t + \sin(\pi t/2)]$	$\varphi_e = 4t - t^2$	1
	2	6	–	$y_r = \pi[2t + \sin\pi t]$	$x_e = 5t - t^2$	1
4	1	4	60	$S_r = 2(t^3 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	–	$y_r = \pi[2t + \cos(\pi t/2)]$	$x_e = t^3 - 4t$	1
5	1	6	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/6)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/3)$	1
	2	2	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = t^2 - 4t$	–
6	1	6	60	$S_r = t + 10\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t^2 - 5t$	1
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = [1 - \cos(\pi t/4)]$	1
7	1	8	30	$S_r = 2(t^3 + 3t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	4	30	$y_r = 2\pi t^2$	$x_e = t^3 - 5t$	1

Продолжение табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
8	1	8	–	$S_r = 2\pi\left[t^2 + \sin\pi t\right]$	$\varphi_e = t^2 - 5t$	2
	2	6	30	$y_r = t(t+1)$	$x_e = \cos\pi t$	–
9	1	8	30	$S_r = 2t^2$	$\omega_e = \cos(\pi t/8)$	2
	2	3	–	$y_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$x_e = (3-2t)^2$	1
10	1	6	–	$S_r = \pi(2t^3 + \sin\pi t)$	$\omega_e = 5t - 2t^3$	1
	2	4	30	$y_r = t^2 + 2t$	$x_e = 1 + \cos\pi t$	–
11	1	6	–	$S_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	60	$y_r = 4\sin\pi t$	$x_e = t^2 - 2t$	–
12	1	18	–	$S_r = \pi(2t^2 + 2t)$	$\varphi_e(t) = 3t - t^2$	2
	2	6	30	$y_r = 2t^2 + t$	$x_e = 1 + \cos(\pi t)$	–
13	1	10	60	$S_r = t^3 + t$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = t(t+1)$	1
14	1	4	30	$S_r = 8\sqrt{3}\sin(\pi t/12)$	$\omega_e = (3-2t)^2$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sin(\pi t/6)$	$x_e = 2t^2 - 5t$	1
15	1	8	–	$S_r = 4\pi\sin^2(\pi t/4)$	$\omega_e = 2 + \cos(\pi t/4)$	1
	2	5	60	$y_r = 5t + t^2$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	–
16	1	12	90	$S_r = 3\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\varphi_e = 2t - 3t^2$	1
	2	15	–	$y_r = \pi(4t + t^2)$	$x_e = 6\sin(\pi t/3)$	1
17	1	6	45	$S_r = 3\sqrt{2}\left[t^2 + 2\sin\pi t\right]$	$\omega_e(t) = 4t^2 - 6$	1
	2	6	60	$y_r = 8\pi\sin(\pi t/12)$	$x_e = \sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	2
18	1	8	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = 18t - 4t^2$	2
	2	8	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \sin\pi t$	–
19	1	8	60	$S_r = 2\sqrt{3}\left[t + \sin(\pi t/2)\right]$	$\omega_e = 5t - t^2$	1
	2	9	–	$y_r = 6\pi\cos(\pi t/3)$	$x_e = \cos(\pi t/6)$	1
20	1	4	–	$S_r = 4\pi\sin(\pi t/6)$	$\omega_e = 3t - 5$	1
	2	6	60	$y_r = 3t + 2t^2$	$x_e = \pi\sin\pi t$	–
21	1	3	–	$S_r = 4\pi\sqrt{2}\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = 6t - 14$	2
	2	8	45	$y_r = (t^2 + 3t)$	$x_e = t + 2\sin\pi t$	–

Окончание табл. 3.1

Номер варианта задания	Номер задачи	R, см	α, град	$C\breve{M} = S_r(t)$, см $C\breve{M} = y_r(t)$, см	$\varphi_e(t)$, рад; $\omega_e(t)$, рад/с $x_e(t)$, см	t_1, с t_2, с
22	1	4	–	$S_r = 2\pi(t^2 + 2t)$	$\varphi_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	9	60	$y_r = 8\sin\pi t$	$x_e = 5t - t^2$	–
23	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\varphi_e = t^2 + \cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = 6\pi[t + \sin(\pi t/6)]$	$x_e = 5t - t^2$	1
24	1	6	45	$S_r = 12\sin(\pi t/8)$	$\omega_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	2
	2	6	–	$y_r = \pi(t^2 + 2t)$	$x_e = 6\cos(\pi t/6)$	1
25	1	6	–	$S_r = 2\pi t^2$	$\omega_e = 3\sin(\pi t/3)$	1
	2	4	45	$y_r = 2t(t + 3t)$	$x_e = 2(t^3 - 3t)$	–
26	1	6	120	$S_r = t^2 + t$	$\varphi_e = 12\cos(\pi t/12)$	2
	2	9	–	$y_r = \pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 2(t^2 - 3t)$	1
27	1	10	60	$S_r = \sqrt{3}(t^2 + t)$	$\omega_e = 6\cos(\pi t/6)$	2
	2	9	30	$y_r = \sqrt{3}\pi\sin(\pi t/3)$	$x_e = t + 4\cos(\pi t/4)$	1
28	1	2	–	$S_r = 6\pi\sin(\pi t/6)$	$\varphi_e = 2t + \cos(\pi t/2)$	1
	2	6		$y_r = 2t + 3t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–
29	1	8	30	$S_r = (t^2 + 2t)$	$\omega_e = 6\sin(\pi t/12)$	2
	2	3	–	$y_r = 2\pi\sqrt{3}\sin(\pi t/3)$	$x_e = 5t - t^2$	1
30	1	2	–	$\pi(t^2 + 2t)$	$\omega_e(t) = 6\cos(\pi t/6)$	1
	2	3	60	$y_r = t + t^2$	$x_e = t + \sin\pi t$	–

Пример выполнения задания К4. Сложное движение точки

Задача 1. Фигура, состоящая из половины диска и равнобедренного треугольника (рис. 3.6), вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через вершину A треугольника. Вращательное движение задается законом изменения угла поворота фигуры $\varphi_e = 5t - 2t^2$ рад.

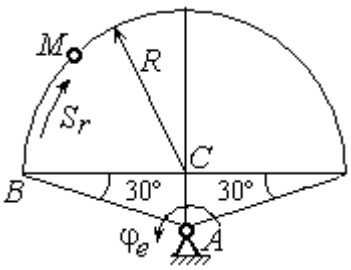


Рис. 3.6. Схема сложного движения точки

Положительное направление вращения отмечено на схеме дуговой стрелкой φ_e. По ободу диска от точки *B* движется точка *M*. Движение точки относительно диска задается законом изменения длины дуги окружности: $\overset{\cup}{BM} = S_r = 9\pi t^2$ см. Положительное направление движения точки *M* на рис. 3.6 показано дуговой стрелкой S_r. Радиус диска $R = 9$ см.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Вращение фигуры будет для точки *M* переносным движением. Относительное движение точки *M* – её движение по окружности обода диска.

Для определения **положения точки** *M* на ободе диска вычислим расстояние, которое она прошла на заданный момент времени. Длина дуги окружности, пройденной точкой за 1 с: $S_r(1) = 9\pi$ см. Положение точки *M* определяется центральным углом $\alpha = \dfrac{S_r(1)}{R} = \dfrac{9\pi}{9} = \pi$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.7 точкой M_1.

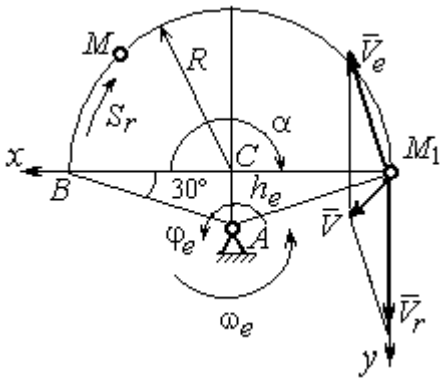


Рис. 3.7. Расчетная схема для вычисления абсолютной скорости точки при сложном движении

Для определения **скорости переносного движения** точки вычисляем значение производной: $\dot{\varphi}_e = 5 - 4t$. Угловая скорость вращения фигуры: $\omega_e = |\dot{\varphi}_e|$. При $t_1 = 1$ с $\dot{\varphi}_e(1) = 1$ рад/с. Положительная величина производной $\dot{\varphi}_e(1)$ показывает, что вращение фигуры в данный момент происходит в положительном направлении, что отмечено дуговой стрелкой ω_e на рис. 3.7.

В момент времени $t_1 = 1$ с точка *M* находится в положении M_1. Скорость V_e переносного движения точки в момент времени $t_1 = 1$ с $V_e(1) = \omega_e(1)h_e$, где

расстояние от точки M_1 до оси вращения фигуры $h_e = AM_1 = \dfrac{R}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}$ см.

Тогда $V_e(1) = 6\sqrt{3}$ см/с.

Вектор скорости переносного движения точки $\vec{V}_e$ перпендикулярен линии AM_1 и направлен в сторону вращения фигуры (см. рис. 3.7).

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги *BM*. В этом случае **скорость относительного движения** точки $V_r = \left|\dot{S}_r\right| = \left|18\pi t\right|$. При t_1 = 1 с $V_r(1) = \left|\dot{S}_r(1)\right| = 18\pi$ = 56,5 см/с. Положительное значение производной $\dot{S}_r(1)$ указывает, что относительное движение точки в положении M_1 происходит в положительном направлении, указанном на рис. 3.7 дуговой стрелкой S_r. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости точки в положении M_1 направлен по касательной к траектории относительного движения в сторону положительного направления движения (см. рис. 3.7).

Абсолютную скорость точки находим по теореме сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Направление вектора абсолютной скорости, полученное по правилу сложения векторов, показано на рис. 3.5. Для определения величины абсолютной скорости выбираем прямоугольные оси координат M_1xy (см. рис. 3.7) и проецируем обе части векторного равенства теоремы сложения скоростей на эти оси. Получим:

$$V_x = V_e \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} = 5{,}2 \text{ см/с};$$

$$V_y = -V_e \cos 30^\circ + V_r = -6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 56{,}5 = 29{,}5 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютной скорости: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5{,}2^2 + 29{,}5^2} = 29{,}95$ см/с.

Абсолютное ускорение точки определяем по теореме Кориолиса, которая при вращательном переносном движении имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Относительное касательное ускорение a_r^τ вычисляется по формуле: $a_r^\tau = \left|\ddot{S}_r\right|$. По условию задачи вторая производная $\ddot{S}_r = 18\pi$ = 56,5 см/с^2 – постоянная величина. Так как значение второй производной $\ddot{S}_r$ положительно, вектор ускорения $\vec{a}_r^\tau$ направлен по касательной к траектории относительного движения в точке M_1 в сторону положительного направления относительного движения, отмеченного дуговой стрелкой S_r.

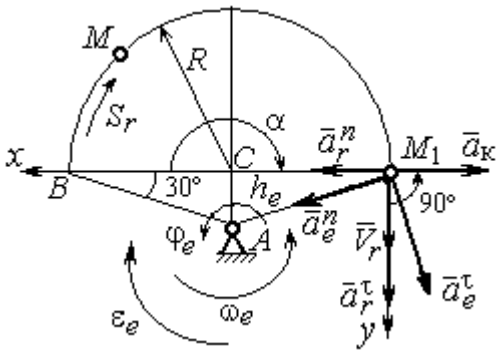


Рис. 3.8. Расчетная схема для определения абсолютного ускорения точки

Относительное нормальное ускорение точки вычисляется по формуле $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$ и в момент $t_1 = 1$ с равно: $a_r^n(1) = \dfrac{V_r^2(1)}{R} = \dfrac{(18\pi)^2}{9} = 355{,}3$ см/с^2. Вектор ускорения $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу диска к центру C (см. рис. 3.8).

Переносное касательное ускорение вычисляется по формуле: $a_e^\tau = \varepsilon_e h_e$, где угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right|$. Вычислим производную $\ddot{\varphi}_e = -4$ рад/с^2. Угловое ускорение $\varepsilon_e = \left|\ddot{\varphi}_e\right| = 4$ рад/с^2 постоянно и не зависит от времени.

Отрицательное значение производной $\ddot{\varphi}_e < 0$ при условии, что расчетная величина угловой скорости положительна: $\dot{\varphi}_e > 0$, означает, что вращательное движение замедленное и переносное угловое ускорение ε_e направлено в сторону, противоположную направлению вращения.

Вектор $\vec{a}_e^\tau$ переносного касательного ускорения точки в её положении M_1 перпендикулярен линии AM_1 и направлен противоположно вектору переносной скорости $\vec{V}_e$ (см. рис. 3.8). Модуль переносного касательного ускорения: $a_e^\tau = a_e^\tau = \varepsilon_e h_e = 24\sqrt{3} = 41{,}6$ см/с^2.

Переносное нормальное ускорение a_e^n рассчитывается по формуле: $a_e^n = \omega_e^2 h_e$ и в момент времени $t_1 = 1$ с $a_e^n(1) = \omega_e^2(1)h_e = 6\sqrt{3} = 10{,}4$ см/с^2. Вектор переносного нормального ускорения $\vec{a}_e^n$ направлен по линии AM_1 к оси вращения (см. рис. 3.8).

По условию задачи вектор скорости относительного движения точки $\vec{V}_r$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то есть перпендикулярен вектору угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$. Тогда модуль **ускорения Кориолиса** при $t_1 = 1$ с $a_к = 2\omega_e V_r = 2 \cdot 1 \cdot 18\pi = 113{,}1$ см/с^2.

Так как вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$, то по правилу Жуковского для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор относительной скорости точки $\vec{V}_r$ на 90° в сторону переносного движения вокруг оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку M_1 (см. рис. 3.8). Для определения абсолютного ускорения спроецируем на прямоугольные оси xM_1y (см. рис. 3.8) векторное равенство $\vec{a} = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_к$. Получим: $a_y = a_e^{\tau}\cos 30^\circ + a_e^n \cos 60^\circ + a_r^{\tau} = 97{,}9$ см/с^2, $a_x = -a_e^{\tau}\cos 60^\circ + a_e^n \cos 30^\circ + a_r^n - a_к = 228{,}4$ см/с^2. Модуль абсолютного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 248{,}5$ см/с^2.

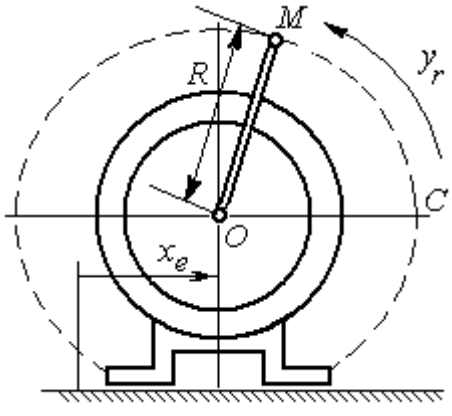


Рис. 3.9. Схема движения точки стержня, укреплённого на электромоторе

Задача 2. К вращающемуся валу электромотора прикреплён стержень OM длины $R = 6$ см. Во время работы электромотора точка M стержня из начального положения C перемещается по дуге окружности согласно уравнению $CM = y_r = \pi t^2$ см. При этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону

$x_e = 5\sin(\pi t/3)$ см. Определить абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Точка M совершает сложное движение – относительно электромотора и вместе с ним. Относительным движением точки будет её движение по дуге окружности радиуса R, переносным – поступательное горизонтальное, прямолинейное движение электромотора.

Найдём положение точки относительно электродвигателя в заданный момент времени. Угол α, отсчитываемый стержнем OM от начального положения OC, в момент времени $t_1 = 1$ с составляет $\alpha = \dfrac{y_r(t_1)}{R} = \dfrac{\pi}{6} = 30°$. Положение точки в момент времени $t_1 = 1$ с отмечено на рис. 3.10 буквой M_1.

Относительное движение точки задано естественным способом, как закон изменения длины дуги. Относительная скорость $V_r = \dot{y}_r = 2\pi t$. В момент времени $t_1 = 1$ с V_r= 6,28 см/с. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен перпендикулярно стержню OM_1.

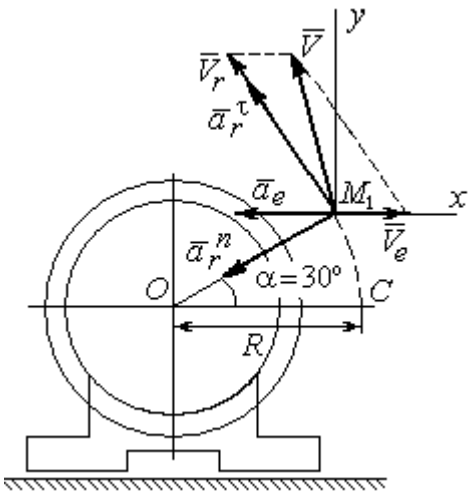


Рис. 3.10. Расчётная схема вычисления абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Скорость точки в переносном движении – это скорость горизонтального движения электродвигателя:

$$V_e = \dot{x}_e = \frac{5\pi}{3}\cos(\pi t/3).$$

В момент времени $t_1 = 1$с $V_e = \dfrac{5\pi}{3}\cos 60^\circ$ = 2,62 см/с. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости точки M направлен параллельно линии движения электродвигателя (см. рис. 3.10).

Абсолютная скорость точки определяется на основании теоремы сложения скоростей при сложном движении: $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Для того чтобы найти величину абсолютной скорости, выберем оси xM_1y, как показано на рис. 3.10, и спроецируем векторное равенство сложения скоростей на эти оси. Получим: $V_{Mx} = V_e - V_r\cos 60^\circ = -0{,}52$ см/с (проекция направлена в отрицательную сторону оси x), $V_{My} = V_r\cos 30^\circ = 5{,}44$ см/с. Модуль абсолютной скорости $V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = 5{,}46$ см/с. Вектор абсолютной скорости направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

При поступательном переносном движении точки $\omega_e = 0$ и потому $a_к = 0$. Относительное ускорение точки при движении по окружности раскладывается на две составляющие $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$, направленные вдоль стержня OM и перпендикулярно ему. Кроме того, при прямолинейном относительном движении $a_e^n = 0$. В результате, теорема о сложении ускорений принимает вид $\vec{a}_M = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e$, где модули векторов вычисляются по формулам $a_r^{\tau} = \dot{V}_r$, $a_r^n = \dfrac{V_r^2}{R}$, $a_e = a_e^{\tau} = \dot{V}_e = -\dfrac{5\pi^2}{9}\sin(\pi t/3)$ и в момент времени $t_1 = 1$с равны $a_r^{\tau} = 6{,}28$ см/с^2, $a_r^n = 6{,}57$ см/с^2, $a_e = -4{,}75$ см/с^2. Направления векторов ускорений показаны на рис. 3.10. Для вычисления модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство сложения ускорений на оси выбранной ранее системы координат xM_1y. Получим:

$$a_{Mx} = -a_r^{\tau}\cos 60^\circ - a_r^n\cos 30^\circ - a_e = -4{,}08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_r^{\tau}\cos 30^\circ - a_r^n\cos 60^\circ = 2{,}15 \text{ см/с}^2.$$

Величина абсолютного ускорения $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 4{,}61$ см/с^2.

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ

4.1. Дифференциальные уравнения движения точки

Движение точки под действием системы сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_K$ в прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* описывается **дифференциальными уравнениями:** $m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$ или, обозначая вторые производные от координат по времени двумя точками, уравнениями: $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$, $m\ddot{y} = \sum F_{ky}$, $m\ddot{z} = \sum F_{kz}$, где m – масса точки; x, y, z – текущие координаты точки; $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции вектора ускорения точки на оси координат; $\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$, $\sum F_{kz}$ – алгебраические суммы проекций сил на оси координат.

Интегрирование дифференциальных уравнений производится в зависимости от их вида методами, известными из курса математики.

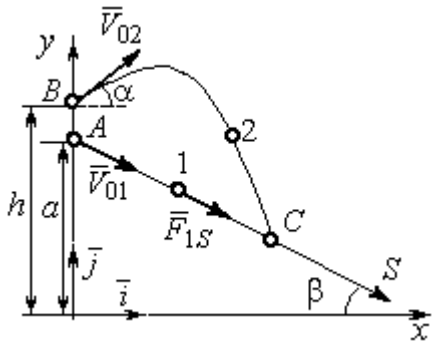
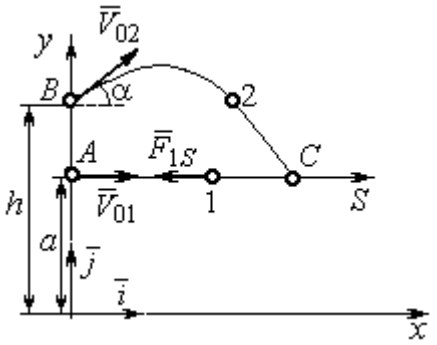
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

Две материальные точки движутся в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой m_1, получив в начальном положении *A* скорость V_{01}, движется вдоль гладкой оси *AS*, наклоненной под углом β к горизонту. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_1$, направленная вдоль оси *AS*. Направление вектора проекции силы на ось $\vec{F}_{1S}$ показано на схеме.

Одновременно с точкой 1 начинает движение точка 2 массой m_2 из положения *B* на оси *y*. На точку 2 действуют сила тяжести и постоянная сила $\vec{F}_2$. Направление вектора силы $\vec{F}_2$ определяется его разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ координатных осей *x*, *y*.

Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1 точки 1 и 2 встретились на оси AS в точке C. Момент времени t_1 задаётся в условиях задачи или определяется по дополнительным условиям встречи.

Варианты заданий представлены на рис. 4.1, 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

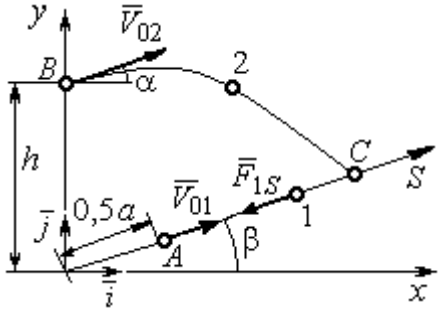
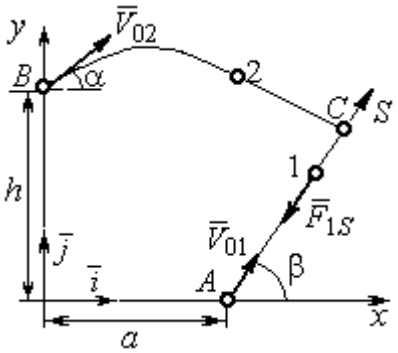
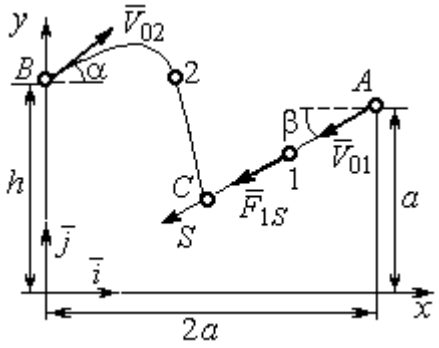
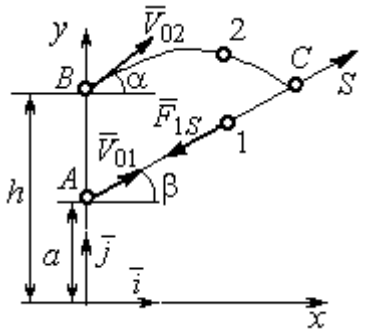
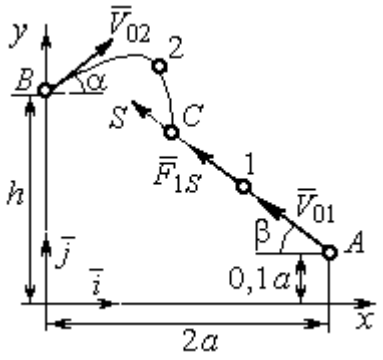
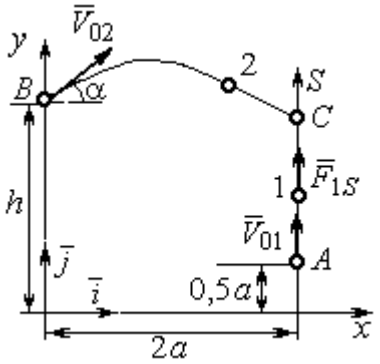
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
 Встреча в точке C в момент, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза относительно начальной	 Встреча в точке C в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с

Рис. 4.1. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	
Встреча в точке *C* в момент, когда скорость точки 1 увеличилась в 1,5 раза относительно начальной	Встреча в точке *C*, когда точка 1 максимально удалилась от места старта

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}4$ с	Встреча в точке *C* в момент максимального подъёма точки 1

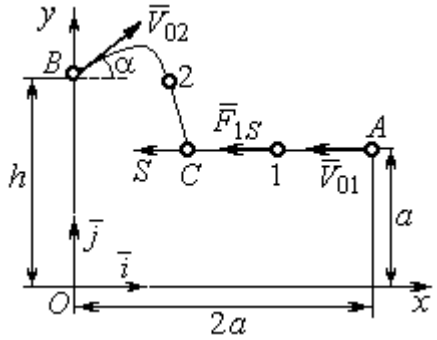
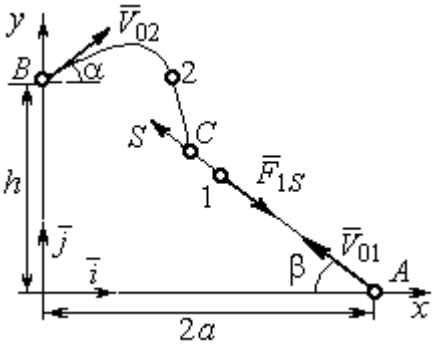
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	
Встреча в точке *C* в момент времени $t_1 = 0{,}6$ с	Встреча в точке *C* в момент, когда точка 1 достигла максимальной высоты подъёма

Рис. 4.2. Задание Д1. Интегрирование уравнений движения точки.
Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 4.1

Исходные данные задания Д1. Интегрирование уравнений движения точки

Номер варианта задания	m_1, кг	F_{1S}, Н	V_{01}, м/с	β, град	m_2, кг	$\vec{F}_2$, Н	a, м	h, м
1	1	3	3	30	2	$7\vec{i}$	2	4
2	3	6	2	0	2	$4\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	1
3	2	5	4	35	1,5	$10\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
4	1	10	2	60	2	$4\vec{i}+8\vec{j}$	2,2	2
5	1	3	3	30	2	$5\vec{i}$	3	4,5
6	0,8	6	6	50	3	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1,5	4
7	2	5	4,5	40	1	$10\vec{i}+2\vec{j}$	3	2,5
8	1	2	3,5	90	2	$6\vec{i}+8\vec{j}$	1,2	2
9	2	4	4	0	1	$3\vec{i}+2\vec{j}$	2	2,5
10	1	3	3	55	1,5	$4\vec{i}$	1	1,5
11	0,5	2	3	60	2	$3\vec{i}+8\vec{j}$	1,5	2,5
12	0,2	3	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1	2,5
13	1	2	6	50	1,5	$6\vec{i}-4\vec{j}$	0,8	2
14	0,5	6	4	35	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	2,5	2
15	0,2	3	3	50	2	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3	4
16	2	4	6	40	2	$3\vec{i}+12\vec{j}$	1	1,5
17	1	6	5	60	1,5	$5\vec{i}+4\vec{j}$	3	2,5
18	1	2	2	90	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2
19	1	3	2	2	2	$2\vec{i}+10\vec{j}$	1	1,5
20	5	4	2	30	1	$3\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	1,5
21	0,2	4	4	45	1	$6\vec{i}-2\vec{j}$	1	3
22	0,4	3	2	0	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1,5	2,5
23	1	3	8	60	2	$4\vec{i}+2\vec{j}$	1,2	1,5
24	0,5	8	3	30	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
25	2	4	4	60	1	$2\vec{i}-2\vec{j}$	3,5	4
26	1	3	5	50	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	0,5	1,5
27	1,5	3	6	30	2	$4\vec{i}+4\vec{j}$	2	2,5
28	2	5	3	90	2	$6\vec{i}+7\vec{j}$	2	1,5
29	2	4	4	0	1	$5\vec{i}-2\vec{j}$	1,5	2
30	1	3	2,5	70	2	$4\vec{i}+6\vec{j}$	1	1

Пример выполнения задания Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки

На рис. 4.3 представлена схема движения материальных точек в вертикальной плоскости *xOy*. Точка 1 массой $m_1 = 2$ кг, получив в начальном положении *A* скорость $V_{01} = 4$ м/с, движется вдоль гладкой оси *AS* с углом наклона $\beta = 30^{\circ}$. Во время движения на точку 1 действуют сила тяжести $\vec{P}_1$ и постоянная сила $\vec{F}_1$, проекция которой на ось *AS* равна $F_{1S} = 4{,}5$ Н. Направление вектора проекции силы $\vec{F}_{1S}$ на ось *AS* показано на рис. 4.3.

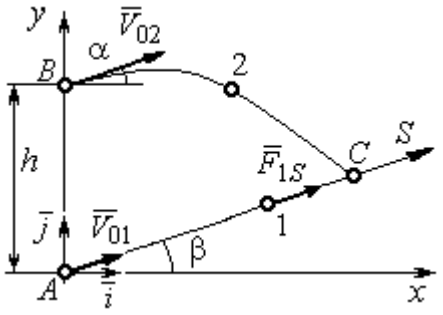


Рис. 4.3. Схема совместного движения точек

Одновременно с началом движения точки 1 из положения *B* на оси *y* высотой $h = 1$ м начинает движение точка 2 массой $m_2 = 1{,}2$ кг. На точку 2 действуют сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2$, направление которой определяется разложением по единичным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ осей *x*, *y* декартовой системы координат: $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, Н. Определить величину и направление (угол α) начальной скорости V_{02} точки 2, чтобы в момент времени t_1, когда скорость точки 1 уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальным значением, обе они встретились на оси *AS* в точке *C*.

Решение

Рассмотрим движение точки 1. В текущий момент времени на точку 1 действует сила тяжести $\vec{P}_1$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной оси *AS* и сила $\vec{F}_1$, величина проекции которой на ось *AS* равна F_{1S} (рис. 4.4). Дифференциальное уравнение движения точки 1 $m_1\ddot{S} = F_{1S} - P_1\sin\beta$, или $m_1\dfrac{dV_{1S}}{dt} = 4{,}5 - m_1 g\sin\beta$. С учетом исходных данных, полагая ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2, дифференциальное уравнение движения точки 1

приводится к виду: $\frac{dV_{1S}}{dt} = -2{,}66$. Разделим переменные, представив дифференциальное уравнение в виде $dV_{1S} = -2{,}66dt$. Проинтегрировав его, получим зависимость скорости точки 1 от времени: $V_{1S} = -2{,}66t + C_1$. Для того чтобы определить закон движения точки 1, представим скорость точки как производную от координаты $V_{1S} = \frac{dS}{dt}$. Получим дифференциальное уравнение $\frac{dS}{dt} = -2{,}66t + C_1$, проинтегрировав которое, найдём уравнение движения точки 1: $S = -1{,}33t^2 + C_1 t + C_2$. Константы интегрирования C_1, C_2 находятся из начальных условий: при $t = 0$, $S = 0$, $\dot{S} = V_{1S} = V_{01} = 4$ м/с. Подставляя первое из условий в уравнение движения точки 1, получим $C_2 = 0$. Подставим начальное значение скорости в уравнение $\dot{S} = -2{,}66t + C_1$, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени. Получим $C_1 = 4$. Таким образом, движение точки 1 вдоль оси AS описывается уравнением: $S = -1{,}33t^2 + 4t$.

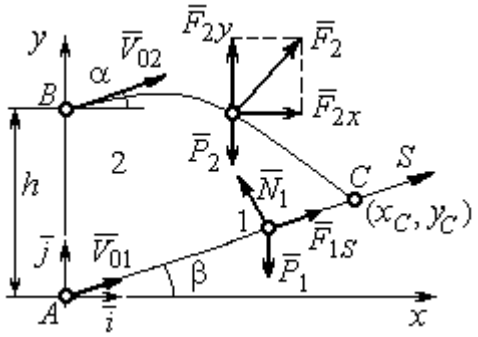


Рис. 4.4. Силы, действующие на точки 1 и 2, во время их движения

По условию задачи встреча двух точек происходит в момент времени t_1, когда скорость первой точки уменьшилась в 2 раза по сравнению с начальной: $V_{1S}(t_1) = \frac{V_{01}}{2} = 2$ м/с. Подставляя это условие в уравнение, выражающее зависимость скорости точки 1 от времени, получим: $2 = -2{,}66t_1 + 4$, откуда найдём момент времени встречи $t_1 = 0{,}75$ с. Расстояние AC, пройденное точкой 1 до встречи, определяется как путь, пройденный этой точкой за время $t_1 = 0{,}75$ с, $AC = S(t_1) = -1{,}33 \cdot 0{,}75^2 + 4 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$ м. Координаты точки встречи x_C, y_C определяются из равенств: $x_C = S(t_1)\cos 30^\circ = 1{,}95$ м; $y_C = S(t_1)\sin 30^\circ = 1{,}12$ м.

Рассмотрим движение точки 2. В текущий момент времени на нее действует сила тяжести $\vec{P}_2$ и сила $\vec{F}_2 = 2{,}4\vec{i} + 4{,}5\vec{j}$, проекции которой на оси координат $F_{2x} = 2{,}4$ Н, $F_{2y} = 4{,}5$ Н. Дифференциальные уравнения движения точки 2 в проекциях на оси координат *x*, *y* имеют вид:

$$m_2\ddot{x} = F_{2x} = 2{,}4\,, \quad m_2\ddot{y} = -P_2 + F_{2y} = -m_2 g + 4{,}5\,,$$

или после подстановки исходных данных: $\ddot{x} = 2$, $\ddot{y} = -6{,}06$.

Представим в первом уравнении проекцию ускорения точки 2 на ось *x* как производную от соответствующей проекции скорости $\ddot{x} = \dfrac{dV_{2x}}{dt}$. После разделения переменных получим дифференциальное уравнение $dV_{2x} = 2dt$. Проинтегрируем его и найдем зависимость горизонтальной составляющей скорости точки 2 от времени: $V_{2x} = 2t + C_3$. Заменим в этом уравнении проекцию скорости точки на ось *x* на производную от координаты $V_{2x} = \dfrac{dx}{dt}$. После интегрирования получим уравнение, описывающее движение точки 2 вдоль оси *x*, $x = t^2 + C_3 t + C_4$. Для того чтобы найти постоянные C_3 и C_4, воспользуемся граничными условиями движения точки 2 – известной начальной координатой движения точки и вычисленной координатой точки встречи, то есть при $t = 0$, $x = 0$, а при $t_1 = 0{,}75$ с $x(t_1) = x_C = 1{,}95$ м. Подставляя граничные условия в уравнение движения точки 2, получим $C_4 = 0$, $C_3 = 1{,}85$. Таким образом, уравнение движения точки 2 вдоль оси *x*: $x = t^2 + 1{,}85t$.

Закон движения точки 2 вдоль оси *y* находим путем интегрирования второго дифференциального уравнения. Его представим в виде: $\dfrac{dV_{2y}}{dt} = -6{,}06$. После разделения переменных и первого интегрирования получим зависимость проекции скорости точки 2 на ось *y* от времени: $V_{2y} = -6{,}06t + C_5$. Заменив проекцию скорости точки 2 на ось *y* производной от координаты $V_{2y} = \dfrac{dy}{dt}$, вто-

рично проинтегрируем. В результате движение точки 2 вдоль оси y описывается уравнением: $y = -3{,}03t^2 + C_5 t + C_6$. Для определения констант C_5 и C_6 используем граничные условия: при $t = 0$ $y(0) = h = 1$ м, а при $t_1 = 0{,}75$ с $y(t_1) = y_C = 1{,}12$ м. Получим $C_6 = 1$, $C_5 = 2{,}43$. Таким образом, точка 2 движется вдоль оси y по закону: $y = -3{,}03t^2 + 2{,}43t + 1$.

Проекции скорости точки 2 на оси координат как функции времени имеют вид: $V_{2x}(t) = \dot{x} = 2t + 1{,}85$, $V_{2y}(t) = \dot{y} = -6{,}06t + 2{,}43$. Значения проекций при $t = 0$: $V_{02x} = V_{2x}(0) = 1{,}85$ м/с, $V_{02y} = V_{2y}(0) = 2{,}43$ м/с. Величина начальной скорости: $V_{02} = \sqrt{{V_{02x}}^2 + {V_{02y}}^2} = 3{,}05$ м/с.

Угол наклона вектора скорости в начальный момент определяется из равенства: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{V_{02y}}{V_{02x}} = \dfrac{2{,}43}{1{,}85} = 1{,}31$. Откуда $\alpha = 52{,}64^\circ$.

4.3. Колебания материальной точки

Силы, возникающие при отклонении материальной точки от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть точку в это положение, называются **восстанавливающими**. Восстанавливающие силы, линейно зависящие от расстояния от точки до положения её равновесия, называются **линейными восстанавливающими силами**. Так, сила упругости пружины $F = c\Delta\ell$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины; $\Delta\ell$ – удлинение пружины, является линейной восстанавливающей силой.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m вдоль оси Оx под действием линейной восстанавливающей силы, представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x – отклонение точки от положения равновесия, куда поместили начало

координат; ω – угловая частота колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Единица измерения угловой частоты – рад/с.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний представляется суммой $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, где постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий. **Амплитуда свободных колебаний** $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Величина, обратная периоду $\nu = \frac{1}{T}$ определяет число полных колебаний точки за 1 с и называется **частотой колебаний**. Частота колебаний измеряется в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному полному колебанию в секунду. Угловая частота связана с частотой колебаний соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы действует сила сопротивления движению, пропорциональная скорости точки, $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, где μ – коэффициент сопротивления, то дифференциальное уравнение движения точки с сопротивлением относительно положения равновесия имеет вид $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, где n – коэффициент затухания, $n = \frac{\mu}{2m}$; ω – угловая частота собственных колебаний точки без учёта сопротивления, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

При $n < \omega$ движение точки представляет затухающие колебания. Общее решение дифференциального уравнения колебаний с сопротивлением $x = e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \alpha)$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования; ω_1 – угловая частота затухающих колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$;

$A_1 = Ae^{-nt}$ – амплитуда затухающих колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; α – начальная фаза колебаний, $\text{tg}\alpha = \dfrac{C_1}{C_2}$.

При $n > \omega$ движение точки апериодическое, затухающее. Общее решение дифференциального уравнения движения точки с таким сопротивлением имеет вид $x = e^{-nt}(C_1 e^{\omega_2 t} + C_2 e^{-\omega_2 t})$, где $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

При $n = \omega$ движение точки происходит согласно уравнению $x = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$.

Если кроме восстанавливающей силы на материальную точку действует переменная возмущающая сила, колебания точки называются **вынужденными.**

При действии гармонической возмущающей силы $F = H\sin pt$, где H, p – амплитуда и угловая частота колебаний возмущающей силы, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия и при отсутствии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающей силы, $h = \dfrac{H}{m}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

При отсутствии резонанса, когда частота собственных колебаний не совпадает с частотой возмущающей силы $p \neq \omega$, решение имеет вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$, а в случае резонанса, когда $p = \omega$, – вид: $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \dfrac{ht}{2p}\cos pt$. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2

определяются из общего решения неоднородного уравнения с учетом начальных условий движения. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{\text{соб}} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Амплитуда вынужденных колебаний при отсутствии резонанса $A_{\text{вын}} = \dfrac{h}{\omega^2 - p^2}$. При резонансе амплитуда вынужденных колебаний растет как линейная функция времени $A_{\text{вын}} = \dfrac{ht}{2p}$.

Если возмущающее воздействие заключается в **принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины**, например, по закону $S = a\sin pt$, где a, p – амплитуда и угловая частота колебаний точки подвеса пружины, дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки относительно положения равновесия при отсутствии сил сопротивления имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt$, где ω – угловая частота собственных гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$; h – относительная амплитуда возмущающего колебания, $h = \dfrac{ca}{m}$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вынужденных колебаний при принудительном гармоническом колебании точки подвеса пружины может быть получено аналогично случаю возмущения гармонической силой.

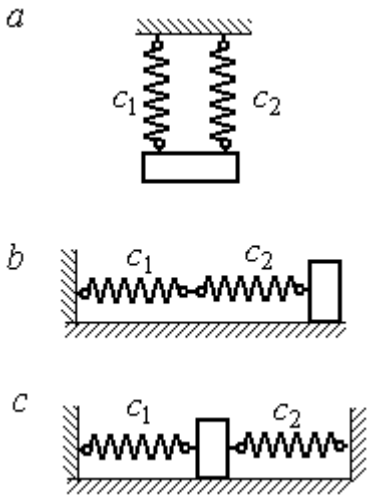


Рис. 4.5. Способы крепления груза на двух пружинах:
a – две параллельные пружины;
b – последовательно соединённые пружины; *c* – крепление груза между пружинами

Система пружин заменяется одной с эквивалентной жесткостью. Так, колебания груза на двух параллельных пружинах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 (рис. 4.5, *a*) можно рассматривать как колебания груза на одной пружине эквивалент-

ной жесткости $c_{экв} = c_1 + c_2$, где $c_{экв}$ – коэффициент жесткости эквивалентной пружины. При последовательном соединении пружин (рис. 4.5, *b*) коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. Если груз расположен между двумя пружинами (рис. 4.5, *c*), тогда $c_{экв} = c_1 + c_2$. Коэффициент жесткости эквивалентной пружины равен сумме коэффициентов жесткости пружин.

4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки

Задание Д2 на исследование колебаний точки включает две задачи.

Задача 1. Исследование гармонических колебаний точки.

Найти уравнение движения груза массой m_1 (или одновременно двух грузов массой m_1 и m_2) на пружине жесткостью c_1 (или на двух пружинах жесткостью c_1 и c_2). Расположение грузов на пружине и описание условий, при которых начались колебания, приведено на схемах. Определить амплитуду и частоту колебаний.

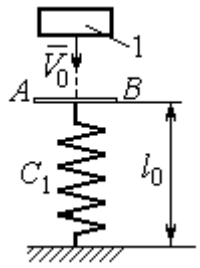
Задача 2. Исследование вынужденных колебаний точки.

Груз движется на пружинах, расположенных вертикально или горизонтально. При движении груза по горизонтальной поверхности трение не учитывается. Жёсткость пружин c_1 и c_2. Направление возмущающего усилия $F = F(t)$, приложенного к грузу, или возмущающего движения точки крепления пружин $S = S(t)$, а также описание условий начала колебаний приведено на схемах. В задачах, где на схемах присутствует амортизатор, создающий сопротивление движению груза, сила сопротивления пропорциональна скорости движения груза и находится по формуле: $\vec{R} = -\mu \vec{V}$ Н, где μ – коэффициент сопротивления; V – скорость груза. Определить уравнение колебаний груза, амплитуды собственных и вынужденных колебаний.

Варианты заданий даны на рис. 4.6 – 4.9. Исходные данные в табл. 4.2.

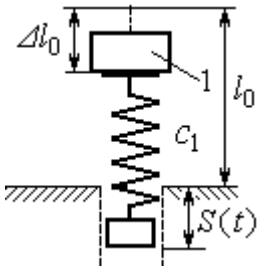
Варианты № 1, 11, 21

Задача 1



Невесомая пластина AB укреплена на нерастянутой пружине. Груз 1, получив начальную скорость V_0, падает вертикально вниз. Через 1 с после начала падения груз достигает пластины и продолжает движение вместе с ней

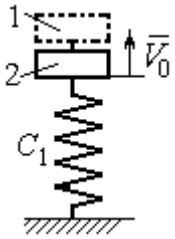
Задача 2



К верхнему концу пружины, сжатой на величину $\Delta\ell_0$, прикрепляют груз 1 и отпускают без начальной скорости. Одновременно нижний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

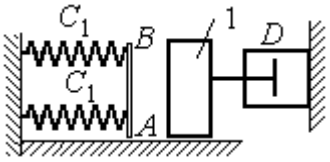
Варианты № 2, 12, 22

Задача 1



В положении статического равновесия двух грузов (1 и 2), установленных на пружине, груз 1 убрали, а грузу 2 сообщили скорость V_0, направленную вверх

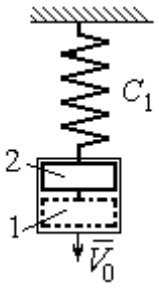
Задача 2



Груз 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности с начальной скоростью V_0. Через 1 с груз упирается в площадку AB, укреплённую на недеформированных пружинах, соединённых параллельно, и продолжает движение вместе с ней. Во время движения (до упора в площадку AB и вместе с ней) груз испытывает сопротивление, создаваемое демпфером D

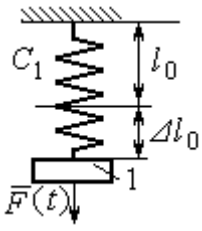
Варианты № 3, 13, 23

Задача 1



В положении статического равновесия груза 2, укреплённого на пружине, к нему присоединили груз 1 и оба груза толкнули вниз со скоростью V_0

Задача 2

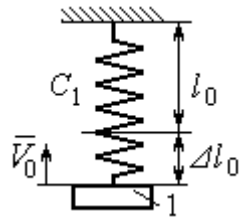


Недеформированную пружину оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$, подцепили груз 1 и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.6. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 1 – 3, 11 – 13, 21 – 23

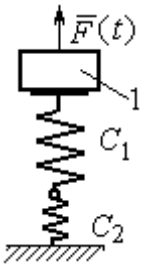
Варианты № 4, 14, 24

Задача 1



К недеформированной пружине подцепили груз 1, оттянули его вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вверх

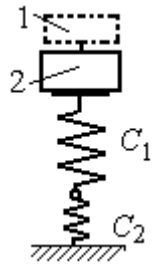
Задача 2



Грузу 1, укреплённому на двух последовательно соединённых пружинах в положении статического равновесия, сообщили начальную скорость V_0, направленную вниз. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

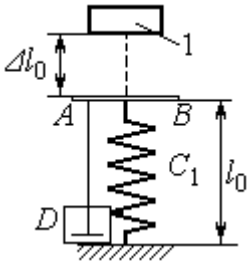
Варианты № 5, 15, 25

Задача 1



В положении статического равновесия грузов 1 и 2, укреплённых на двух вертикальных последовательно соединённых пружинах, убрали груз 1, а груз 2 отпустили без начальной скорости

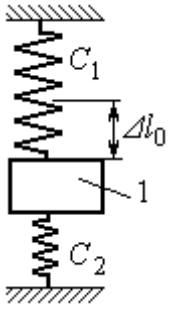
Задача 2



Груз 1 падает с высоты $\Delta\ell_0$ на площадку AB, установленную на недеформированной пружине, и продолжает движение вместе с ней. Демпфер D создаёт сопротивление движению груза на пружине

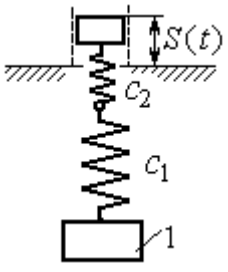
Варианты № 6, 16, 26

Задача 1



Груз 1 поместили между двумя недеформированными пружинами, затем оттянули вниз на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости

Задача 2

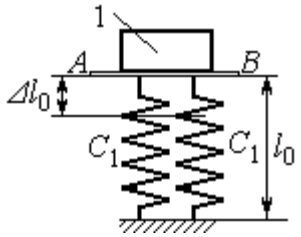


К недеформированным пружинам, соединённым последовательно, подцепили груз 1 и толкнули его вниз со скоростью V_0. Одновременно верхний конец пружины начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.7. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 4 – 6, 14 – 16, 24 – 26

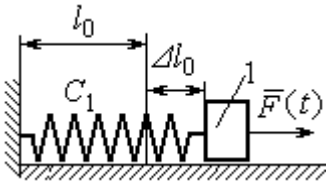
Варианты № 7, 17, 27

Задача 1



К недеформированным пружинам приложили груз 1, переместили его вниз на величину $\Delta\ell_0$ и сообщили скорость V_0, направленную вниз

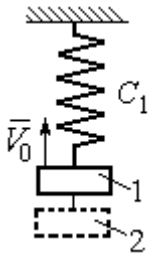
Задача 2



К нерастянутой пружине, расположенной на горизонтальной гладкой поверхности, подцепили груз 1, оттянули его на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили. Одновременно на груз стала действовать горизонтальная возмущающая сила $\vec{F}(t)$

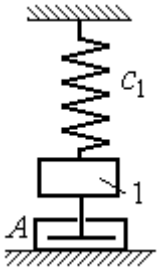
Варианты № 8, 18, 28

Задача 1



Грузы 1 и 2 находятся на пружине в положении статического равновесия. Груз 2 удаляют, а грузу 1 сообщают скорость V_0, направленную вверх

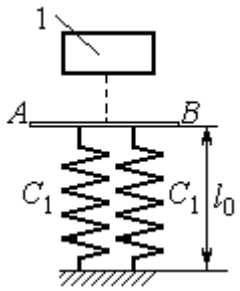
Задача 2



В положении статического равновесия груза 1 ему сообщили скорость V_0, направленную вниз. Демпфер A создаёт сопротивление движению груза

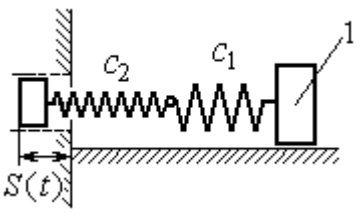
Варианты № 9, 19, 29

Задача 1



Груз 1 без начальной скорости падает вниз. Пройдя путь 1 м, груз достигает невесомой пластины AB, укреплённой на недеформированных, параллельно соединённых пружинах, и дальше движется вместе с ней

Задача 2



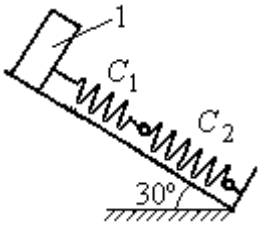
К двум горизонтальным пружинам, соединённым последовательно, в положении их нерастянутого состояния прицепили груз 1 и сообщили ему горизонтальную скорость V_0, направленную в сторону сжатия пружин. Одновременно левый конец пружинной системы начинает двигаться по закону $S = S(t)$

Рис. 4.8. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 7 – 9, 17 – 19, 27 – 29

Окончание вариантов задания Д2

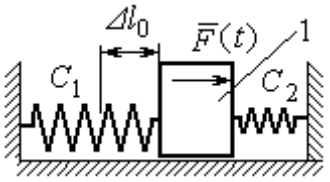
Варианты № 10, 20, 30

Задача 1



В положении статического равновесия груза 1, укреплённого на двух последовательно соединённых пружинах, сообщили скорость V_0, направленную вниз по наклонной плоскости

Задача 2



Между двумя горизонтальными недеформированными пружинами на гладкую поверхность поместили груз 1, оттянули его влево на расстояние $\Delta\ell_0$ и отпустили без начальной скорости. Одновременно на груз стала действовать возмущающая сила $\vec{F}(t)$

Рис. 4.9. Задание Д2. Исследование колебаний точки.
Варианты задания 10, 20, 30

Таблица 4.2

Исходные данные задания Д2. Исследование колебаний точки

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
1	1	2,5	–	2,0	200	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	210	–	0,1	–	–	0,02sin12t
2	1	1,5	2,0	4	250	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	4	220	–	–	1,0	–	–
3	1	2,0	1,5	3	250	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	–	200	–	0,14	–	12sin5t	–
4	1	2,0	–	3	180	–	0,1	–	–	–
	2	1,5	–	2	150	120	–	–	8sin12t	–
5	1	1,0	2,0	–	120	100	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	50	–	0,5	18	–	–
6	1	1,2	–	–	120	180	0,12	–	–	–
	2	1,4	–	2,4	120	180	–	–	–	0,03sin14t
7	1	1,6	–	3,2	140	–	0,15	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,12	–	12sin6t	–
8	1	1,0	2,0	3,0	150	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	3,5	120	–	–	15	–	–

Продолжение табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
9	1	1,5	–	–	100	–	–	–	–	–
	2	1,4	–	2,0	100	110	–	–	–	0,015sin8t
10	1	2,5	–	2,5	110	100	–	–	–	–
	2	2,0	–	–	110	52	0,08	–	5sin9t	–
11	1	2,0	–	4,0	300	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	–	200	–	0,12	–	–	0,01sin4t
12	1	1,8	2,4	4	220	–	–	–	–	–
	2	1,0	–	5	240	–	–	0,6	–	–
13	1	1,5	1,5	2	200	–	–	–	–	–
	2	1,8	–	–	180	–	0,08	–	10sin10t	–
14	1	2,0	–	2	200	–	0,12	–	–	–
	2	2,0	–	2	150	120	–	–	10sin8t	–
15	1	1,5	2,0	–	120	250	–	–	–	–
	2	1,5	–	–	120	–	0,4	4	–	–
16	1	2,0	–	–	150	75	0,1	–	–	–
	2	2,0	–	2,5	150	75	–	–	–	0,01sin5t
17	1	1,5	–	2,1	160	–	0,11	–	–	–
	2	1,8	–	–	150	–	0,1	–	8sin12t	–
18	1	2,0	1,0	2,5	80	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	2,5	50	–	–	21	–	–
19	1	1,6	–	–	120	–	–	–	–	–
	2	1,2	–	2,0	85	120	–	–	–	0,015sin7t
20	1	2,0	–	2,0	90	100	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	100	90	0,12	–	6sin10t	–
21	1	2,0	–	1,6	220	–	–	–	–	–
	2	2,5	–	–	250	–	0,14	–	–	0,01sin10t
22	1	2,2	1,5	3	180	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	4	280	–	–	0,8	–	–
23	1	2,2	1,2	2	220	–	–	–	–	–
	2	1,6	–	–	200	–	0,12	–	5sin7t	–

Окончание табл. 4.2

Номер варианта задания	Номер задачи	m_1, кг	m_2, кг	V_0, м/с	c_1, Н/м	c_2, Н/м	$\Delta\ell_0$, м	μ, Н·с/м	$F(t)$, Н	$S(t)$, м
24	1	1,6	–	2,4	160	–	0,13	–	–	–
	2	1,0	–	3	150	300	–	–	6sin10t	–
25	1	0,8	1,2	–	120	80	–	–	–	–
	2	0,8	–	–	180	–	0,4	12	–	–
26	1	1,4	–	–	100	120	0,15	–	–	–
	2	1,8	–	2,2	150	120	–	–	–	0,015sin8t
27	1	2	–	4,0	150	–	0,12	–	–	–
	2	2	–	–	162	–	0,13	–	5sin9t	–
28	1	1,5	2,0	2,0	140	–	–	–	–	–
	2	1,5	–	3,1	180	–	–	12	–	–
29	1	1,0	–	–	140	–	–	–	–	–
	2	2,0	–	2,4	75	150	–	–	–	0,08sin5t
30	1	1,6	–	3	75	150	–	–	–	–
	2	1,5	–	3	80	70	0,15	–	8sin10t	–

Пример выполнения задания Д2. Исследование колебаний точки

Задача 1. Груз 1 весом P = 20 Н, лежащий на гладкой наклонной плоскости, прикреплён к недеформированной пружине, расположенной параллельно плоскости (рис. 4.10). Угол наклона плоскости к горизонту 30º, коэффициент жесткости пружины c = 400 Н/м. В начальный момент груз переместили вверх по наклонной плоскости (сжали пружину) на расстояние $\Delta\ell_0$ = 0,1 м относительно нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

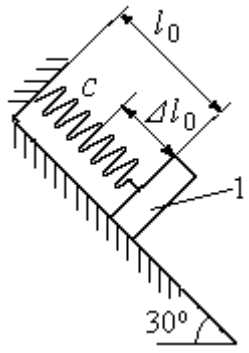


Рис. 4.10. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.11. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вниз вдоль наклонной плоскости. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.11) В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены три силы: сила тяжести $\vec{P}$, реакция опоры наклонной плоскости $\vec{N}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$. Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*: $F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell$, где $\Delta\ell$ – удлинение пружины относительно её нерастянутого положения, включающее её растяжение *x* относительно выбранного начала координат и растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза на наклонной плоскости.

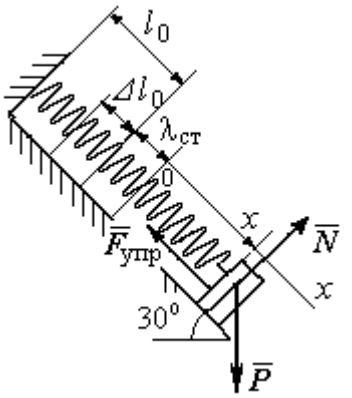


Рис. 4.11. Расчётная схема колебаний груза

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P\sin 30^\circ - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

В положении статического равновесия сила упругости уравновешивается силой, равной проекции силы тяжести на ось *x*: $P\sin 30^\circ - c\lambda_{\text{ст}} = 0$. Подставляя это выражение условия статического равновесия груза в уравнение движения, получим дифференциальное уравнение колебаний груза:

$$m\ddot{x} = -cx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где ω – угловая частота колебаний; $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 14{,}01$ рад/с.

Общее решение уравнения колебаний $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси *Ox*.

Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \dfrac{P\sin 30^\circ}{c} = 0{,}025$ м. Координата начального положения груза определяется величиной сжатия пружины и, поскольку начало отсчёта координаты x выбрано в положении статического равновесия груза, равна (со знаком!): $x_0 = -(\Delta\ell_0 + \lambda_{ст}) = -0{,}125$ м (см. рис. 4.11).

Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения колебаний при $t = 0$, получим $C_1 = -0{,}125$ м. Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$. Подставим сюда начальное значение скорости груза при $t = 0$ $\dot{x} = V_0 = 0$, получим $C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического растяжения пружины:

$$x(t) = -0{,}125\cos 14{,}01t \text{ м}.$$

Амплитуда колебаний груза $A = 0{,}125$ м.

Задача 2. Груз 1 весом $P = 20$ Н подвешен на недеформированной вертикальной пружине (рис. 4.12). Жесткость пружины $c = 800$ Н/м. В начальный момент груз был оттянут вниз в положение, при котором пружина растянулась на расстояние $\Delta\ell_0 = 0{,}1$ м, и в этом положении ему сообщена начальная скорость $V_0 = 2$ м/с, направленная вверх.

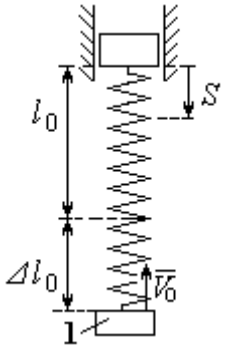


Рис. 4.12. Схема крепления груза и условия начала колебаний

Одновременно с началом движения груза верхний конец пружины стал совершать гармонические колебания по закону $S = a\sin 10t$, где $a = 0{,}02$ м.

Определить уравнение колебаний груза 1, а также частоту и амплитуду собственных колебаний.

Решение

Расчетная схема колебаний груза 1 показана на рис. 4.13. Направим ось *Ox*, вдоль которой происходят колебания груза, вертикально вниз. Начало отсчёта координаты *x* выберем в положении статического равновесия груза (см. рис. 4.13, *c*, *d*). В произвольном положении груза, обозначенном координатой *x*, к нему приложены две силы: сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$.

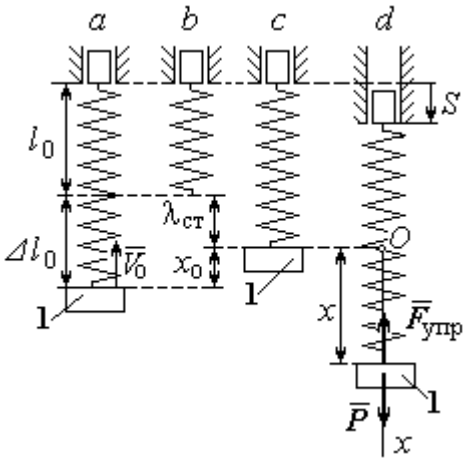


Рис. 4.13. Расчётная схема вынужденных колебаний груза: *a* – положение груза на начало колебаний; *b* – недеформированная пружина; *c* – статическое растяжение пружины под действием веса груза; *d* – положение груза в произвольный момент времени и перемещение точки подвеса пружины

Проекция силы упругости пружины на ось *Ox*

$$F_{\text{упр}\,x} = -c\Delta\ell = -c(x + \lambda_{\text{ст}} - S),$$

где $\Delta\ell$ – удлинение пружины, включающее её растяжение *x* относительно начала координат, растяжение $\lambda_{\text{ст}}$ при статическом равновесии груза и уменьшение растяжения при смещении верхнего конца, $\Delta\ell = (x + \lambda_{\text{ст}} - S)$.

С учетом выражения силы упругости получим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{\text{ст}} - S).$$

В положении статического равновесия выполняется условие равенства сил: $P - c\lambda_{\text{ст}} = 0$.

После подстановки его в уравнение движения груза получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -cx + cS, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = h\sin pt,$$

где ω – угловая частота собственных колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, ω = 19,81 рад/с; h – относительная амплитуда вынужденных колебаний, $h = \frac{ca}{m}$ = 7,85 м/с^2; p – угловая частота вынужденных колебаний, p = 10 рад/с.

При отсутствии резонанса (здесь $\omega \neq p$) общее решение уравнения вынужденных колебаний имеет вид $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2}\sin pt$.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 вычислим координату x_0 начального положения груза на оси Ox. Координата начального положения груза (см. рис. 4.13, *b*) $x_0 = \Delta\ell_0 - \lambda_{ст}$. Растяжение пружины в положении статического равновесия $\lambda_{ст} = \frac{P}{c}$ = 0,02 м, тогда x_0 = 0,08 м. Подставляя значение координаты начального положения груза в общее решение уравнения вынужденных колебаний при t = 0, получим: $C_1 = x_0$ = 0,08 м.

Для определения второй константы вычислим скорость груза в произвольный момент времени: $\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2}\cos pt$. Проекция скорости груза в начальный момент на ось Ox $V_{0x} = -V_0$. Подставив начальное значение скорости груза при t = 0 $\dot{x} = V_{0x} = -V_0$, получим: $C_2 = -\frac{V_0}{\omega} - \frac{hp}{\omega(\omega^2 - p^2)}$ = – 0,11 м. Окончательно уравнение движения груза 1 относительно положения статического равновесия, м.

$$x(t) = 0{,}08\cos 19{,}82t - 0{,}11\sin 19{,}82t - 0{,}03\sin 10t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний $A_{вын} = \frac{h}{\omega^2 - p^2}$ = 0,03 м. Амплитуда собственных колебаний груза $A_{соб} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ = 0,14 м.

4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Работой $A(\vec{F})$ силы $\vec{F}$, постоянной по модулю и направлению, на конечном прямолинейном перемещении S_1 точки приложения силы называется величина $A(\vec{F}) = FS_1\cos\alpha$. Если угол α острый, работа силы положительна. Если угол α тупой, – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

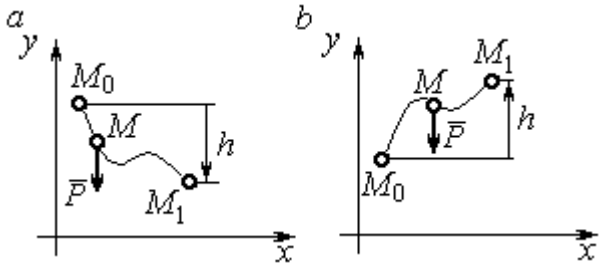


Рис. 4.14. Схема для вычисления работы силы тяжести:
a – перемещение точки сверху вниз;
b – перемещение точки снизу вверх

Работа силы тяжести материальной точки (вертикальной силы) при перемещении точки из положения M_0 в положение M_1 равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки $A_{(M_0M_1)} = \pm Ph$, где P – величина силы тяжести точки; h – величина вертикального перемещения точки (рис. 4.14). Работа силы тяжести положительная, если начальная точка движения выше конечной, и отрицательная, – если ниже.

Работа силы упругости пружины на прямолинейном перемещении вдоль линии действия силы из положения недеформированной пружины на расстояние h определяется формулой $A(F_{\text{упр}}) = -\dfrac{ch^2}{2}$, где c – коэффициент жесткости (или просто жёсткость) пружины.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $T = \dfrac{1}{2}mV^2$, где m – масса точки; V – её скорость. **Теорема об изменении кинетической энергии точки** заключается в том, что изменение кинетической энергии точки за конечный промежуток времени равно алгебраической сумме работ всех действующих на неё сил: $\dfrac{mV_1^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$, где V_0,

V_1 – скорость точки в начальном положении M_0 и в положении M_1; $\sum A_{(M_0M_1)}$ – сумма работ всех сил, действующих на точку, при её перемещении из положения M_0 в положение M_1.

При несвободном движении точки сумма работ сил включает работу реакций связи. Если движение происходит без трения по неподвижной гладкой поверхности, то реакция связи направлена по нормали к поверхности и её работа при любом перемещении точки равна нулю.

Для определения реакций связи при несвободном движении точки используются уравнения движения точки в проекциях на оси естественной системы координат – касательную и нормальную: $m\frac{dV}{dt} = \sum F_\tau$, $m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_n$, где $\sum F_\tau$, $\sum F_n$ – суммы проекций сил на касательную и нормальную оси естественной системы координат; ρ – радиус кривизны траектории точки.

4.6. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

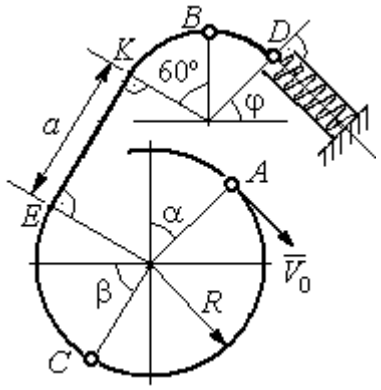
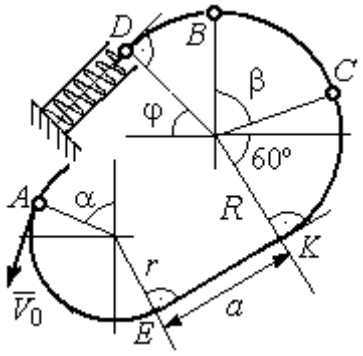
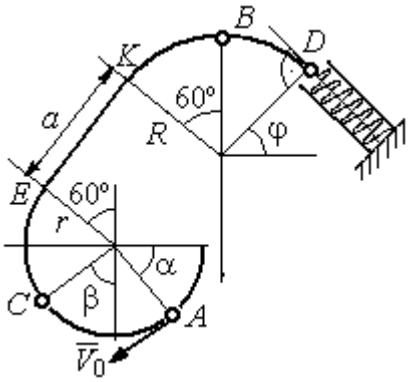
Тонкий стержень с надетым на него шариком массой *m* расположен в вертикальной плоскости и состоит из дуг окружностей радиусами *r* и *R* = 2*r*, соединённых прямолинейным отрезком *EK*, сопряжённым с дугами окружностей в точках *E* и *K*. В этих точках шарик переходит с одного участка стержня на другой, не изменяя величины и направления скорости. Длина отрезка *EK* = *a*.

В точке *A*, положение которой на дуге окружности определяется углом α, шарику сообщают начальную скорость V_0. По дугам окружностей шарик скользит без трения, а при движении по прямолинейному отрезку *EK* на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения *f*. На участках с вертикальным отрезком *EK* считать, что шарик прижимается к стержню силой, равной половине веса шарика.

Достигнув на дуге окружности точки *D*, шарик упирается в недеформированную пружину жёсткостью *c* и, продолжая движение по сопряженной прямой, сжимает её. Положение точки *D* определяется углом φ.

Определить величину максимального сжатия пружины, если шарик проходит наивысшее положении траектории – точку *B* со скоростью $V_B = kV_0$. При найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом β.

Варианты заданий приведены на рис. 4.15, 4.16. Исходные данные задания в табл. 4.3.

Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**	**Варианты № 3, 13, 23**
		

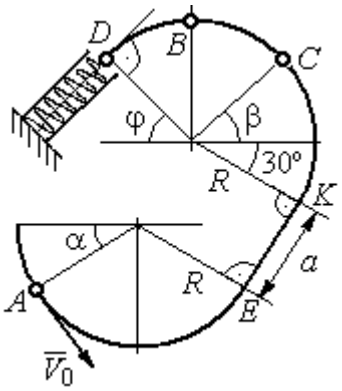
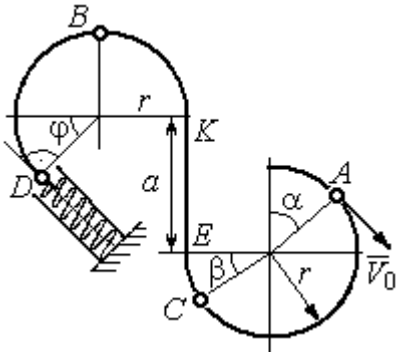
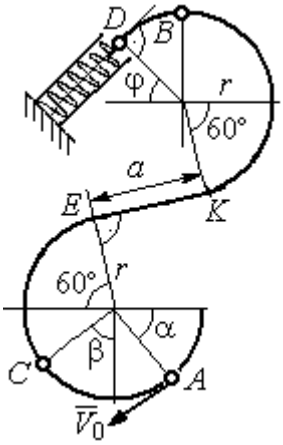
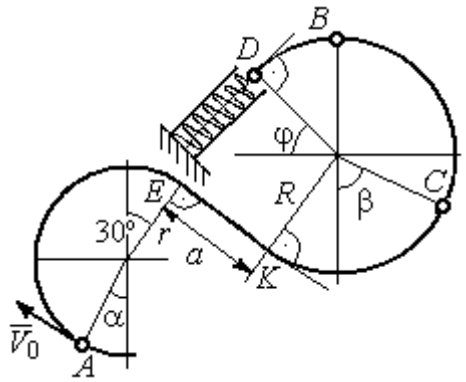
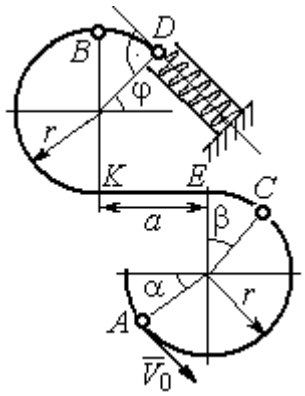
Варианты № 4, 14, 24	**Варианты № 5, 15, 25**	**Варианты № 6, 16, 26**
		

Рис. 4.15. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д3

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

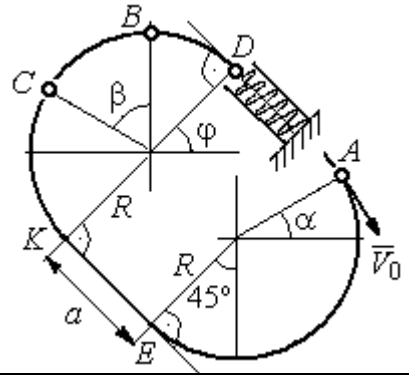
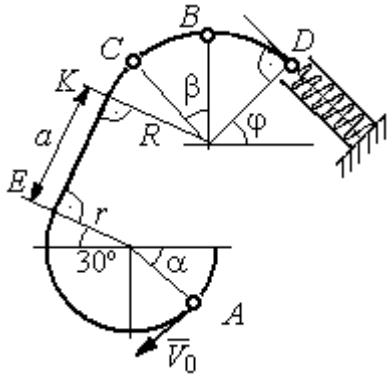
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 4.16. Задание Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 4.3

Исходные данные задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
m, кг	0,8	0,5	0,6	0,4	1,0	0,6	0,9	0,5	0,3	0,4	0,8	0,6	0,5	0,3	1,0
α, град	30	45	0	30	30	0	0	45	30	0	60	30	30	45	60
β , град	60	30	60	0	60	30	60	60	30	45	30	60	60	30	30
φ, град	0	60	30	0	0	30	45	0	30	45	30	30	0	30	45
r, м	0,4	0,4	0,5	0,3	0,6	0,5	0,3	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5	0,8
a, м	0,5	0,6	0,9	1,4	0,8	1,2	0,5	0,5	1,4	0,5	0,8	0,5	0,8	0,6	0,6
f	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,3
k	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4
c, Н/м	100	80	90	80	120	100	90	80	60	80	90	60	80	60	110

Окончание табл. 4.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
m, кг	0,6	0,5	0,6	0,4	0,8	0,5	0,4	1,0	0,6	0,5	0,4	0,8	0,4	0,6	0,8
α, град	60	30	0	45	60	90	90	60	60	90	30	60	60	45	90
β , град	60	30	45	90	60	45	90	60	60	30	30	60	60	0	60
φ, град	45	60	60	60	30	90	0	90	45	60	60	90	30	60	0
r, м	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	0,6	0,4	0,6	0,8	0,4	0,4	0,8	0,6	0,4
a, м	0,4	1,2	0,9	1,2	1,2	0,9	0,6	1,5	1,4	0,8	1,2	0,9	0,6	0,8	0,5
f	0,3	0,4	0,4	0,5	0,3	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4
k	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3
c, Н/м	80	60	90	60	100	90	80	110	80	60	60	80	60	80	100

Пример выполнения задания Д3. Исследование движения точки с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Тонкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, состоит из двух дуг окружностей, сопряженных в точках *E* и *K* с прямолинейным отрезком *EK* длиной *a* = 0,6 м (рис. 4.17). Радиусы окружностей *R* = 1 м и *r* = 0,5 м. Диаметры дуг окружностей, проведённые в точках *E* и *K*, составляют с горизонтом угол 30°. На стержень надет шарик массой *m* = 0,5 кг. В точке *A*, положение которой на дуге радиуса *R* определяется углом α = 60° (см. рис. 4.17), шарику сообщают начальную скорость V_0, после чего он начинает движение. По дугам окружностей шарик скользит без трения. При движении по прямой *EK* на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения *f* = 0,2. Достигнув точки *D* на верхней дуге, шарик упирается в пружину жесткостью *c* = 100 Н/м и, двигаясь по сопряжённой прямой без трения, сжимает её. Найти величину максимального сжатия пружины, если наивысшее положение на траектории (точку *B*) шарик проходит со скоростью $V_B = kV_0$ при *k* = 0,3. При

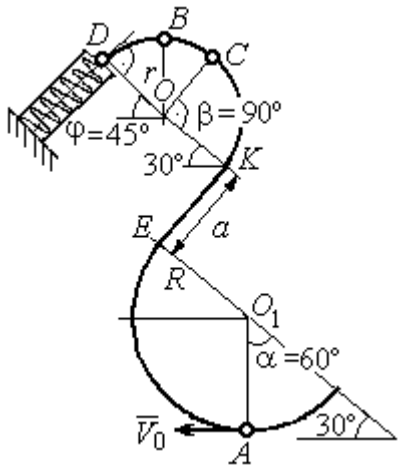


Рис. 4.17. Схема движения шарика

найденном значении начальной скорости рассчитать давление шарика на стержень в точке *C*, положение которой на дуге определяется углом $\beta = 90°$.

Решение

Рассмотрим движение шарика по стержню из начального положения *A* в наивысшее положение – точку *B*.

При движении шарика по дугам окружностей работу совершает только сила тяжести. Реакция гладкой поверхности стержня в любой момент времени перпендикулярна поверхности стержня, и потому её работа при перемещении шарика равна нулю.

На участке движении шарика по прямой *EK* на него действуют сила тяжести $\vec{P}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_{EK}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 4.18, *b*). Работу совершают сила тяжести и сила трения. Работа реакции опоры стержня равна нулю.

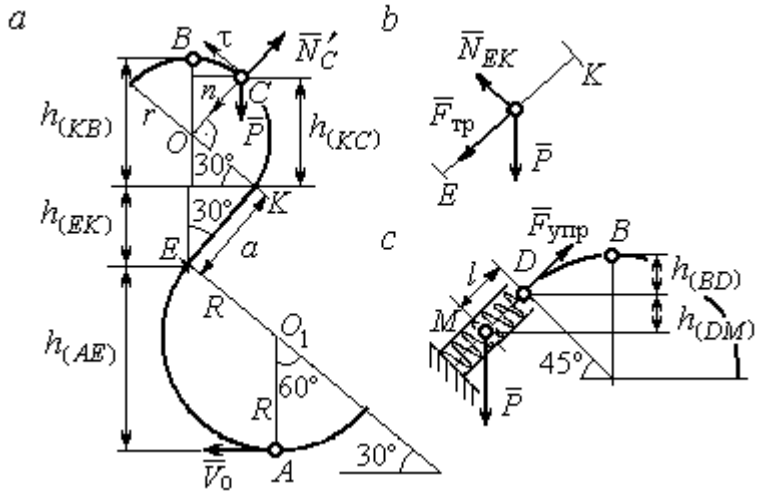


Рис. 4.18. Силы, действующие на шарик во время движения и перепады высот

Обозначим $h_{(AB)}$ – перепад высот точек *A* и *B* на траектории; V_A – начальная скорость шарика в точке *A*, $V_A = V_0$; V_B – его скорость в точке *B*, $V_B = 0{,}3V_0$.

Для вычисления перепада высот точек *A* и *B* имеем выражение (рис. 4.18, *a*):

$$h_{(AB)} = h_{(AE)} + h_{(EK)} + h_{(KB)} = R(1+\sin 30^\circ) + a\cos 30^\circ + r(1+\sin 30^\circ).$$

Будем считать шарик материальной точкой. Применяя теорему об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *A* в положение *B*, получим: $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{тр}})$, где $A(\vec{P}) = -Ph_{(AB)}$,

$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}a$ – работы, соответственно, силы тяжести на участке движения *AB* и силы трения на отрезке *EK*. Сила трения равна $F_{\text{тр}} = f \cdot N_{EK} = f \cdot mg\cos 60^\circ$ (рис. 4.18, *a*, *b*).

В результате, теорема об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из начального положения *A* в конечное положение *B* принимает вид: $\frac{m(0{,}3V_0)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -\,mg\left[(R+r)(1+\sin 30^\circ) + a(\cos 30^\circ + f \cdot \cos 60^\circ)\right]$.

После подстановки данных задачи, получим: $0{,}91V_0^2 = 55{,}517$, откуда находим необходимое значение начальной скорости шарика: $V_0 = 7{,}81$ м/с.

Найдём давление шарика на стержень в точке *C*.

Проведём в точке *C* оси естественной системы координат – касательную $C\tau$ и нормаль Cn (рис. 4.18, *a*). Уравнение движения шарика в точке *C* в проекции на нормальную ось имеет вид: $m\frac{V_C^2}{r} = P\cos 30^\circ - N'_C$, где V_C – скорость шарика в точке *C*, N'_C – реакция стержня, приложенная к шарику. Направление реакции на рис. 4.18, *a* соответствует предположению, что шарик давит на стержень в направлении центра дуги окружности.

Для определения скорости шарика в точке *C* воспользуемся тем, что скорость шарика в точке *B* уже известна, и применим теорему об изменении кинетической энергии при движении шарика из начального положения *C* в конечное положение *B*. На этом участке движения работу совершает только сила тяжести шарика. Получим $\frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = -Ph_{(CB)}$, где V_C, V_B – значения скорости шарика в точках *C* и *B*; $h_{(CB)}$ – перепад высот точек *C* и *B*; $h_{(CB)} = r(1-\sin 30^\circ) = 0{,}5r$ (см. рис. 4.18, *a*). В результате теорема об изменении кинетической энергии принимает вид: $mV_C^2 = mV_B^2 + 2mgh_{(CB)}$ или $V_C^2 = V_B^2 + gr$. Отсюда, при условии $V_B = 0{,}3V_0 = 2{,}34$ м/с, найдём $V_C = 3{,}22$ м/с.

Реакция опоры шарика: $N'_C = P\cos 30^\circ - m\dfrac{V_C^2}{r} = -6{,}12$ Н.

Отрицательное значение реакции опоры шарика означает, что вектор реакции $\vec{N}'_C$ в точке C (см. рис. 4.18, *а*) направлен в противоположную сторону. Давление шарика на стержень в точке C равно модулю реакции опоры.

Найдём величину максимального сжатия пружины.

Рассмотрим движение шарика на участке от точки *B* до положения максимально сжатой пружины – точки *M*. Движение на этом участке происходит по дуге окружности *BD* и по прямой *DM*. При этом сила тяжести совершает работу на всём участке движения, а сила упругости – на отрезке сжатия пружины. Обозначим величину максимального сжатия пружины $MD = l$.

По теореме об изменении кинетической энергии точки при движении шарика из положения *B* в *M* получим: $\dfrac{mV_M^2}{2} - \dfrac{mV_B^2}{2} = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{\text{упр}})$, где V_M, V_B – скорость шарика в точках *M* и *B*. Работа силы тяжести $A(\vec{P}) = Ph_{(BM)} =$ $= P\left[h_{(BD)} + h_{(DM)}\right] = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right]$. Работа силы упругости на прямолинейном участке *DM* длиной *l*: $A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\dfrac{cl^2}{2}$. Условие максимального сжатия пружины означает, что в точке *M* скорость шарика обращается в нуль: $V_M = 0$, тогда теорема об изменении кинетической энергии точки принимает вид: $-\dfrac{mV_B^2}{2} = mg\left[r\left(1 - \cos 45^\circ\right) + l\cos 45^\circ\right] - \dfrac{cl^2}{2}$. Подставляя данные задачи и с учётом того, что скорость шарика в наивысшей точке *B* найдена из предыдущих рассуждений $V_B = 2{,}34$ м/с, получим квадратное уравнение для определения величины максимального сжатия пружины $50l^2 - 3{,}468l - 2{,}085 = 0$. В качестве ответа принимается положительный корень уравнения $l = 0{,}24$ м.

5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы

Поступательное движение твердого тела описывается теоремой о движении центра масс механической системы. В проекциях на координатные оси дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид: $m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}$, $m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky}$, $m\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz}$, где m – масса тела; x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела; F^e_{kx}, F^e_{ky}, F^e_{kz} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на твердое тело.

Вращательное движение твердого тела относительно неподвижной оси z описывается теоремой об изменении кинетического момента.

Дифференциальное уравнения вращательного движения тела имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}^e_k) \quad \text{или} \quad J_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}^e_k),$$

где ω – угловая скорость тела; $\omega = \dot{\varphi}$; φ – угол поворота тела; $\sum M_z(\vec{F}^e_k)$ – моменты внешних сил относительно оси z; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

Уравнение вращательного движения можно представить в алгебраической форме: $J_z\varepsilon = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$, где ε – угловое ускорение тела; $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Плоскопараллельное движение твердого тела описывается на основании теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В проекции на координатные оси уравнения плоскопараллельного движения тела имеют вид:

$$ma_{Cx} = \sum F^e_{kx}, \quad ma_{Cy} = \sum F^e_{ky}, \quad J_{zC}\varepsilon = \sum M_{zC}(\vec{F}^e_k),$$

где a_{Cx}, a_{Cy} – проекции ускорения центра масс тела на координатные оси; F^e_{kx},

F_{ky}^{e} – проекции на оси координат внешних сил, действующих на тело; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси *z*, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение тела; $M_{zC}(\vec{F}_k^{e})$ – моменты внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс.

Проводя динамический расчет механической системы, следует рассматривать движение тел системы в отдельности, предварительно освободив их от связей и заменив действие связей реакциями. Далее на основании общих теорем динамики системы следует составить уравнения движения каждого тела.

5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы

Механизм состоит из трёх тел – груза 1, катка 2 и блока 3, соединенных нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями.

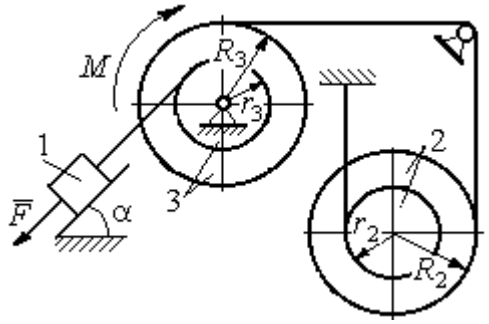
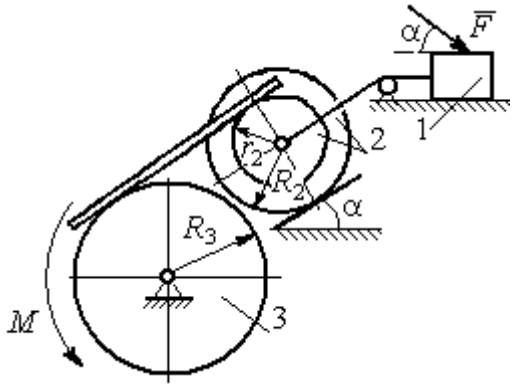
Движение механизма происходит в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Направление действия силы $\vec{F}$ определяется углом α. Качение катка 2 происходит без скольжения. Проскальзывание между дисками и соединяющими их невесомыми стержнями или нитями отсутствует.

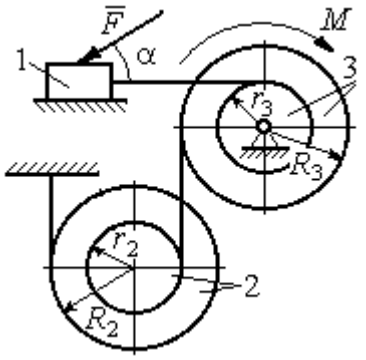
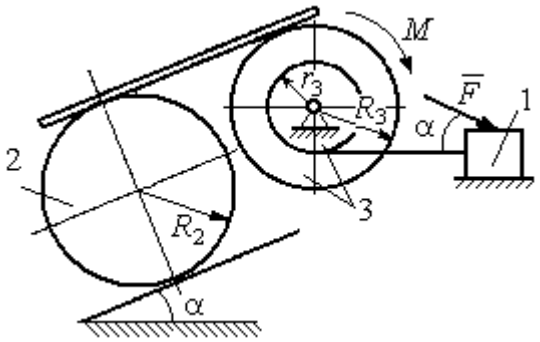
Радиусы ступеней катка 2 и блока 3 на схемах обозначены R_2, r_2 и R_3, r_3.

Сплошные диски считать однородными. Радиусы инерции неоднородных (ступенчатых) дисков относительно осей, проходящих через центры масс перпендикулярно плоскости движения, равны i_{z2}, i_{z3}.

Найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось блока 3.

Варианты заданий представлены на рис. 5.1, 5.2. Исходные данные приведены в табл. 5.1.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

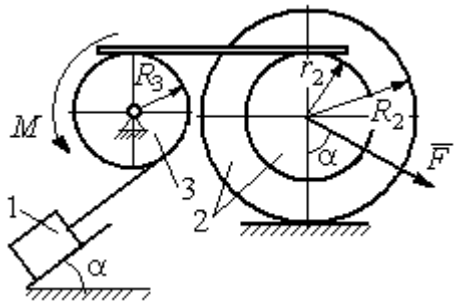
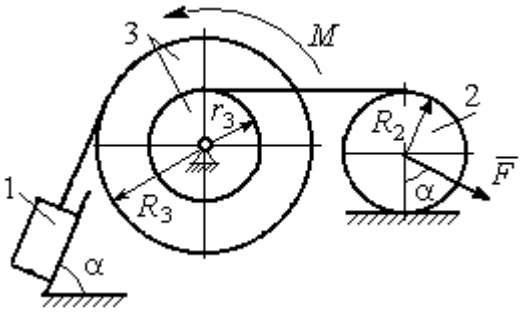
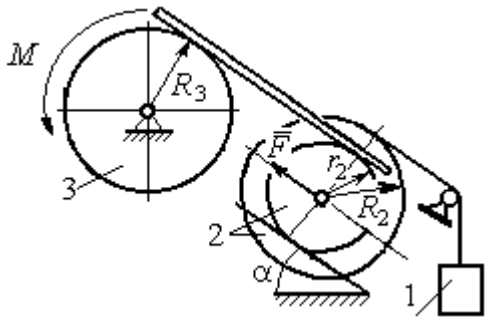
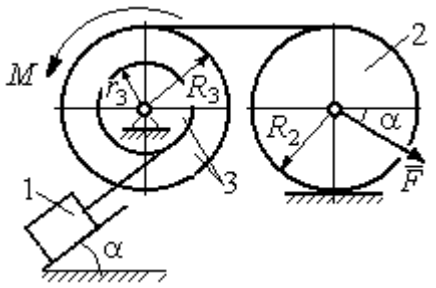
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.1. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д4

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

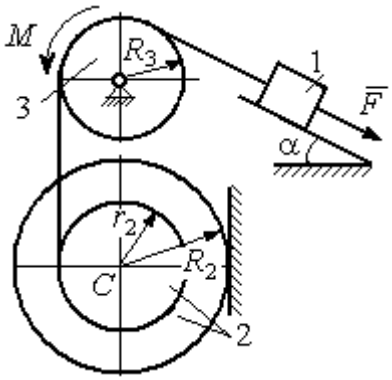
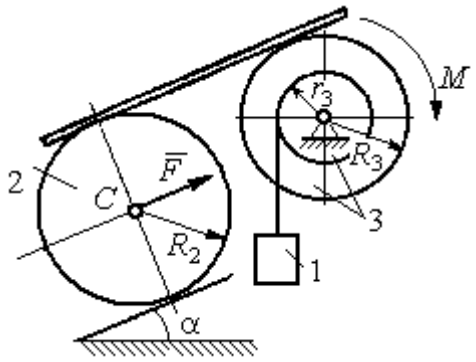
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 5.2. Задание Д4. Динамический расчёт механической системы.
Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.1

Исходные данные задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
1	P	P	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
2	$3P$	P	$3P$	$3P$	Pr	30	$2r$	r	$2r$	–	$2r$	–
3	$4P$	$3P$	$4P$	$2P$	$2Pr$	60	$2r$	r	$2r$	r	$2r$	$2r$
4	$2P$	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
5	P	$3P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	r	r	–	$2r$	–
6	P	$2P$	$4P$	$4P$	$6Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
7	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3Pr$	45	$3r$	r	r	-	$r\sqrt{3}$	–

Окончание табл. 5.1

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	R_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	i_{z2}, м	i_{z3}, м
8	$2P$	$3P$	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
9	$3P$	P	$3P$	P	$2Pr$	30	$2r$	r	$2r$	–	$r\sqrt{2}$	–
10	P	P	$3P$	P	$2Pr$	60	$3r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
11	P	P	$3P$	$2P$	$3Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$
12	$2P$	P	$2P$	$4P$	Pr	60	$3r$	r	$3r$	–	$r\sqrt{3}$	–
13	$3P$	P	$3P$	$3P$	$2Pr$	30	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
14	$2P$	P	$3P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$
15	P	$2P$	$4P$	P	$4Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$	–
16	P	$3P$	$4P$	$2P$	$3Pr$	30	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{2}$
17	P	P	$3P$	$2P$	$6Pr$	60	$3r$	r	$3r$	-	$r\sqrt{3}$	
18	$2P$	$2P$	$3P$	P	$3Pr$	60	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{2}$
19	$2P$	P	$2P$	$3P$	$4Pr$	30	$3r$	r	$3r$	–	$2r$	–
20	P	P	$3P$	P	$2Pr$	45	$2r$	–	$2r$	r	–	$r\sqrt{3}$
21	$2P$	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	60	$2r$	r	$3r$	r	$r\sqrt{2}$	$2r$
22	P	P	$2P$	$5P$	$2Pr$	45	$3r$	$2r$	$2r$	–	$2r$	–
23	$2P$	$2P$	$3P$	$3P$	$2Pr$	60	$3r$	r	$2r$	r	$2r$	$r\sqrt{2}$
24	$4P$	P	$3P$	P	$3Pr$	30	$2r$	–	$3r$	r	–	$r\sqrt{3}$
25	P	$3P$	$2P$	P	$2Pr$	60	$3r$	r	r	–	$r\sqrt{3}$	–
26	P	$3P$	$4P$	$3P$	$3Pr$	45	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{3}$
27	P	P	$4P$	$2P$	$4Pr$	30	$2r$	r	$2r$	-	$r\sqrt{3}$	
28	$2P$	$3P$	$3P$	P	$6Pr$	30	$2r$	–	$3r$	$2r$	–	$r\sqrt{2}$
29	$2P$	P	$2P$	$2P$	$2Pr$	45	$2r$	r	r	–	$2r$	–
30	P	P	$4P$	P	$4Pr$	60	$3r$	–	$3r$	$2r$	–	$2r$

Пример выполнения задания Д4. Динамический расчёт механической системы

Механизм (рис. 5.3) состоит из груза 1, однородного диска – катка 2 и неоднородного диска – блока 3, соединённых друг с другом нерастяжимыми нитями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя.

Движение происходит под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, равных по модулю: $P_1 = 2P$, $P_2 = 2P$, $P_3 = 3P$, силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс катка 2, равной по величине: $F = 3P$, и пары сил с моментом $M = Pr$,

приложенных к блоку 3. Механизм является неизменяемой механической системой. Радиус катка 2 $R_2 = 2r$. Качение катка по наклонной плоскости происходит без проскальзывания. Радиусы ступенчатого блока 3: $R_3 = 3r$, $r_3 = r$. Радиус инерции блока 3 $i_3 = r\sqrt{3}$.

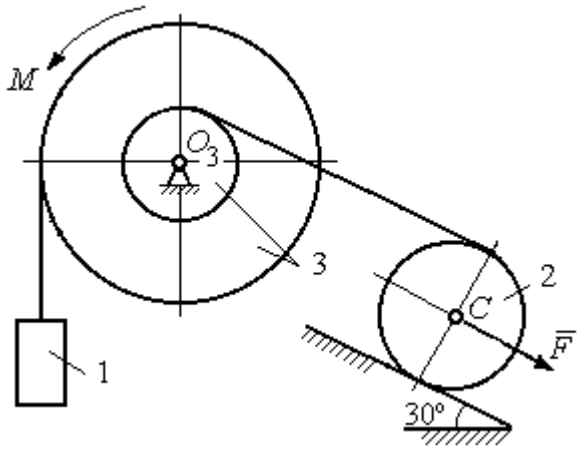


Рис. 5.3. Схема механической системы

Применяя метод динамического расчета механической системы найти ускорение груза 1 и динамические реакции, действующие на ось вращающегося блока 3.

Решение

Освобождаем систему от связей. На рис. 5.4 изображены внешние силы, действующие на каждое тело, после освобождения его от связей.

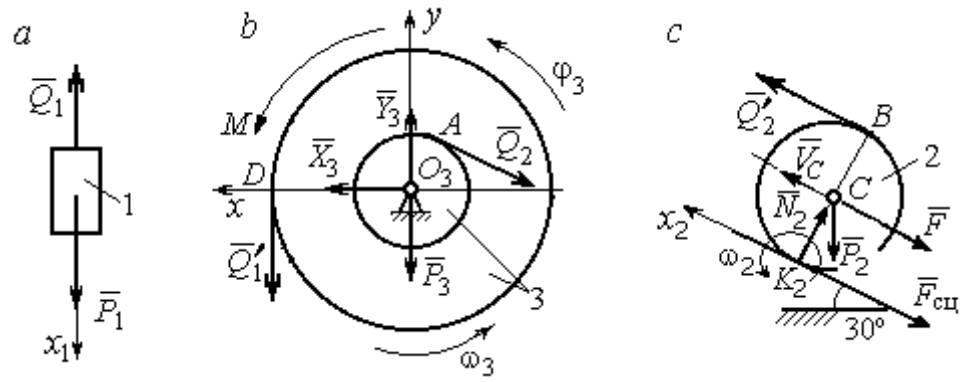


Рис. 5.4. Расчетные схемы для описания движения тел, входящих в систему:
a – поступательное движение груза 1; *b* – вращательное движение блока 3;
c – плоское движение катка 2

Груз 1 совершает поступательное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция нити $\vec{Q}_1$ (рис. 5.4, *a*). Предположим, груз 1 движется вниз, и направим ось x_1 в сторону движения груза.

Уравнение движения груза в проекции на ось x_1 в соответствии с теоремой о движении центра масс механической системы имеет вид:

$$m_1 a_1 = \sum F_{kx} = P_1 - Q_1 = 2P - Q_1,$$

где m_1, a_1 – соответственно, масса груза 1 и его ускорение, $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{2P}{g}$.

Блок 3 вращается вокруг неподвижной оси *z*, проходящей через его центр масс O_3, перпендикулярно плоскости диска. Направление вращения блока, соответствующее выбранному движению вниз груза 1, показано на рис. 5.4, *b* дуговой стрелкой ω_3.

На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, силы реакции подшипника $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, момент *M* и реакции нитей $\vec{Q}_1'$ и $\vec{Q}_2$ (см. рис. 5.4, *b*). При составлении уравнения вращательного движения блока 3 моменты сил считаем положительными, если они поворачивают блок в сторону его вращения.

Уравнение вращения блока 3 имеет вид:

$$J_{zO_3} \varepsilon_3 = \sum M_{zO_3}(F_k) = Q_1' R_3 + M - Q_2 r_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r,$$

где J_{zO_3} – момент инерции блока 3 относительно оси *z*; ε_3 – угловое ускорение диска 3, $J_{zO_3} = m_3 i_3^2 = \frac{P_3}{g}(r\sqrt{3})^2 = \frac{9Pr^2}{g}$.

Каток 2 совершает плоскопараллельное движение. К нему приложены сила тяжести $\vec{P}_2$, сила $\vec{F}$, реакция нити $\vec{Q}_2'$ и реакция наклонной плоскости, состоящая из нормальной реакции опоры $\vec{N}_2$ и силы сцепления катка с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$. Согласно принципу равенства действия и противодействия, модули сил $\vec{Q}_2$ и $\vec{Q}_2'$ равны. На рис. 5.4, *c* показаны направления действия сил, приложенных к диску 2. В соответствии с направлением движения груза 1, центр масс катка 2 движется вверх параллельно наклонной плоскости. Направление движения центра масс катка 2 показано направлением оси x_2. Направление вращения катка 2 показано дуговой стрелкой угловой скорости ω_2 (см. рис 5.4, *c*).

Плоскопараллельное движение катка 2 описывается уравнением движения его центра масс и уравнением вращения вокруг оси, проходящей через

центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Составляя уравнение движения, получим:

$$m_2 a_C = Q_2' - F - F_{\text{сц}} - P_2 \cos 60^\circ = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P,$$

$$J_C \varepsilon_2 = Q_2' R_2 + F_{\text{сц}} R_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r,$$

где m_2 – масса катка 2, $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{2P}{g}$; a_C, ε_2 – ускорение центра масс и угловое ускорение катка 2; J_C – момент инерции однородного катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска, $J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{P R_2^2}{g} = \frac{4 P r^2}{g}$. В уравнении вращательного движения диска момент силы считается положительным, если создаваемый им поворот направлен в сторону вращения диска,

К системе четырех уравнений, описывающих движения тел в системе, необходимо добавить уравнения связей. Если предположить, что скорость центра масс катка 2 равна V_C, то угловая скорость катка определится по формуле: $\omega_2 = \frac{V_C}{CK_2} = \frac{V_C}{R_2}$, где CK_2 – расстояние от центра масс катка 2 до его мгновенного центра скоростей (см. рис. 5.4, *c*). Продифференцировав по времени последнее равенство, получим уравнение связи между ускорением центра масс катка 2 и его угловым ускорением: $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{R_2} = \frac{a_C}{R_2} = \frac{a_C}{2r}$.

Скорость точки *B* катка 2 (см. рис. 5.4, *c*) $V_B = \omega_2 \cdot BK_2 = \frac{V_C}{R_2} 2R_2 = 2V_C$.

Точка *B* катка 2 и точка *A* блока 3 соединены нитью (см. рис. 5.3), поэтому их скорости равны. Приравняв скорости точек *A* и *B*, получим равенство: $2V_C = V_B = V_A = \omega_3 r_3 = \omega_3 r$, откуда $\omega_3 = \frac{2V_C}{r}$. После дифференцирования последнего выражения найдём соотношение между ускорениями: $\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r}$.

Скорость груза 1 связана со скоростью центра масс диска 2 следующим образом: $V_1 = V_D = \omega_3 R_3 = \dfrac{2V_C}{r} 3r = 6V_C$. Тогда $a_1 = 6a_C$.

В результате получены четыре уравнения, описывающие движение тел в системе:

$$\frac{2P}{g} a_1 = 2P - Q_1, \quad \frac{9Pr^2}{g} \varepsilon_3 = Q_1 3r + Pr - Q_2 r;$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 3P - F_{\text{сц}} - P, \quad \frac{4Pr^2}{g} \varepsilon_2 = Q_2 2r + F_{\text{сц}} 2r$$

и три уравнения связей: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_C}{2r}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{2a_C}{r}$, $a_1 = 6a_C$.

После подстановки уравнений связи в уравнения движения тел получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\frac{12P}{g} a_C = 2P - Q_1, \quad \frac{18P}{g} a_C = 3Q_1 + P - Q_2,$$

$$\frac{2P}{g} a_C = Q_2 - 4P - F_{\text{сц}}, \quad \frac{P}{g} a_C = Q_2 + F_{\text{сц}},$$

которая может быть решена любым известным из курса математики способом.

Например, исключив из первых двух уравнений величину Q_1, а из третьего и четвёртого уравнений – величину $F_{\text{сц}}$, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{54P}{g} a_C = 7P - Q_2, \; \frac{3P}{g} a_C = 2Q_2 - 4P,$$

откуда $a_C = \dfrac{10}{111} g$, $Q_2 = \dfrac{79}{37} P$. Величину натяжения нити Q_1 находим из первого уравнения исходной системы: $Q_1 = \dfrac{34}{37} P$.

Для вычисления динамической реакции R_3 оси блока 3 заметим, что центр масс блока 3 неподвижен и его ускорение равно нулю, $\vec{a}_{O_3} = 0$. Тогда уравнения движения центра масс блока 3 в проекциях на оси x, y имеют вид :

$$m_3 a_{O_3 x} = X_3 - Q_2 \cos 30^\circ = 0,\ m_3 a_{O_3 y} = Y_3 - Q_1 - P_3 - Q_2 \cos 60^\circ = 0,$$

где X_3, Y_3, – проекции реакции R_3 оси вращающегося блока 3 на оси x, y (см. рис. 5.4, *b*). Отсюда, с учетом значений $Q_1 = 0{,}919P$ и $Q_2 = 2{,}135P$, проекции динамической реакции оси блока 3: $X_3 = Q_2 \cos 30^\circ = 1{,}85P$, $Y_3 = Q_1 + P_3 + Q_2 \cos 60^\circ = 4{,}98P$. Полная величина динамической реакции оси блока 3: $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} = 5{,}31P$.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия тела при поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m V_C^2$, где m – масса тела; V_C – скорость центра масс тела. **Кинетическая энергия тела при вращательном движении** вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – угловая скорость тела. Для дисков с равномерно распределённой массой момент инерции относительно оси z, проходящей через центр масс: $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, где R – радиус диска. Для тел с неравномерно распределённой массой $J_z = m i_z^2$, где i_z – радиус инерции. **Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении:** $T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega^2$, где m – масса тела; V_C, ω – скорость центра масс и угловая скорость тела; J_{zC} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Работа постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$ на конечном прямолинейном перемещении S точки приложения силы: $A(F) = FS\cos\alpha$, где α – угол между вектором силы и перемещением. Если угол α острый, работа

положительна. Если тупой – отрицательна. При $\alpha = 90°$ сила перпендикулярна перемещению точки и работа силы равна нулю.

Работа пары сил с постоянным моментом M при повороте тела на конечный угол φ: $A = \pm M\varphi$, где φ – угол поворота тела. Работа считается положительной, если пара сил стремится повернуть тело в направлении его вращения, и отрицательной – в противном случае.

Мощностью силы $\vec{F}$ называют величину $N(F)$, равную скалярному произведению силы на скорость точки её приложения: $N(F) = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V\cos\alpha$, где V – скорость точки приложения силы; α – угол между вектором силы и вектором скорости точки приложения силы.

При плоском движении тела мощность силы выражается суммой скалярных произведений векторов: $N = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = F \cdot V_O\cos\alpha \pm F h_O \omega$, где $\vec{V}_O$ – вектор скорости точки, выбранной полюсом; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\vec{M}_O$ – вектор момента силы $\vec{F}$ относительно полюса; h_O – плечо силы $\vec{F}$ относительно полюса *O*.

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e) + \sum N(\vec{F}_k^i)$, где T – кинетическая энергия системы; $\sum N(\vec{F}_k^e)$, $\sum N(\vec{F}_k^i)$ – сумма мощностей, соответственно, внешних и внутренних сил.

Теорема об изменении кинетической энергии системы на конечном перемещении. Изменение кинетической энергии системы на её конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$, где T, T_0 – кинетическая энергия системы, соответственно, в текущем и начальном состояниях; $\sum A(\vec{F}_k^e)$, $\sum A(\vec{F}_k^i)$ – сум-

ма работ внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального состояния в текущее.

Механические системы, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, называются **неизменяемыми**. В неизменяемых системах сумма работ внутренних сил и, следовательно, сумма мощностей этих сил равны нулю. Поэтому для таких систем в теореме об изменении кинетической энергии достаточно учитывать только внешние силы.

5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Неизменяемая механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых нерастяжимой нитью или невесомым стержнем. Нити и стержни, соединяющие диски, параллельны плоскостям качения дисков. Качение дисков без скольжения. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует.

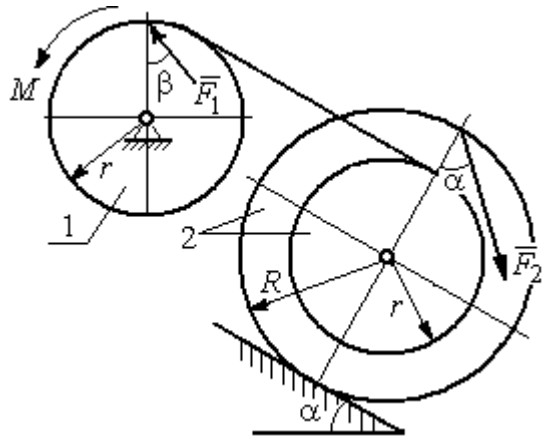
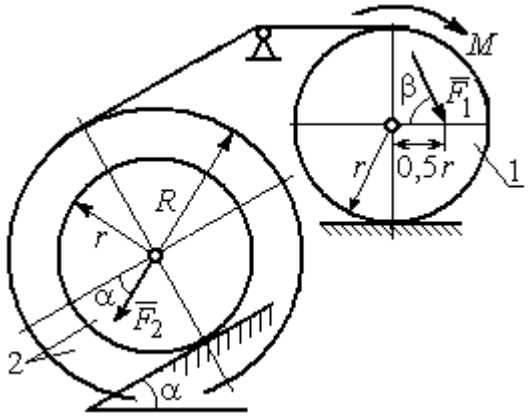
Вес дисков P_1 и P_2. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом *M*. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и наклон плоскости (если он есть) определяются углами α или β, показанными на схемах механизмов.

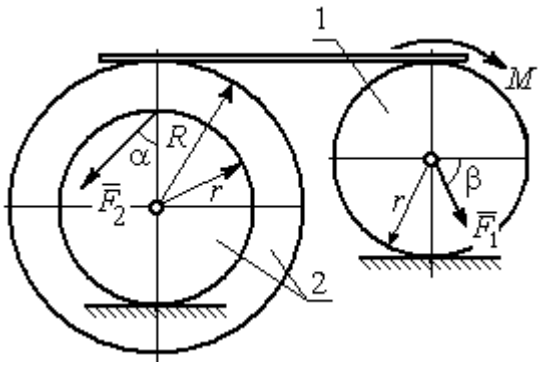
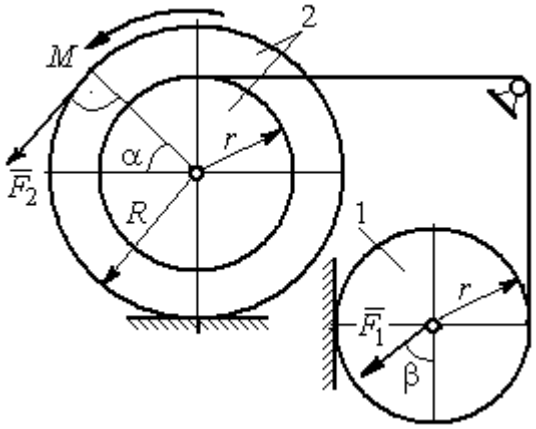
Радиус однородного диска *r*. Радиусы ступеней ступенчатого диска *R* и *r*. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

1. Найти ускорение центра масс диска 2.

2. Найти реакцию опоры диска 2 на плоскость (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с плоскостью).

Варианты задания приведены на рис. 5.5, 5.6, исходные данные представлены в табл. 5.2.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

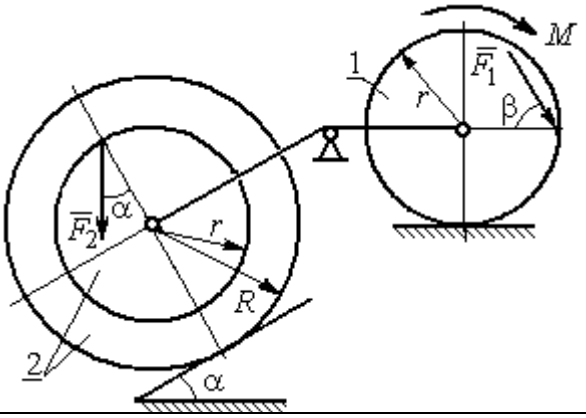
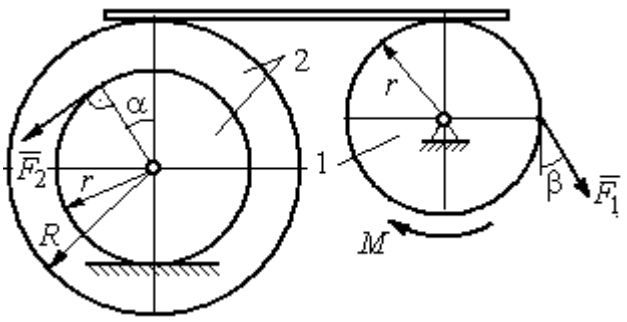
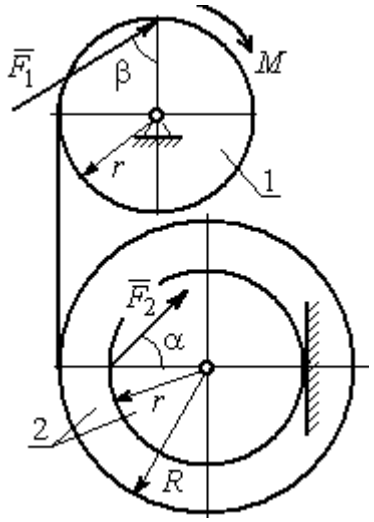
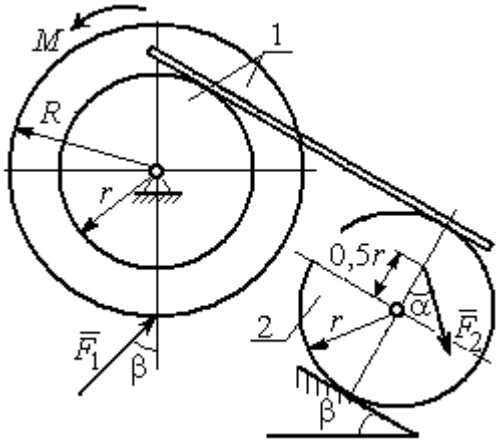
Вариант № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 5.5. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д5

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

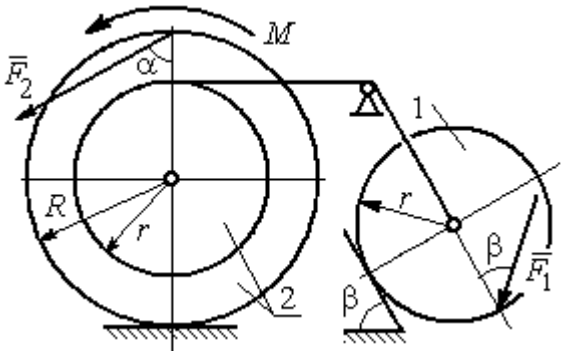
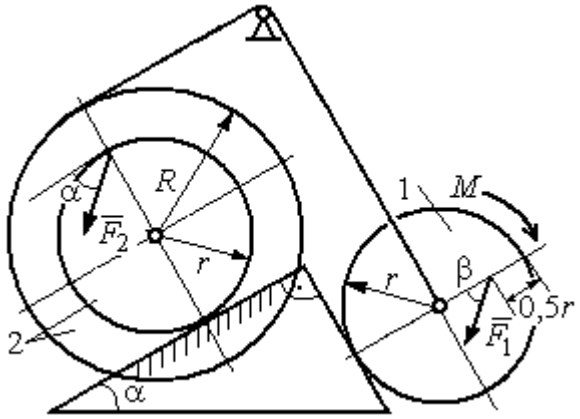
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты 10, 20, 30**
	

Рис. 5.6. Задание Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии. Варианты задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 5.2

Исходные данные задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	15	20	25	30	60	0,4	0,3	0,3
2	20	30	10	20	20	60	30	0,6	0,3	0,4
3	10	15	12	20	25	60	60	1,2	0,6	0,8
4	12	25	20	25	35	30	30	1,5	0,5	1,2

Окончание табл. 5.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	F_1, Н	F_2, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
5	15	20	10	20	30	60	30	0,8	0,4	0,7
6	18	20	18	22	22	45	60	1,2	0,4	0,9
7	15	25	10	8	20	45	45	0,9	0,6	0,7
8	25	22	10	12	30	45	60	1,0	0,8	0,9
9	12	25	18	10	32	30	30	0,8	0,6	0,7
10	10	15	8	10	28	60	30	1,4	0,7	1,2
11	15	22	20	25	30	60	45	0,6	0,4	0,5
12	20	25	15	40	30	30	60	0,8	0,4	0,6
13	10	20	10	25	30	45	30	1,0	0,5	0,9
14	12	15	18	15	25	30	30	0,9	0,3	0,8
15	20	25	20	20	30	45	60	1,0	0,5	0,8
16	10	15	10	15	16	60	45	1,2	0,4	1,1
17	18	25	12	10	30	30	30	1,5	0,9	1,3
18	25	20	10	15	20	60	60	0,8	0,5	0,7
19	12	25	10	10	32	60	60	1,2	0,9	1,1
20	15	20	8	20	25	30	45	0,8	0,4	0,7
21	10	25	25	15	30	45	30	0,7	0,5	0,6
22	18	20	20	20	35	60	45	1,4	0,7	0,9
23	10	15	10	30	30	30	30	1,4	0,7	0,8
24	10	15	12	20	20	30	30	1,2	0,4	0,8
25	12	18	20	18	30	60	30	1,2	0,6	1,1
26	10	12	12	15	15	30	30	0,9	0,3	0,8
27	15	22	10	12	20	45	60	0,8	0,6	0,7
28	22	20	8	16	8	30	45	0,6	0,2	0,4
29	18	25	10	8	32	60	60	1,2	0,8	1,1
30	20	25	8	20	28	30	30	0,8	0,4	0,6

Пример выполнения задания Д5. Исследование движения механической системы с применением теоремы об изменении кинетической энергии

Механическая система состоит из ступенчатого и однородного дисков, соединённых невесомым стержнем (рис. 5.7). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести, сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и пары сил с моментом M. Направления действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ определяются углами α и β.

Диск 1 вращается вокруг неподвижной оси O_1. Диск 2 катится прямолинейно по горизонтальной поверхности. Качение диска 2 без проскальзывания.

Невесомый стержень, соединяющий диски, расположен горизонтально. Скольжение между стержнем и дисками отсутствует.

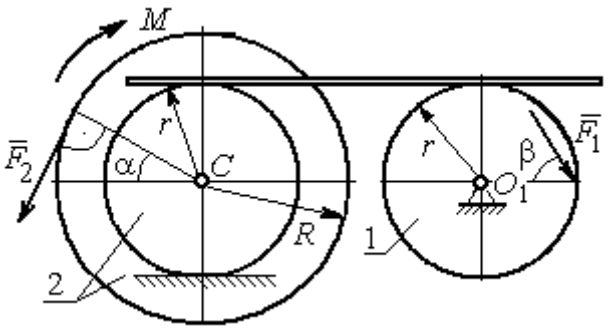


Рис. 5.7. Схема движения механической системы

Определить ускорение центра масс диска 2, угловое ускорение дисков, усилие в стержне, динамическую реакцию шарнира O_1, реакцию опоры диска 2 (её нормальную составляющую и силу сцепления диска с поверхностью качения), если модули сил тяжести $P_1 = 40$ Н, $P_2 = 60$ Н, модули сил $F_1 = 80$ Н, $F_2 = 30$ Н, величина момента $M = 35$ Н·м, углы наклона сил $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, радиусы дисков $R = 0{,}8$ м, $r = 0{,}6$ м, радиус инерции диска 2 $i_z = 0{,}4$ м.

Решение

Предположим, что во время движения системы диск 1 вращается по ходу часовой стрелки. Угловые скорости ω_1 и ω_2 дисков 1 и 2 и скорость центра масс диска 2 показаны на рис. 5.8.

На диск 1 действуют силы: $\vec{F}_1$, сила тяжести $\vec{P}_1$ и реакция шарнира O_1, разложенная на составляющие $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$. На диск 2: сила $\vec{F}_2$, сила тяжести $\vec{P}_2$, пара сил с моментом M, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сцепления диска 2 с поверхностью $\vec{F}_{сц}$. Направления действия сил показаны на рис. 5.8.

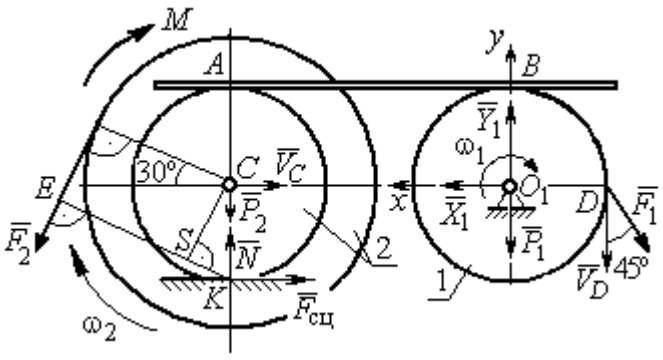


Рис. 5.8. Расчетная схема для исследования движения системы

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. По условию задачи рассматриваемая система неизменяемая и, следовательно, сумма мощностей внутренних сил равна нулю. В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы принимает вид $\frac{dT}{dt} = \sum N(\vec{F}_k^e)$, где T – энергия системы в текущем положении; $\sum N(\vec{F}_k^e)$ – суммарная мощность внешних сил.

Найдём кинетическую энергию системы и выразим её через скорость центра масс диска 2.

Кинетическая энергия вращательного движения диска 1: $T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2$, где ω_1 – угловая скорость диска 1; J_{zO_1} – осевой момент инерции диска 1, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$. Диск 2 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия определяется по формуле: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2$, где V_C, ω_2 – скорость центра масс и угловая скорость диска 2; J_{zC} – момент инерции ступенчатого диска 2 относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска, $J_{zC} = m_2 i_z^2$.

У диска 2 мгновенный центр скоростей находится в точке касания его с неподвижной поверхностью (точка *K* на рис. 5.8). Тогда скорость точки *C* определяется по формуле $V_C = \omega_2 \cdot CK = \omega_2 r$, откуда $\omega_2 = \frac{V_C}{r}$. Скорость точки *A* $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2 2r$, или $V_A = 2V_C$.

Так как нет проскальзывания между стержнем и дисками, скорость точки *A* на диске 2 равна скорости точки *B* на диске 1, причём $V_B = \omega_1 r$. Приравнивая скорости $V_B = V_A$, найдем $\omega_1 = \frac{2V_C}{r}$.

С учетом найденных зависимостей кинетические энергии дисков 1 и 2 и суммарная энергия системы имеют вид

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{zO_1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1 r^2}{2g} \left(\frac{2V_C}{r} \right)^2 = \frac{P_1}{g} V_C^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} i_z^2 \left(\frac{V_C}{r} \right)^2;$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) V_C^2 .$$

Производная по времени от кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = 2V_C \frac{dV_C}{dt} \left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g} \left(1 + \frac{i_z^2}{r^2} \right) \right].$$

Найдем сумму мощностей внешних сил. Отметим, что мощности силы тяжести $\vec{P}_1$ и сил реакции $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$ подшипника O_1 равны нулю, так как нет перемещения точек приложения этих сил. Мощности сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{сц}}$ – нормальной реакции опоры диска 2 и силы сцепления диска с плоскостью также равны нулю, так как точкой приложения этих сил является мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого равна нулю. Мощность силы $\vec{P}_2$ равна нулю, так как угол между вектором силы и скоростью точки приложения силы – точки C – равен 90° (см. рис. 5.8). Для определения мощности силы $\vec{F}_2$, приложенной к диску 2, воспользуемся формулой расчета мощности силы при плоскопараллельном движении тела. Выберем в качестве полюса точку K – мгновенный центр скоростей диска 2, скорость которого $V_K = 0$ (см. рис. 5.8). В этом случае мощность силы $\vec{F}_2$ равна: $N(\vec{F}_2) = \vec{M}_K \cdot \vec{\omega}_2 = -F_2 h_K \omega_2$, где $\vec{M}_K = M_K(\vec{F}_2)$ – вектор момента силы $\vec{F}_2$ относительно центра K; $\vec{\omega}_2$, ω_2 – вектор и модуль угловой скорости диска 2; h_K – плечо силы $\vec{F}_2$ относительно центра K. Мощ-

ность силы $\vec{F}_2$ отрицательная, так как направление момента силы $\vec{F}_2$ относительно точки K противоположно направлению угловой скорости диска 2.

В результате, мощность силы $\vec{F}_2$:

$$N(\vec{F}_2) = -F_2 h_K \omega_2 = -F_2(R + r\cos 60^\circ)\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Здесь $h_K = EK = ES + SK = R + r\cos 60^\circ$ (см. рис. 5.8).

Заметим, что для вычисления мощности силы F_2 можно использовать в качестве полюса центр масс диска – точку C. Имеем:

$$N(\vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_C + \vec{M}_C(F_2) \cdot \vec{\omega}_2 = F_2 V_C \cos 120^\circ - F_2 R\omega_2 = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right).$$

Момент M направлен в сторону вращения диска 2. Его мощность положительная: $N(M) = M\omega_2 = M\dfrac{V_C}{r}$. Мощность силы $\vec{F}_1$, приложенной в точке D, $N(\vec{F}_1) = F_1 V_D \cos 45^\circ = F_1 V_C \sqrt{2}$. Здесь учтено очевидное равенство $V_D = V_A = 2V_C$ (см. рис. 5.8).

Суммарная мощность внешних сил:

$$\sum N(F^e) = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2}.$$

В результате теорема об изменении кинетической энергии системы приводится к виду

$$2V_C\frac{dV_C}{dt}\left[\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{2g}\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right] = -F_2 V_C\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + M\frac{V_C}{r} + F_1 V_C\sqrt{2},$$

откуда ускорение центра масс диска 2:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt} = \frac{\left[-F_2\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{r}\right) + \frac{M}{r} + F_1\sqrt{2}\right]g}{\left[2P_1 + P_2\left(1 + \frac{i_z^2}{r^2}\right)\right]}.$$

Подставляя исходные данные задачи, получим: $a_C = 6{,}85$ м/с^2.

Для определения углового ускорения диска 2 продифференцируем по времени равенство $\omega_2 = \frac{V_C}{CK} = \frac{V_C}{r}$. Дифференцирование здесь допустимо, так как во время движения диска 2 расстояние от точки *C* до мгновенного центра скоростей диска 2 – точки *K* – не меняется.

Найдем $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\dot{V}_C}{r} = \frac{a_C}{r}$ = 11,42 рад/с^2. Угловое ускорение диска 1 находится путём дифференцирования равенства $\omega_1 = 2\omega_2$. Имеем: $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 22{,}84$ рад/с^2.

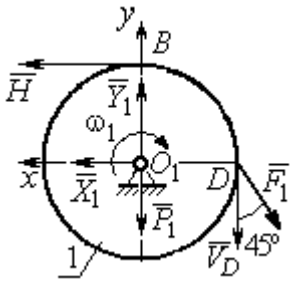


Рис. 5.9. Силы, действующие на диск 1 во время движения

Для того чтобы определить реакцию стержня, освобождаемся от стержня, заменяем его реакцией $\vec{H}$ и составляем уравнения движения дисков 1 и 2.

Силы, действующие на диск 1 во время движения, показаны на рис. 5.9. Уравнение вращательного движения диска 1 в алгебраической форме: $J_{zO_1}\varepsilon_1 = \sum M_z(\vec{F}_k^e)$, где ε_1 – угловое ускорение диска; J_{zO_1} – момент инерции диска 1 относительно оси *z*, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости диска, $J_{zO_1} = \frac{m_1 r^2}{2}$; $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e)$ – сумма моментов внешних сил относительно оси *z*.

Считая моменты сил положительными, если они создают поворот диска в сторону его вращения, составим сумму моментов внешних сил относительно оси *z*: $\sum M_{zO_1}(\vec{F}_k^e) = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$. В результате уравнение вращательного движения диска 1 принимает вид: $\frac{P_1 r^2}{2g}\varepsilon_1 = F_1 r\cos 45^\circ - Hr$.

Подставляя в уравнение исходные данные задачи с учетом найденного значения углового ускорения диска 1 ε_1 = 22,84 рад/с^2, найдем реакцию стержня *H* = 28,63 Н.

Для определения динамической реакции шарнира O_1 диска 1 применим теорему о движении центра масс. Выберем оси координат O_1x и O_1y, как показано на рис. 5.9, и составим уравнение движения центра масс диска 1 в проекциях на оси координат с учётом того, что сам центр масс неподвижен и его ускорение равно нулю.

Получим систему:

$$H + X_1 - F_1\sin 45^\circ = 0, \quad Y_1 - P_1 - F_1\cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда, с учётом найденной величины усилия в стержне $H = 28{,}63$ Н, находим составляющие динамической реакции шарнира: $X_1 = 27{,}94$ Н, $Y_1 = 96{,}57$ Н. Полная реакция шарнира $R_{O_1} = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = 100{,}53$ Н.

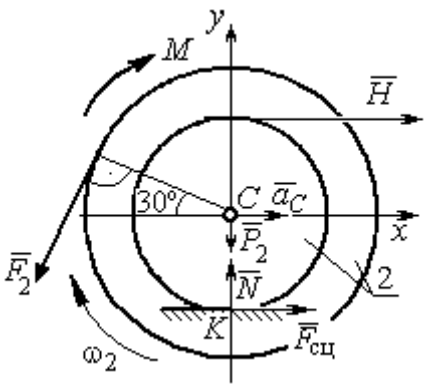


Рис. 5.10. Силы, действующие на диск 2 во время движения

Для определения величины силы сцепления диска 2 с поверхностью качения и нормальной составляющей реакции опоры диска используем теорему о движении центра масс. Силы, приложенные к диску 2, и выбранная система координат xCy показаны на рис. 5.10. Уравнения движения центра масс диска 2 в проекциях на оси x, y имеют вид:

$$m_2 a_C = H + F_{\text{сц}} - F_2\cos 60^\circ;$$

$$0 = -F_2\cos 30^\circ - P_2 + N.$$

С учетом найденных значений реакции стержня $H = 28{,}63$ Н и ускорения центра масс диска 2 $a_C = 6{,}85$ м/с^2, находим силу сцепления и нормальную реакцию опоры: $F_{\text{сц}} = 28{,}27$ Н, $N = 85{,}98$ Н.

Полная реакция опоры $R_K = \sqrt{N^2 + F_{\text{сц}}^2} = 90{,}51$ Н.

6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики

Силой инерции материальной точки называют векторную величину, модуль которой равен произведению массы точки на модуль её ускорения, направленную противоположно этому ускорению $\vec{R}^{\text{и}} = -m\vec{a}$, где m – масса точки; $\vec{a}$ – вектор ускорения точки.

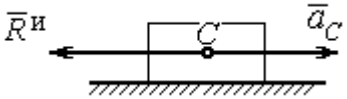


Рис. 6.1. Главный вектор сил инерции при поступательном движении твердого тела

При поступательном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к главному вектору сил инерции $\vec{R}^{\text{и}}$, равному по величине $R^{\text{и}} = ma_C$, приложенному в центре масс тела и направленному в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ (рис. 6.1).

При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс, главный вектор сил инерции, приведённый к центру масс тела, обращается в нуль (так как ускорение центра масс равно нулю). Таким образом, система сил инерции приводится к паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения. Величина главного момента сил инерции $M^{\text{и}} = J_z\varepsilon$, где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ε – угловое ускорение тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (рис. 6.2).

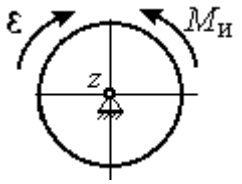


Рис. 6.2. Главный момент сил инерции при вращении тела вокруг оси, проходящей через центр масс

При плоскопараллельном движении тела с ускорением центра масс $\vec{a}_C$ и угловым ускорением ε система сил инерции, приложенных к каждой точке тела, приводится к силе $\vec{R}^{\text{и}}$, равной главному вектору сил инерции, и паре сил с моментом $\vec{M}^{\text{и}}$, равным главному моменту сил инерции относительно оси,

проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6.3). Главный вектор сил инерции равен по модулю произведению массы тела на ускорение его центра масс: $R^{и} = ma_C$, приложен в центре масс тела и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$ центра масс. Главный момент сил инерции равен по величине произведению момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, на угловое ускорение тела: $M^{и} = J_C\varepsilon$, где J_C – момент инерции тела. Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению (см. рис. 6.3).

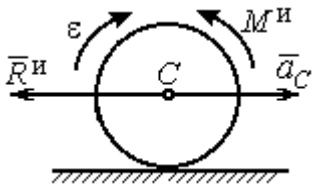


Рис. 6.3. Главный вектор и главный момент сил инерции при плоскопараллельном движении твердого тела

Принцип Даламбера для системы. Если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной. Принцип Даламбера даёт возможность составлять уравнения движения механической системы в виде уравнений равновесия:

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{и} = 0, \ \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_O^{и} = 0,$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешние силы, приложенные к системе; $\vec{R}^{и}$ – главный вектор сил инерции; $\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)$ – момент внешних сил, приложенных к системе, относительно произвольного центра *O*; $\vec{M}_O^{и}$ – главный момент сил инерции относительно центра *O*.

Силы, действующие на систему, можно подразделить на активные и реакции связей. **Идеальными связями** в механической системе называют такие связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма

элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$ – элементарная работа активных сил на возможном перемещении.

Совместное применение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений приводит к формулировке общего уравнения динамики.

Общее уравнение динамики. При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0$, где $\delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}})$, $\delta A(\vec{R}_k^{\text{и}})$ – элементарные работы активных сил и сил инерции, приложенных к системе, на её возможном перемещении.

При вычислении элементарных работ активных сил и сил инерции используют обычные формулы для вычисления работы сил на элементарном перемещении точек их приложения. При этом переменные силы на элементарном перемещении точек их приложения считаются постоянными.

6.2. Задание Д6. Исследование механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система с идеальными связями включает груз и два диска – однородного радиусом R или r и ступенчатого. Ступенчатый диск состоит из двух одноосных цилиндров радиусом R и r. Радиусы дисков указаны на схеме. Тела соединены нерастяжимыми нитями или невесомыми стержнями. Система движется в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием сил тяжести, постоянной силы $\vec{F}$, а также пары сил с переменным моментом M. Направление действия силы $\vec{F}$ и наклон плоскости движущихся тел определяются углами α и β. Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Качение дисков без проскальзывания. Скольжение между невесомым стержнем и дисками отсутствует. Движение грузов по плоскости без трения. Нити и стержни, соединяющие груз и диски, параллельны соответствующим плоскостям, по которым двигаются тела.

Найти уравнение движения центра масс диска 3. Определить реакцию шарнира диска 2 в момент времени $t = 1$ с.

Варианты задания приведены на рис. 6.4, 6.5. Исходные данные выбираются из табл. 6.1.

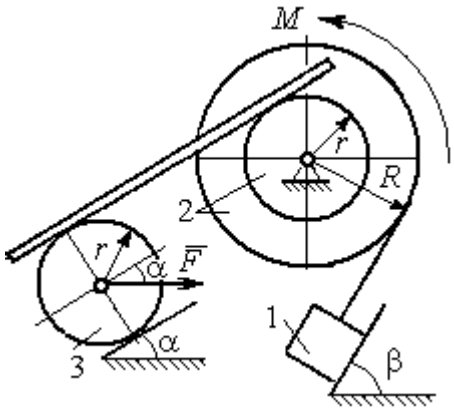
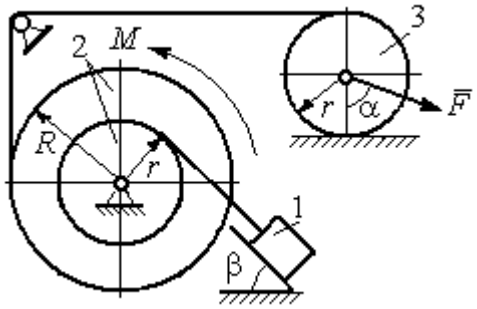
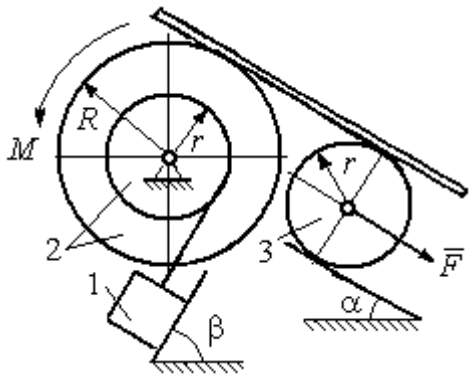
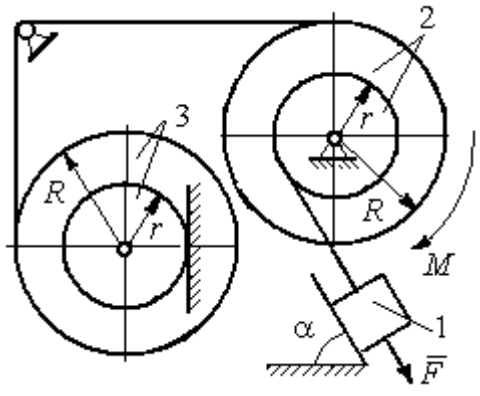
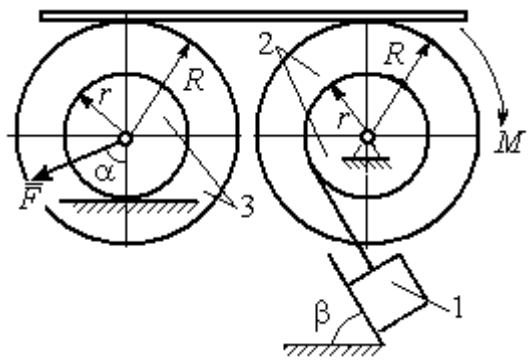
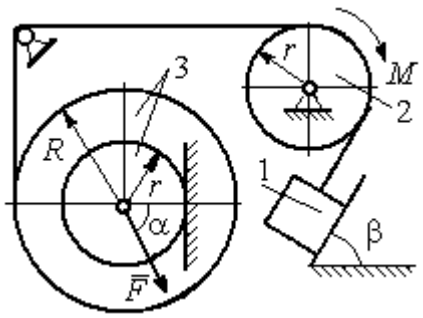
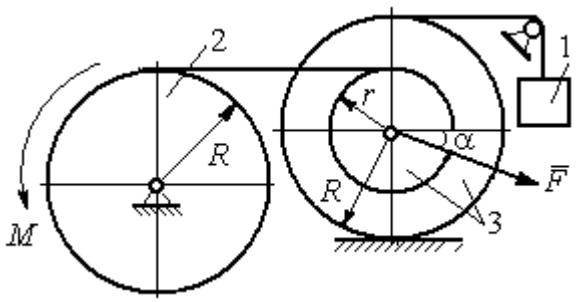
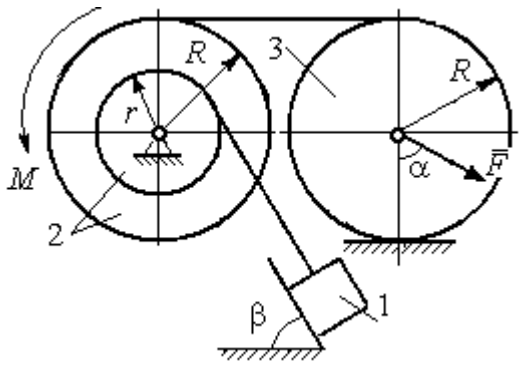
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	

Рис. 6.4. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики.
Номера вариантов задания 1 – 4, 11 – 14, 21 – 24

Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

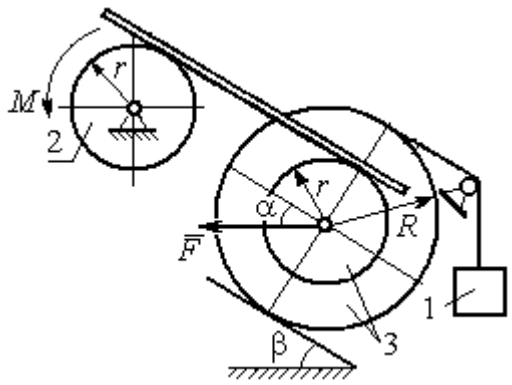
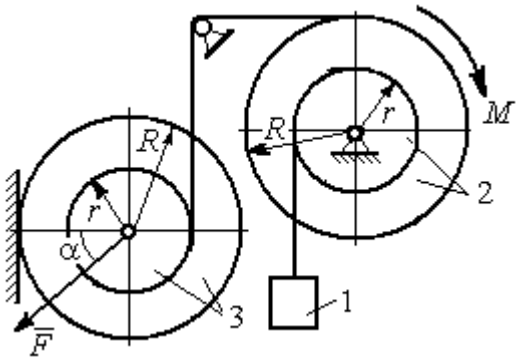
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.5. Задание Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики. Номера вариантов задания 5 – 10, 15 – 20, 25 – 30

Таблица 6.1

Исходные данные задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	α, град	β, град	R, м	r, м	i_z, м
1	10	20	8	20	$3(2+t^2)$	30	60	0,6	0,3	0,4
2	10	22	15	15	$4(t+3)$	30	30	0,8	0,4	0,6
3	5	18	10	6	$8(t^2+1)$	90	30	0,4	0,3	0,3
4	5	22	10	5	$14(t^2+t+1)$	30	–	0,6	0,5	0,6
5	5	20	16	9	$3(t^2+4)$	45	60	0,6	0,3	0,5
6	10	16	14	15	$4(5+t)$	60	30	1,0	0,6	0,8
7	6	20	20	8	$9(3t^2+2)$	45	–	0,8	0,6	0,8
8	16	25	15	12	$5(t^2+4)$	30	60	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	$4(3+5t)$	60	30	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	10	$5(3t+6)$	30	–	1,0	0,8	0,9
11	4	22	8	15	$2+ t^2$	45	45	0,8	0,4	0,6
12	15	18	15	10	$5(t+3)$	30	60	1,0	0,5	0,7
13	6	20	10	4	$5(t^2+2)$	30	60	0,6	0,5	0,4
14	10	25	15	8	$16(t+2)$	60	–	0,8	0,6	0,7
15	8	18	20	10	$6(t+2)$	30	90	1,2	0,6	1,0
16	8	18	12	12	$5(3+t^2)$	90	60	0,8	0,6	0,7
17	5	20	10	10	$2t^2+20$	60	–	0,9	0,6	0,8
18	20	15	20	15	$3(t+4)$	60	30	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	10	$4(3+t)$	45	45	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	6	$6(3t+4)$	45	–	1,0	0,6	0,9
21	15	25	12	12	$6+t^2$	60	60	0,6	0,3	0,5
22	20	22	18	15	$2(2t+9)$	45	45	0,8	0,4	0,6
23	8	24	12	8	$7(3t^2+2)$	30	45	0,8	0,5	0,6
24	12	20	18	10	$6(t+4)$	90	–	0,5	0,3	0,4
25	5	20	12	12	$9(2+t^2)$	60	30	1,4	0,7	1,2
26	10	12	10	8	$6(2+t)$	30	45	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	14	$8(2t^2+3)$	30	–	0,8	0,2	0,6
28	10	20	20	20	$3(t^2+3)$	45	30	0,6	0,3	0,5
29	10	18	8	12	$5(4+t+ t^2)$	30	60	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	15	$8(t^2+5)$	60	–	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д6. Исследование движения механической системы с применением общего уравнения динамики

Механическая система состоит из груза 1, движущегося поступательно, ступенчатого диска 2 (каток), катящегося по неподвижной поверхности цилин-

дрической ступенькой, и однородного диска 3 (блок), вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс блока (рис. 6.6). Качение катка 2 без проскальзывания, скольжение груза 1 – без трения. Движение системы происходит под действием сил тяжести, силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1 и пары сил с моментом M, приложенной к диску 3.

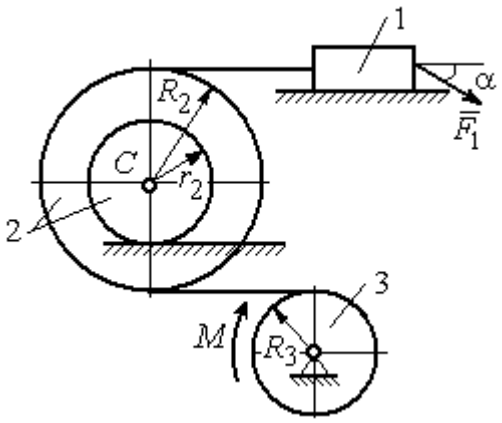


Рис. 6.6. Схема движения механической системы

Найти уравнение движения центра масс катка 2 если движение системы началось из состояния покоя. Определить реакцию шарнира диска 3 в момент t = 1 с, если: P_1 = 10 Н; $P_2 = 20$ Н; $P_3 =$ 15 Н; $F = 5(t+1)$ Н; $M = 6(1+2t)$ Н·м; R_2 = 0,8 м; r_2 = 0,2 м; R_3 = 0,4 м; i_{2C} = 0,6 м.

Решение

В рассматриваемой механической системе активными силами являются силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, сила $\vec{F}$ и пара сил с моментом M (рис. 6.7). Связи идеальные, так как скольжение груза 1 происходит по гладкой поверхности без трения, качение диска 2 без проскальзывания, а ось вращения блока 3 неподвижна.

Предположим, направление движения в системе задаёт пара сил с моментом M, приложенная к блоку 3. Обозначим ω_3, ε_3 – угловая скорость и угловое ускорение блока 3, V_C, a_C – скорость и ускорение центра масс катка 2, V_1, a_1 – скорость и ускорение груза 1. Направления векторов скоростей и ускорений точек и угловых скоростей и ускорений тел в соответствии с выбранным направлением движения системы показаны на рис. 6.7.

Общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = 0 .$$

Присоединим к телам системы силы инерции. Груз 1 движется поступательно. Главный вектор сил инерции груза 1 $\vec{R}_1^{\text{и}}$ приложен в центре масс груза и направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$ груза 1. Модуль главного вектора сил инерции груза 1 $R_1^{\text{и}} = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза 1; a_1 – величина ускорения груза 1.

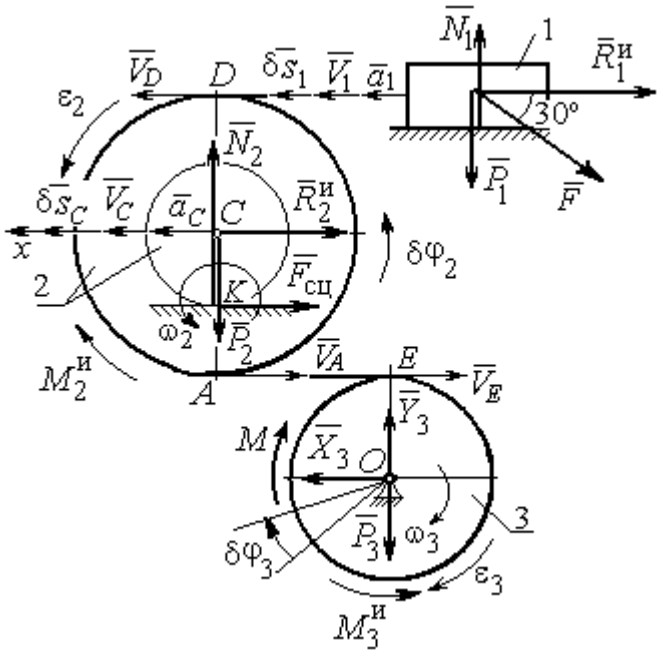


Рис. 6.7. Расчётная схема исследования движения механической системы

Система сил инерции катка 2, приводятся к силе, равной главному вектору сил инерции $\vec{R}_2^{\text{и}}$, приложенному в центре масс катка 2, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции $\vec{M}_2^{\text{и}}$ относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_C$, и составляет $R_2^{\text{и}} = m_2 a_C$, где m_2 – масса катка 2; a_C – величина ускорения центра масс. Главный момент сил инерции: $M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2$, где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения; ε_2 – угловое ускорение катка 2. Направлен главный момент сил инерции $M_2^{\text{и}}$ в сторону, противоположную угловому ускорению ε_2.

Главный вектор сил инерции, приложенных к блоку 3 и приведённых к центру масс блока, равен нулю, так как блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, и ускорение центра масс блока равно нулю. В результате силы инерции блока 3 приводятся к паре сил, момент которой ра-

вен главному моменту сил инерции $\vec{M}_3^{\text{и}}$ относительно оси вращения. Главный момент сил инерции блока 3 равен по величине $M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3$, где J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения; ε_3 – угловое ускорение блока 3, и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ε_3. Главные векторы и главные моменты сил инерции показаны на рис. 6.8.

Определим кинематические соотношения между скоростями точек системы и выразим их через скорость V_C центра масс катка 2. Каток 2 катится по неподвижной поверхности без скольжения. Мгновенный центр скоростей катка находится в точке *K* касания катка с поверхностью (см. рис. 6.7). Угловая скорость катка 2 $\omega_2 = \dfrac{V_C}{CK} = \dfrac{V_C}{r_2}$. Скорость точки *A* катка 2: $V_A = \omega_2 \cdot AK = \omega_2(R_2 - r_2) = V_C \dfrac{R_2 - r_2}{r_2}$. Скорость точки *E* блока 3 равна скорости точки *A* катка 2, $V_E = V_A$. Тогда угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{R_3} = \frac{V_A}{R_3} = V_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Скорость груза 1 равна скорости точки *D* катка 2:

$$V_1 = V_D = \omega_2 \cdot DK = \omega_2(R_2 + r_2) = V_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}.$$

Соотношения между ускорениями определяются путем дифференцирования установленных кинематических равенств:

$$a_1 = a_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_C}{r_2}, \quad \varepsilon_3 = a_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Для того чтобы найти соотношения между перемещениями, выразим кинематические равенства между скоростями в дифференциальном виде и, полагая, что действительное перемещение является возможным, т. е. $ds = \delta s$, $d\varphi = \delta\varphi$, получим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_1 = \delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2}, \ \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{r_2}, \ \ \delta\varphi_3 = \delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Сообщим системе возможное перемещение, совпадающее с действительным. Элементарная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы равна нулю, так как связи в системе идеальные.

Найдем элементарные работы активных сил и выразим их через перемещение центра масс катка 2. Прежде заметим, что элементарные работы сил тяжести груза 1 и катка 2 равны нулю, так как направления перемещений точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил:

$$\delta A(\vec{P}_1) = P_1 \delta s_1 \cos 90^\circ = 0, \ \delta A(\vec{P}_2) = P_2 \delta s_C \cos 90^\circ = 0.$$

Элементарная работа силы тяжести блока 3 равна нулю, так как точка приложения силы тяжести блока 3 не перемещается: $\delta A(\vec{P}_3) = 0$.

Элементарная работа пары сил с моментом M, приложенных к блоку 3:

$$\delta A(\vec{M}) = M\delta\varphi_3 = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}.$$

Элементарная работа силы $\vec{F}$:

$$\delta A(\vec{F}) = F\delta s_1 \cos 150^\circ = -F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) = \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}) = M\delta s_C \frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2} - F\delta s_C \frac{(R_2 + r_2)}{r_2} \cos 30^\circ =$$

$$= \left[6(1 + 2t)\left(\frac{0{,}8 - 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}2} \right) - 5(t + 1)\left(\frac{0{,}8 + 0{,}2}{0{,}2} \right) 0{,}866 \right] \delta s_C = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C.$$

Определим модули главных векторов и главных моментов сил инерции в зависимости от ускорения a_C центра масс катка 2:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1 (R_2 + r_2)}{g r_2} a_C, \quad R_2^{\text{и}} = m_2 a_C = \frac{P_2 a_C}{g},$$

$$M_2^{\text{и}} = J_{2C}\varepsilon_2 = m_2 i_{2C}^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} i_{2C}^2 \frac{a_C}{r_2},$$

$$M_3^{\text{и}} = J_{3O}\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3 = \frac{P_3 R_3^2}{2g}\frac{(R_2 - r_2)}{R_3 r_2}a_C = \frac{P_3 R_3 (R_2 - r_2)}{2g r_2}a_C,$$

где J_{2C} – момент инерции катка 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{2C} = m_2 i_{2C}^2$; i_{2C} – радиус инерции катка 2; J_{3O} – момент инерции блока 3 относительно оси вращения, проходящей через его центр масс, $J_{3O} = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Найдем элементарные работы сил инерции на возможном перемещении системы и выразим их в зависимости от перемещения δs_C центра масс катка 2:

$$\delta A(\vec{R}_1^{\text{и}}) = R_1^{\text{и}}\delta s_1 \cos 180^\circ = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{R}_2^{\text{и}}) = R_2^{\text{и}}\delta s_C \cos 180^\circ = -\frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C,\ \delta A(\vec{M}_2^{\text{и}}) = -M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = -\frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C;$$

$$\delta A(\vec{M}_3^{\text{и}}) = -M_3^{\text{и}}\delta\varphi_3 = -\frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C.$$

Сумма элементарных работ сил инерции:

$$\sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = -\frac{P_1 (R_2 + r_2)^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_2 a_C}{g}\delta s_C - \frac{P_2 i_2^2 a_C}{g r_2^2}\delta s_C - \frac{P_3 (R_2 - r_2)^2 a_C}{2 g r_2^2}\delta s_C =$$

$$= -\frac{a_C \delta s_C}{g}\left[\frac{10(0{,}8 + 0{,}2)^2}{0{,}2^2} + 20 + \frac{20 \cdot 0{,}6^2}{0{,}2^2} + \frac{15(0{,}8 - 0{,}2)^2}{2 \cdot 0{,}2^2}\right] = -52{,}75\, a_C \delta s_C,$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2.

С учетом проделанных вычислений общее уравнение динамики принимает вид:

$$\sum \delta A(\vec{F}_k^{\text{акт}}) + \sum \delta A(\vec{R}_k^{\text{и}}) = (23{,}35 + 68{,}35t)\delta s_C - 52{,}75\, a_C \delta s_C = 0,$$

откуда ускорение центра масс катка 2:

$$a_C = 0{,}44 + 1{,}29t.$$

Выберем ось x по направлению движения центра масс катка 2 (см. рис. 6.7). Проектируя вектор $\vec{a}_C$ ускорения точки C на ось x, получим дифференциальное уравнение $a_C = \ddot{x}_C = 0{,}44 + 1{,}29t$. Интегрируя дважды это уравнение, найдём закон движения: $x_C = 0{,}44\dfrac{t^2}{2} + 1{,}29\dfrac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$. Подставляя сюда начальные условия: $t = 0$, $V_C = 0$, $x_C = 0$, найдём константы интегрирования: $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно уравнение движения центра масс диска 2 представим в виде:

$$x_C = 0{,}22t^2 + 0{,}21t^3.$$

Рассмотрим вращательное движение блока 3, освободив его от связей. На блок действуют сила тяжести $\vec{P}_3$, реакция подшипника, разложенная на составляющие $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$, пара сил с моментом M и реакция нити $\vec{H}_3$ (см. рис. 6.8). Реакция нити, равная силе натяжения нити, приложена к блоку 3, направлена вдоль нити, связывающей каток 2 и блок 3. Присоединим к блоку 3 силы инерции. Направления сил, моментов пар сил и главного момента сил инерции, действующих на блок 3, показаны на рис. 6.8.

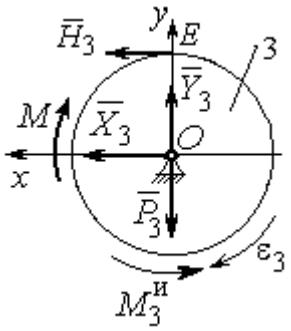


Рис. 6.8. Расчётная схема определения натяжения нити и реакции шарнира блока 3

По принципу Даламбера система сил, приложенных к блоку 3, включая силы инерции, находится в равновесии. Составим уравнение равновесия в виде равенства нулю суммарного момента всех сил (включая силы инерции) относительно оси вращения. Получим $M - H_3 R_3 - M_3^{и} = 0$, где $M_3^{и} = J_{3O}\varepsilon_3 = \dfrac{P_3 R_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2}$. Из уравнения находим величину натяжения нити:

$$H_3 = \frac{M}{R_3} - \frac{P_3 (R_2 - r_2) a_C}{2 g r_2} = \frac{6(1 + 2t)}{R_3} - \frac{P_3 (R_2 - r_2)}{2 g r_2}(0{,}44 + 1{,}29t) = 13{,}99 + 27{,}04t.$$

В момент времени $t = 1$ с натяжение нити: $H_3 = 41{,}04$ Н.

Так как главный вектор сил инерции блока 3 равен нулю, то составленные по принципу Даламбера уравнения равновесия блока 3 в виде проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси содержат только внешние силы. Имеем: $X_3 + H_3 = 0$, $Y_3 - P_3 = 0$ (см. рис. 6.8). Отсюда находим составляющие реакции шарнира блока 3 в момент времени t = 1 с: $X_3 = -H_3$= – 41,04 Н, $Y_3 = P_3$= 15 Н. Отрицательное значение горизонтальной составляющей реакции шарнира X_3 означает её противоположное направление.

Полная реакция шарнира $R_3 = \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}$ = 43,69 Н.

6.3. Уравнения Лагранжа II рода

Обобщенными координатами механической системы называется совокупность любых s независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$, однозначно определяющих положение системы в любой момент времени.

Если системе сообщить возможное перемещение, при котором все обобщенные координаты изменяются на элементарные (бесконечно малые) величины $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_S$, называемые вариациями обобщенных координат, то все действующие активные силы совершат элементарную работу, которая может быть представлена в виде $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_S$. Величина Q_k, равная коэффициенту при вариации δq_k обобщенной координаты, называется **обобщенной силой**, соответствующей данной обобщенной координате. Расчет обобщенных сил осуществляется путем последовательного придания системе возможных перемещений, при которых варьируется только одна из обобщенных координат, а вариации остальных координат равны нулю.

Для материальной системы с идеальными связями дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах – **уравнения Лагранжа II рода** – имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где T – кинетическая энергия системы; $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости; s – число степеней свободы системы.

6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус 1, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3. Радиусы ступеней ступенчатого диска и радиус однородного диска указаны на схеме.

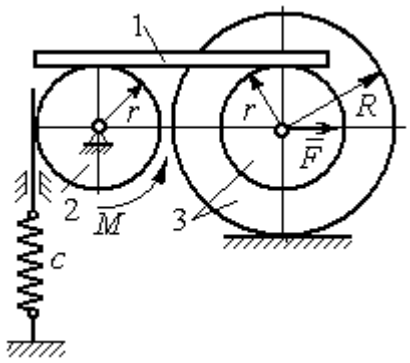
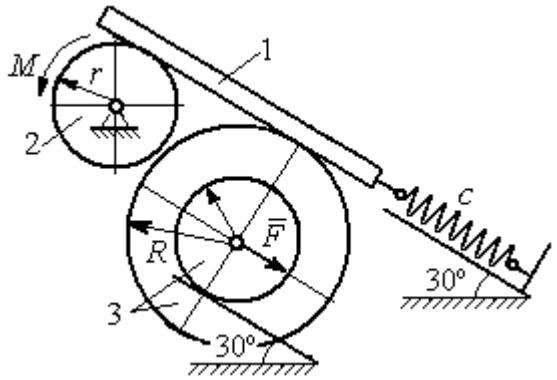
Качение катка 3 происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует. В задачах, где пружина соединяется с блоком 2, передача движения блоку 2 производится посредством невесомого стержня без скольжения.

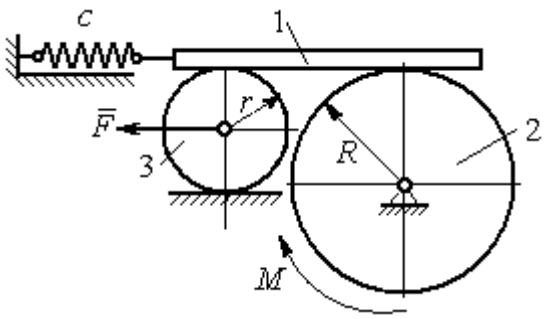
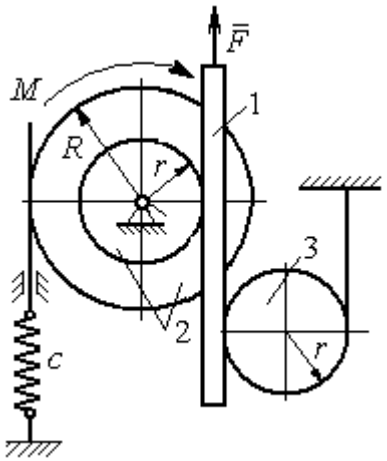
Радиус инерции ступенчатого диска относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равен i_z.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M.

Определить закон движения бруса 1 и закон угловых колебаний блока 2, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость ω_{20}, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Варианты заданий даны на рис. 6.9, 6.10. Варианты исходных данных в табл. 6.2. Отрицательные значения величин F или M в табл. 6.2 означают, что при заданных модулях силы или момента направление вектора силы $\vec{F}$ или момента M на схеме следует изменить на противоположные.

Варианты № 1, 11, 21	Варианты № 2, 12, 22
	

Варианты № 3, 13, 23	Варианты № 4, 14, 24
	

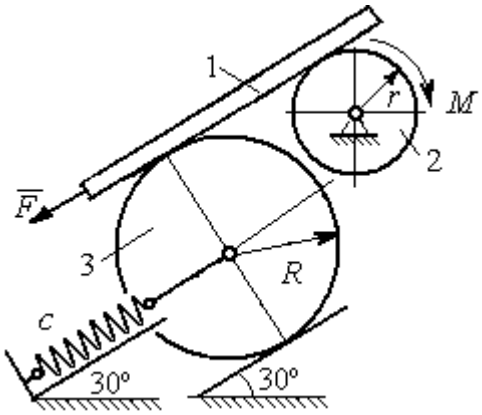
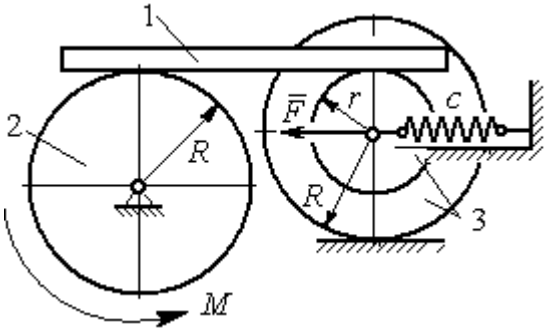
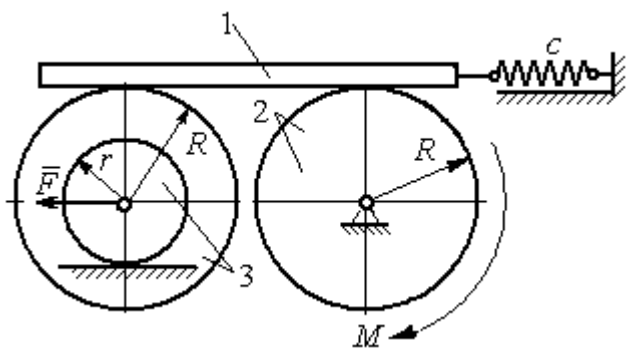
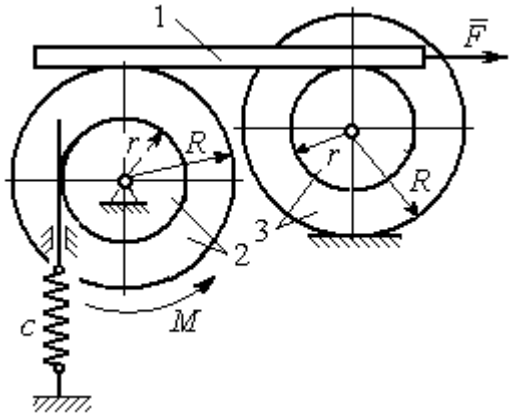
Варианты № 5, 15, 25	Варианты № 6, 16, 26
	

Рис. 6.9. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

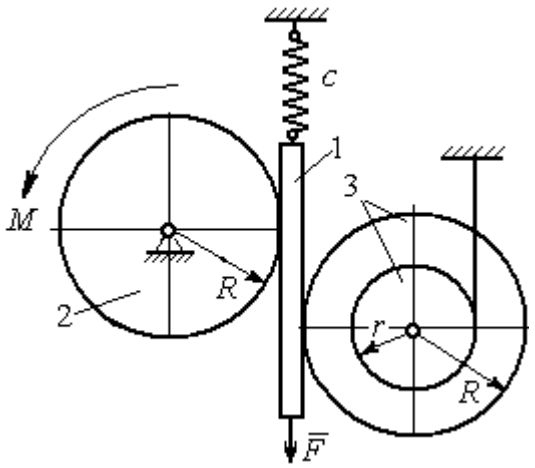
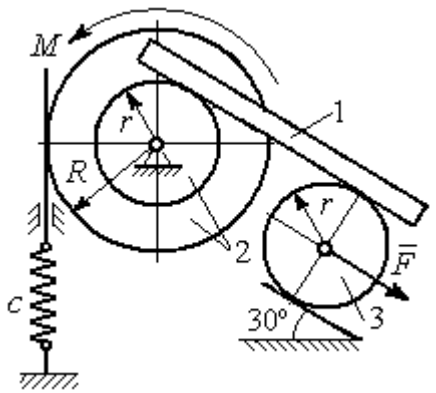
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.10. Задание Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.2

Исходные данные задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
1	8	12	18	15	3	50	0,3	0,6	0,3	0,4
2	10	8	15	12	5	55	0,4	0,8	0,5	0,6
3	5	18	10	8	4	60	0,2	0,5	0,3	–
4	5	20	12	10	6	70	0,5	0,6	0,5	0,6
5	5	8	16	8	8	65	0,2	0,6	0,3	–

Окончание табл. 6.2

Номер варианта задания	P_1, Н	P_2, Н	P_3, Н	F, Н	M, Н·м	c, Н/м	ω_{20}, рад/с	R, м	r, м	i_z, м
6	8	10	14	6	2	50	0,1	1,0	0,6	0,8
7	10	12	15	12	3	65	0,2	0,8	0,6	0,7
8	12	15	15	6	2	50	0,3	1,2	0,6	0,8
9	5	20	12	8	4	75	0,1	0,6	0,4	0,5
10	6	25	8	5	12	60	0,4	1,0	0,8	0,9
11	4	10	12	–10	–2	60	0,2	0,8	0,4	0,6
12	5	8	15	–8	3	50	0,5	1,0	0,5	0,7
13	6	15	8	–12	–4	65	0,4	0,6	0,5	–
14	10	25	10	6	10	55	0,1	0,8	0,6	0,7
15	8	6	20	–10	2	70	0,2	1,2	0,6	–
16	10	12	12	–5	6	60	0,3	0,8	0,6	0,7
17	12	16	12	–6	–2	55	0,4	0,9	0,6	0,8
18	10	20	20	10	4	60	0,1	0,8	0,4	0,7
19	8	20	12	–10	6	65	0,2	1,2	0,4	0,8
20	12	20	10	–3	6	50	0,24	1,0	0,6	0,9
21	5	12	15	12	–3	55	0,3	0,6	0,5	0,55
22	10	15	18	6	–2	65	0,1	0,8	0,4	0,6
23	8	20	12	–8	2	45	0,2	0,8	0,6	–
24	12	20	18	–4	–8	70	0,4	0,5	0,3	0,4
25	6	10	15	–6	–2	60	0,1	1,4	0,7	–
26	8	12	10	10	–3	65	0,2	1,2	0,8	0,9
27	6	18	16	5	–3	70	0,2	0,8	0,2	0,6
28	8	12	12	–6	2	65	0,3	0,6	0,3	0,5
29	10	18	20	–10	4	60	0,2	1,2	0,8	0,9
30	8	18	10	8	6	75	0,1	1,0	0,8	0,9

Пример выполнения задания Д7. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа

Механическая система состоит из трёх тел – бруса 1, блока 2, катка 3 и невесомой пружины жесткостью c. Брус, соединяющий каток 3 с блоком 2, расположен параллельно линии качения катка 3 (рис. 6.11). Радиусы ступеней ступенчатого диска R и r, радиус однородного диска r. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом M. Движение катка 3 по неподвижной поверхности происходит без проскальзывания. Скольжение между брусом и дисками отсутствует.

Передача движения от пружины блоку 2 производится посредством невесомого вертикального стержня без скольжения. Радиус инерции блока 2 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, i_z.

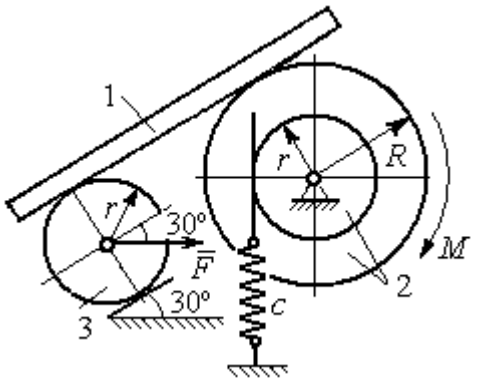


Рис. 6.11. Механическая система с одной степенью свободы

Исходные данные задачи: $P_1 = P$ Н, $P_2 = 2P$ Н, $P_3 = P$ Н, $F = 2P$ Н, $M = Pr$ Н·м, $R = 1{,}5r$ м, $i_z = r\sqrt{2}$ м, $c = P/r$ Н/м.

Определить законы движения блока 2 и бруса 1 при $P = 10$ Н, $r = 0{,}2$ м, если в начальный момент пружина находилась в нерастянутом состоянии, а блоку 2 придали угловую скорость $\omega_0 = 0{,}5$ рад/с, направленную в сторону заданного момента пары сил.

Решение

Рассматриваемая механическая система (рис. 6.11) имеет одну степень свободы, так как в системе не допускается независимое друг от друга движение тел. В качестве обобщённой координаты q выберем перемещение x верхнего края пружины, отсчитываемого от уровня, при котором пружина длиной l_0 находилась в нерастянутом состоянии (рис. 6.12). Обобщённая скорость $\dot{q} = \dot{x}$.

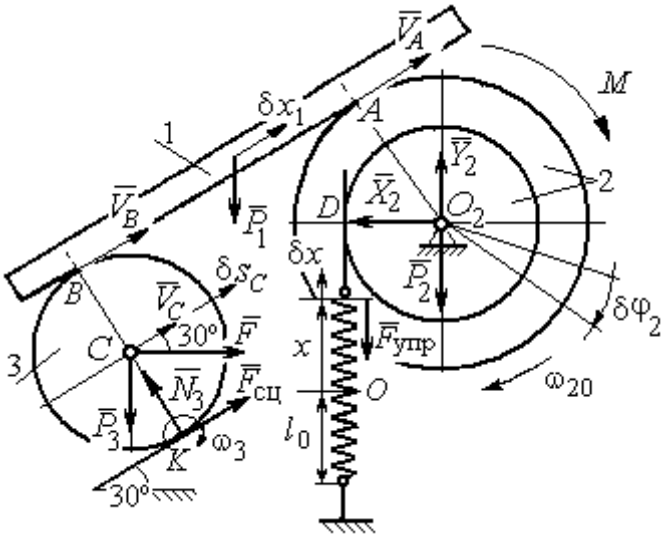


Рис. 6.12. Расчётная схема колебаний механической системы с одной степенью свободы

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее движение системы с одной степенью свободы, имеет вид $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x$, где T –

кинетическая энергия системы, Q_x – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате *x*.

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий бруса, блока и катка: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Кинетическая энергия поступательного движения бруса 1: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, где m_1, V_1 – масса и скорость бруса. Энергия вращательного движения блока 2: $T_2 = \frac{1}{2} J_{2z} \omega_2^2$, где ω_2 – угловая скорость блока, J_{2z} – момент инерции блока 2 относительно оси *z*, $J_{2z} = m_2 i_z^2$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия $T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{zC} \omega_3^2$, где V_C – скорость центра масс катка 3; J_{zC} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $J_{zC} = \frac{1}{2} m_3 r^2$; *r* – радиус катка; ω_3 – угловая скорость катка.

Выразим скорость V_1 бруса 1, угловые скорости ω_2, ω_3 блока 2 и катка 3, а также скорость V_C центра масс катка 3 через обобщённую скорость $\dot{x}$.

Заметим, что скорость точки *D* блока 2 равна скорости верхнего края пружины $V_D = \dot{x}$. Угловая скорость блока 2 $\omega_2 = \frac{V_D}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$. Скорость бруса 1 равна скорости точки *A* блока 2 и вычисляется по формуле $V_1 = V_A = \omega_2 R = \frac{\dot{x} R}{r}$. Так как брус совершает поступательное движение, то $V_B = V_1$. Угловая скорость катка 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{2r} = \frac{V_1}{2r} = \frac{\dot{x} R}{2r^2}$. Здесь при определении угловой скорости катка 3 учтено, что точка *K* касания катка 3 с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей катка. Скорость центра катка 3 $V_C = \frac{V_B}{2} = \frac{\dot{x} R}{2r}$.

Подставляя исходные данные задачи с учётом найденных кинематических соотношений, получим кинетическую энергию тел системы

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V_1^2=\frac{P}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{r}\right)^2=1{,}125\frac{P}{g}\dot{x}^2,\ \ T_2=\frac{1}{2}J_{2z}\omega_2^2=\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(r\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2=2\frac{P}{g}\dot{x}^2,$$

$$T_3=\frac{1}{2}m_3V_C^2+\frac{1}{2}J_{zC}\omega_3^2=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{\dot{x}R}{2r^2}\right)^2=0{,}422\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы:

$$T=T_1+T_2+T_3=3{,}547\frac{P}{g}\dot{x}^2.$$

Произвольное положение системы определяется обобщённой координатой *x*, показывающей растяжение пружины. Дадим пружине, находящейся в произвольном положении, возможное (бесконечно малое) перемещение δx в положительном направлении оси *x* (см. рис. 6.12). При этом блок 2 повернётся на угол $\delta\varphi_2$: $\delta\varphi_2=\frac{\delta x}{r}$, брус 1 переместится на расстояние δx_1: $\delta x_1=\frac{\delta xR}{r}$, центр масс катка 3 сдвинется на расстояние δS_C: $\delta S_C=\frac{\delta xR}{2r}$. Все перемещения получены из установленных ранее кинематических соотношений и показаны на рис. 6.12.

При заданном возможном перемещении системы работу совершают силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ бруса 1 и катка 3, пара сил с моментом *M*, сила $\vec{F}$ и сила упругости пружины (см. рис. 6.12). Элементарная работа вращающего момента *M*, приложенного к блоку 2, будет $\delta A(M)=M\delta\varphi_2=M\frac{\delta x}{r}$. Работа силы тяжести бруса 1 определяется равенством $\delta A(P_1)=P_1\delta x_1\cos120^\circ=-P_1\delta x_1\cos60^\circ=-\frac{P_1\delta xR}{2r}$. Работы силы тяжести катка 3 и силы *F*: $\delta A(P_3)=P_3\delta s_C\cos120^\circ=-P_3\frac{\delta xR}{4r}$, $\delta A(F)=F\frac{\delta xR}{2r}\cos30^\circ$. Модуль силы упругости пружины, растянутой из неде-

формированного положения на расстояние x: $F_{\text{упр}} = cx$. Сила $\vec{F}_{\text{упр}}$ упругости направлена в сторону, противоположную растяжению (см. рис. 6.12). Работа силы упругости при перемещении вдоль линии действия на расстояние δx вычисляется по формуле $\delta A(\vec{F}_{\text{упр}}) = F_{\text{упр}}\delta x\cos 180^\circ = -cx\delta x$.

Сумма работ сил на рассматриваемом возможном перемещении системы с учётом данных задачи составляет

$$\delta A = \delta A(M) + \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(F) + \delta A(F_{\text{упр}}) =$$

$$= M\frac{\delta x}{r} - \frac{P_1\delta xR}{2r} - P_3\frac{\delta xR}{4r} + F\frac{\delta xR}{2r}\cos 30^\circ - cx\delta x = P(1{,}174 - 5x)\delta x,$$

откуда обобщённая сила $Q_x = P(1{,}174 - 5x)$.

Составим уравнения Лагранжа. Вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенной скорости $\dot{x}$ и координате x: $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 7{,}094\frac{P}{g}\dot{x}$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Определим полную производную по времени: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x}$. Результаты расчетов подставим в уравнения Лагранжа II рода и получим дифференциальное уравнение колебаний верхнего края пружины:

$$7{,}094\frac{P}{g}\ddot{x} = P(1{,}174 - 5x), \text{ или при } g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,\ \ddot{x} + 6{,}91x = 1{,}62.$$

Решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного: $x = x_{\text{одн}} + x_{\text{частн}}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_{\text{одн}} = C_1\sin kt + C_2\cos kt$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные; k – круговая частота собственных колебаний пружины, $k = \sqrt{6{,}91} = 2{,}63$ рад/с. Частное решение неоднородного уравнения ищется в виде константы $x_{\text{частн}} = b$. Подставив его в уравнение колебаний, получим $b = 0{,}23$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1\sin 2{,}63t + C_2\cos 2{,}63t + 0{,}23$.

Произвольные постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий. По условию задачи в начальный момент пружина была в нерастянутом состоянии. Тогда начальная координата пружины (её верхнего края) $x(0) = 0$. Скорость верхнего края пружины в начальный момент времени $\dot{x}(0)$ равна начальной скорости $V_D(0)$ точки *D* блока 2. Поскольку в начальный момент времени блоку 2 сообщили угловую скорость ω_{20}, то $\dot{x}(0) = V_D(0) = \omega_{20} r = 0{,}1$ м/с.

Подставляя значение начальной координаты в общее решение неоднородного уравнения при $t = 0$, получим $C_2 = -0{,}23$.

Вычисляем скорость движения пружины, взяв производную: $\dot{x}(t) = 2{,}63C_1 \cos 2{,}63t - 2{,}63C_2 \sin 2{,}63t$. Подставляя начальное значение скорости, получим $C_1 = 0{,}038$. Окончательно уравнение движения верхнего края пружин: $x(t) = 0{,}038 \sin 2{,}63t - 0{,}23 \cos 2{,}63t + 0{,}23$ м.

Уравнения колебательных движений бруса 1 и блока 2 найдём из ранее полученных кинематических соотношений:

$$x_1 = \frac{xR}{r} = 1{,}5\, x(t) = 0{,}057 \sin 2{,}63t - 0{,}34 \cos 2{,}63t + 0{,}34 \text{ м};$$

$$\varphi_2 = \frac{x}{r} = 5\, x(t) = 0{,}19 \sin 2{,}63t - 1{,}15 \cos 2{,}63t + 1{,}15 \text{ рад}.$$

Амплитуда колебаний бруса $A = \sqrt{0{,}057^2 + 0{,}34^2} = 0{,}35$ м.

6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система, состоящая из четырёх тел, из состояния покоя движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$, силы $\vec{F}$ и пары сил с моментом *M*. Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания, скольжение грузов по поверхностям – без трения. Радиусы дисков одинаковы и равны *R*. Найти уравнения движения системы в обоб-

щённых координатах. Варианты заданий и рекомендуемые обобщённые координаты даны на рис. 6.13, 6.14, варианты исходных данных – в табл. 6.3.

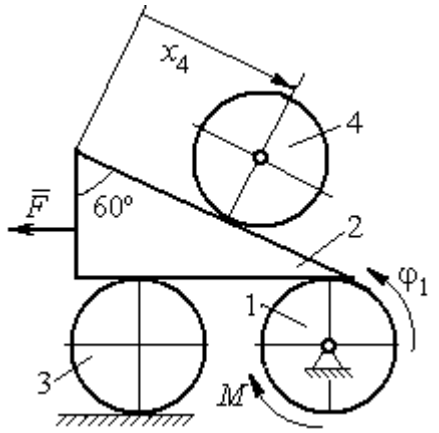
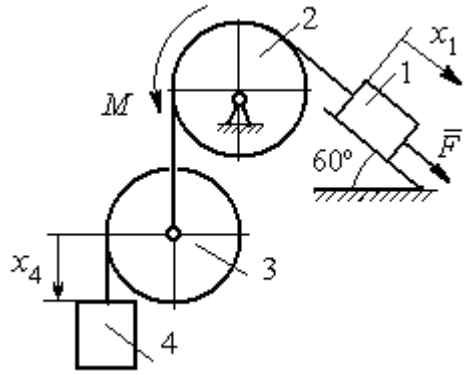
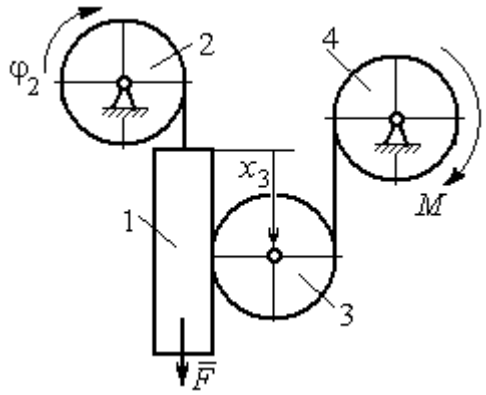
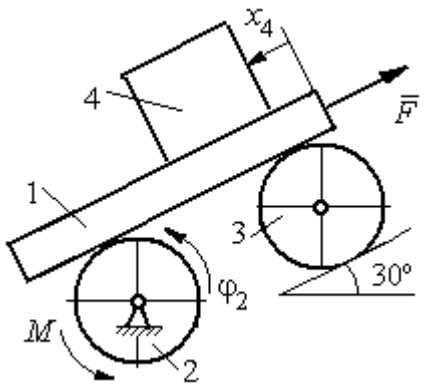
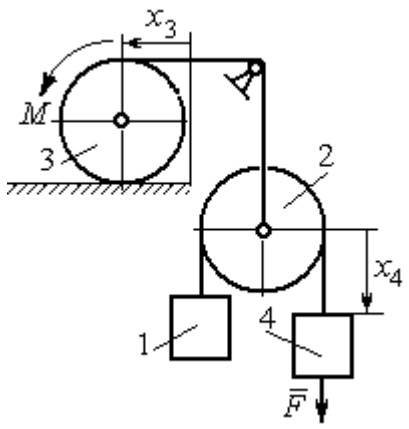
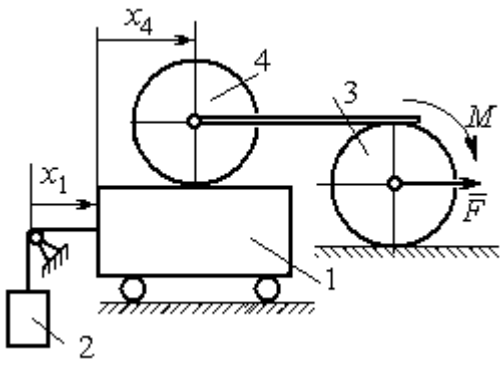
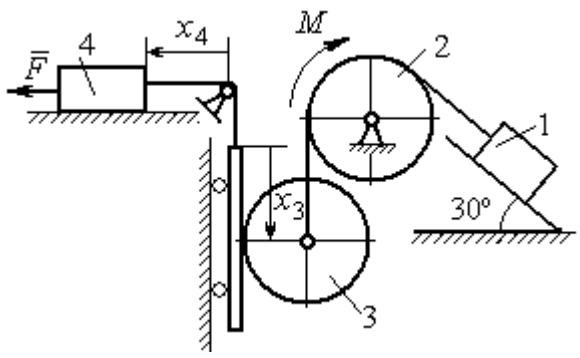
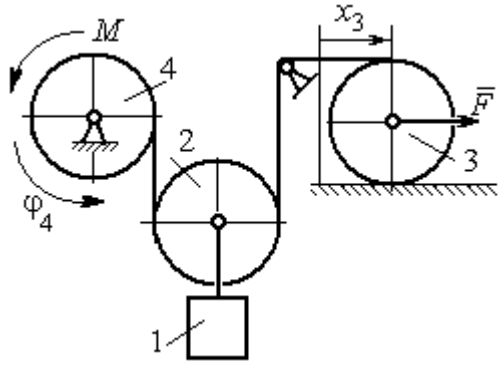
Варианты № 1, 11, 21	**Варианты № 2, 12, 22**
	
Варианты № 3, 13, 23	**Варианты № 4, 14, 24**
	
Варианты № 5, 15, 25	**Варианты № 6, 16, 26**
	

Рис. 6.13. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 1 – 6, 11 – 16, 21 – 26

Окончание вариантов задания Д8

Варианты № 7, 17, 27	**Варианты № 8, 18, 28**
	

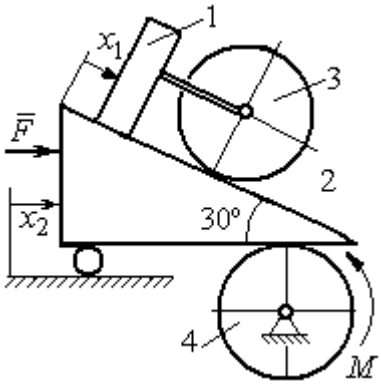
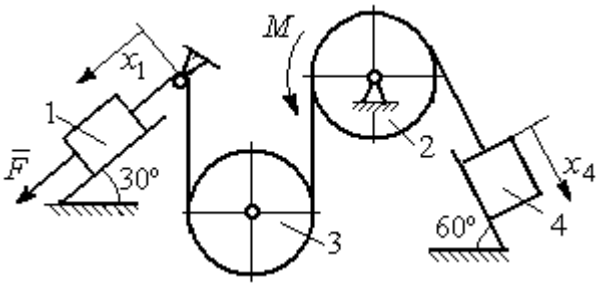
Варианты № 9, 19, 29	**Варианты № 10, 20, 30**
	

Рис. 6.14. Задание Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы. Номера вариантов задания 7 – 10, 17 – 20, 27 – 30

Таблица 6.3

Исходные данные задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Номер варианта задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P_1, Н	P	$2P$	P	$1{,}5P$	P	$3P$	P	$1{,}2P$	$3P$	P	$2P$	P	P	$2P$	P
P_2, Н	$3P$	$3P$	$4P$	$3P$	$2P$	P	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$3P$	$4P$	$3P$
P_3, Н	$2P$	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	$3P$	P	$2P$	$3P$	$2P$	$2P$	$2P$	P	$2P$
P_4, Н	$2P$	P	P	$2P$	$3P$	$3P$	P	P	$2P$	P	P	P	$2P$	$2P$	$2P$
R, м	$2r$	$1{,}5r$	$2{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	r	$1{,}5r$	r	$2r$	r	$1{,}5r$	$1{,}2r$	$2r$	$2r$	$2r$
F, Н	P	$2P$	P	$3P$	P	P	$2P$	$4P$	P	$2P$	P	$2P$	$1{,}5P$	$4P$	$2P$
M, Н·м	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$2Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$2Pr$	$3Pr$	$4Pr$	$3Pr$	$3Pr$	$2Pr$

Окончание табл. 6.3

Номер варианта задания	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P_1, Н	4P	1,5P	P	2P	P	P	1,5P	1,5P	2P	P	P	2P	1,2P	3P	1,2P
P_2, Н	2P	2P	2P	4P	3P	4P	3P	4P	3P	2P	2P	1,2P	2P	3P	2P
P_3, Н	2P	2P	3P	2P	2P	3P	2P	2P	P	2P	3P	2P	P	P	3P
P_4, Н	1,5P	2P	3P	P	2P	2P	2P	P	2P	3P	P	P	2P	P	2P
R, м	1,5r	r	1,5r	2r	r	1,2r	2r	1,5r	2r	r	1,5r	2r	r	1,2r	2r
F, Н	2P	2P	P	3P	4P	2P	3P	2P	3P	P	3P	1,5P	4P	2P	3P
M, Н·м	3Pr	2Pr	4Pr	Pr	4Pr	4Pr	2Pr	Pr	4Pr	2Pr	4Pr	2Pr	2Pr	3Pr	2Pr

Пример выполнения задания Д8. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы

Платформа 3 лежит горизонтально на катке 5 и блоке 4 одинакового радиуса R (рис. 6.15). На платформу действует горизонтальная сила $\vec{F}$. К блоку 4, вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена пара сил с моментом M. Каток 5 катится по горизонтальной поверхности. К краю платформы одним концом прикреплена горизонтальная нить, а к другому концу, перекинутому через невесомый блок, прикреплён груз 6, движущийся вертикально. На платформе 3 установлен каток 2 радиуса R. К центру катка прикреплена нить, расположенная параллельно платформе и натянутая грузом 1, движущимся вертикально (см. рис. 6.15). Движение системы началось из состояния покоя. Качение тел без проскальзывания. Определить уравнения движения системы в обобщённых координатах, если $R = 2r$, веса тел $P_1 = P_6 = P$, $P_3 = 3P$, $P_4 = P_5 = P_2 = 2P$, $F = P$, $M = 3Pr$.

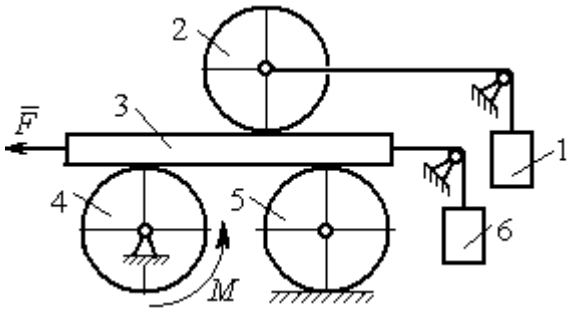


Рис. 6.15. Механическая система с двумя степенями свободы

Решение

Рассматриваемая механическая система, включающая катки 2, 5, платформу 3, блок 4 и грузы 1, 6, имеет две степени свободы, так как перемещение

катка 2 относительно платформы 3 не зависит от перемещения самой платформы. За обобщенные координаты выберем перемещение x_2 центра масс катка 2 относительно края платформы и перемещение x_3 платформы 3 относительно произвольной неподвижной вертикальной плоскости (рис. 6.16). Обобщенные скорости – скорость $\dot{x}_2$ центра масс катка 2 относительно края платформы и скорость платформы $\dot{x}_3$ относительно неподвижной вертикали. Уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_{x_2}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_3}=Q_{x_3},$$

где T – кинетическая энергия системы; Q_{x_2}, Q_{x_3} – обобщенные силы, соответствующие указанным обобщенным координатам.

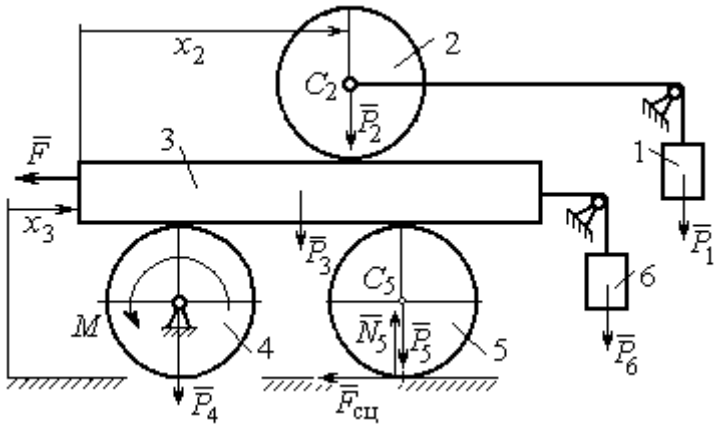


Рис. 6.16. Действующие силы
и обобщённые координаты механической системы

Вычислим кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел.

Платформа 3 совершает поступательное движение. Кинетическая энергия платформы $T_3=\frac{P_3}{2g}V_3^2$, где V_3 – скорость платформы, причём, в соответствии с выбором обобщённых координат и скоростей, $V_3=\dot{x}_3$.

Блок 4 вращается вокруг неподвижной оси. Энергия вращательного движения блока $T_4=\frac{1}{2}J_4\omega_4^2$, где J_4, ω_4 – осевой момент инерции блока 4 и его угловая скорость. Угловая скорость блока 4 $\omega_4=\frac{V_3}{R_4}=\frac{\dot{x}_3}{2r}$.

Каток 5 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_5 = \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2$, где J_5 – момент инерции катка относительно оси вращения, проходящей через его центр масс; ω_5, V_{C_5} – угловая скорость и скорость центра масс катка 5. Для определения скорости центра масс катка 5 заметим, что точка касания катка с платформой имеет скорость, равную скорости платформы, а точка *K* касания катка с неподвижной горизонтальной поверхностью является его мгновенным центром скоростей. Следовательно, скорость центра катка равна половине скорости платформы: $V_{C_5} = \frac{1}{2}V_3 = \frac{1}{2}\dot{x}_3$. Угловая скорость катка 5 $\omega_5 = \frac{V_3}{2R_5} = \frac{\dot{x}_3}{4r}$ (рис. 6.17, *a*).

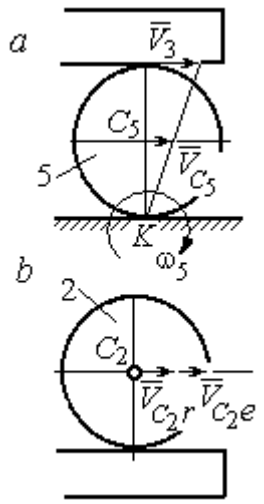


Рис. 6.17. Скорости центров катков 2 и 5

При расчёте кинетической энергии катка 2 необходимо учитывать, что каток совершает сложное движение. Качение катка по поверхности платформы является относительным движением, перемещение его вместе с платформой – переносным. Абсолютная скорость V_{C_2} центра масс катка 2 представляется в виде векторной суммы $\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{C_2r} + \vec{V}_{C_2e}$ (рис. 6.17, *b*), где $\vec{V}_{C_2e}$ – вектор переносной скорости катка, равный по модулю скорости платформы, $V_{C_2e} = V_3 = \dot{x}_3$; $\vec{V}_{C_2r}$ – вектор относительной скорости центра масс катка, равный по величине скорости центра масс катка 2 относительно края платформы, $V_{C_2r} = \dot{x}_2$. Модуль абсолютной скорости центра масс катка 2 равен сумме $V_{C_2} = V_{C_2r} + V_{C_2e} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$ (рис. 6.17, *b*).

Угловая скорость переносного движения катка 2 равна нулю, поскольку переносное движение катка – это поступательное движение платформы. В результате угловая скорость катка 2 равна его угловой скорости в относительном

движении: $\omega_2 = \dfrac{V_{C_2 r}}{R_2} = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$. Кинетическая энергия катка 2 рассчитывается по формуле: $T_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \dfrac{1}{2}J_2\omega_2^2$, где J_2 – осевой момент инерции катка 2; ω_2 – угловая скорость катка; V_{C_2} – абсолютная скорость центра масс катка 2.

Движение грузов 1 и 6 поступательное, их кинетические энергии вычисляются по формулам: $T_1 = \dfrac{P_1}{2g}V_1^2$, $T_6 = \dfrac{P_6}{2g}V_6^2$. При этом скорость груза 1 равна абсолютной скорости центра катка 2: $V_1 = V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, а скорость груза 6 равна скорости платформы: $V_6 = V_3 = \dot{x}_3$.

Выразим кинетическую энергию системы через обобщённые скорости. Кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 =$$

$$= \frac{P_1}{2g}V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_{C_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{P_3}{2g}V_3^2 + \frac{1}{2}J_4\omega_4^2 + \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}V_{C_5}^2 + \frac{1}{2}J_5\omega_5^2 + \frac{P_6}{2g}V_6^2,$$

где значения скоростей: $V_1 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $V_{C_2} = \dot{x}_2 + \dot{x}_3$, $\omega_2 = \dfrac{\dot{x}_2}{2r}$, $V_3 = \dot{x}_3$, $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$, $V_{C_5} = \dfrac{1}{2}\dot{x}_3$, $\omega_5 = \dfrac{\dot{x}_3}{4r}$, $V_6 = \dot{x}_3$. Значения осевых моментов инерции катков: $J_2 = \dfrac{P_2 R_2^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_4 = \dfrac{P_4 R_4^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$, $J_5 = \dfrac{P_5 R_5^2}{2g} = \dfrac{4Pr^2}{g}$. Подставляя значения скоростей, моментов инерции и данные задачи, получим выражение кинетической энергии системы в виде

$$T = \frac{P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_2}{2r}\right)^2 + \frac{3P}{2g}\dot{x}_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4Pr^2}{g}\left(\frac{\dot{x}_3}{4r}\right)^2 + \frac{P}{2g}\dot{x}_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{2g}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2 + \frac{23P}{8g}\dot{x}_3^2 = \frac{2P}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_2\dot{x}_3 + \frac{35P}{8g}\dot{x}_3^2.$$

Дадим системе возможное перемещение по координате x_3, оставляя координату x_2 без изменения: $\delta x_3 > 0, \delta x_2 = 0$ (рис. 6.18). При таком перемещении каток 2 стоит на платформе и движется поступательно вместе с ней. В этом случае работа сил тяжести $\vec{P}_2$, $\vec{P}_5$, $\vec{P}_3$ катков 2, 5 и платформы 3 равна нулю, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны векторам сил (см. рис. 6.18). Работа силы тяжести $\vec{P}_4$ равна нулю, так как точка приложения силы лежит на неподвижной оси вращения блока 4.

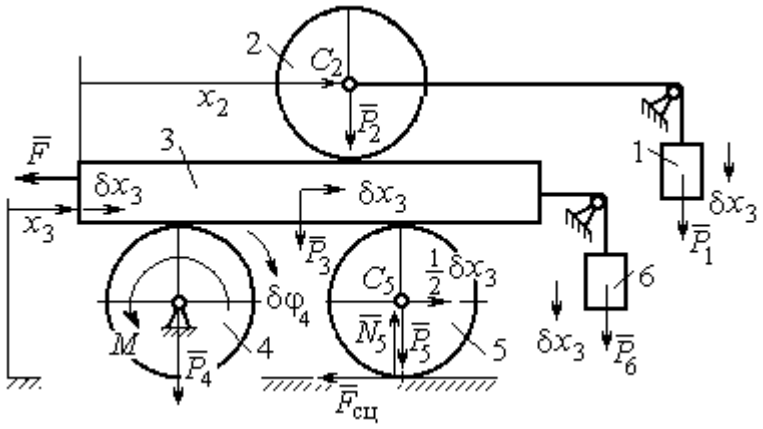


Рис. 6.18. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_3 > 0$, $\delta x_2 = 0$

Работу будут производить сила $\vec{F}$, пара сил с моментом M и силы тяжести грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_6$. Суммарная работа сил на перемещении δx_3: $\delta A = -F\delta x_3 - M\delta\varphi_4 + P_1\delta x_3 + P_6\delta x_3$.

Представим полученное ранее соотношение $\omega_4 = \dfrac{\dot{x}_3}{2r}$ в дифференциальном виде: $d\varphi_4 = \dfrac{dx_3}{2r}$. Поскольку дифференциалы координат также являются возможными перемещениями, получим нужное соотношение $\delta\varphi_4 = \dfrac{\delta x_3}{2r}$. Теперь элементарную работу сил на возможном перемещении δx_3 с учётом значений сил можно представить в виде:

$$\delta A = -P\delta x_3 - 3Pr\frac{\delta x_3}{2r} + P\delta x_3 + P\delta x_3 = -\frac{1}{2}P\delta x_3,$$

отсюда обобщённая сила, соответствующая координате x_3: $Q_{x_3} = -\dfrac{1}{2}P$.

Дадим системе другое независимое перемещение – по координате x_2, оставляя координату x_3 без изменения: $\delta x_2 > 0, \delta x_3 = 0$ (рис. 6.19).

При этом возможном перемещении вся система стоит, кроме катка 2, который катится по поверхности неподвижной платформы, и груза 1, который опускается вертикально вниз. Работу совершает только сила тяжести груза 1. Выражая работу в виде $\delta A = P_1 \delta x_2 = P \delta x_2$, найдём обобщённую силу, соответствующую координате x_2: $Q_{x_2} = P$.

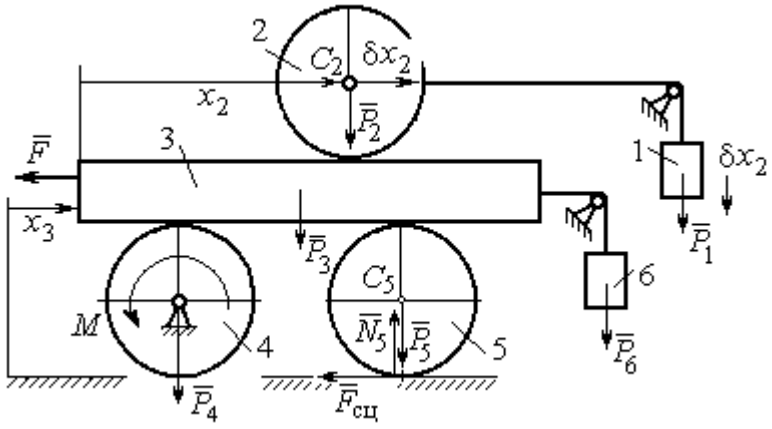


Рис. 6.19. Возможное перемещение системы при вариации обобщённых координат $\delta x_2 > 0$, $\delta x_3 = 0$

Составим уравнения Лагранжа. С этой целью вычислим частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}_3$ и $\dot{x}_2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = \frac{3P}{g}\dot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\dot{x}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{4P}{g}\dot{x}_2 + \frac{3P}{g}\dot{x}_3$$

и по обобщённым координатам: $\frac{\partial T}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial T}{\partial x_4} = 0.$

Определим полные производные по времени от частных производных кинетической энергии по скоростям:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) = \frac{3P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{35P}{4g}\ddot{x}_3, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{4P}{g}\ddot{x}_2 + \frac{3P}{g}\ddot{x}_3.$$

Подставляя результаты расчётов в уравнения Лагранжа с учётом вычисленных значений обобщённых сил, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в обобщённых координатах:

$$12\ddot{x}_2 + 35\ddot{x}_3 = -2g, \quad 4\ddot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 = g.$$

Алгебраическим решением системы служат значения ускорений:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{5}{26}g = -0{,}19g \quad \text{и} \quad \ddot{x}_2 = \frac{41}{104}g = 0{,}39g.$$

Полученные выражения представляют собой дифференциальные уравнения, проинтегрировав которые дважды с нулевыми начальными условиями (движение началось из состояния покоя), найдём уравнения абсолютного движения платформы и относительного движения центра масс катка 2:

$$x_3 = -0{,}095gt^2, \quad x_2 = 0{,}195gt^2.$$

Отрицательное значение координаты x_3 означает, что движение платформы происходит в отрицательном направлении оси x_3 (см. рис. 6.16).

Абсолютное движение центра катка 2 представляется суммой относительного и переносного движений: $x_{C_2} = x_2 + x_3 = 0{,}1gt^2$.

Уравнение вращательного движения катка 2 находится на основании выражения $\varphi_2 = \frac{1}{R_2}x_2 = \frac{1}{2r}x_2 = 0{,}097\frac{gt^2}{r}$. Вращение блока 4 описывается уравнением $\varphi_4 = \frac{1}{R_4}x_3 = \frac{1}{2r}x_3 = -0{,}047\frac{gt^2}{r}$.

Движение катка 5 описывается двумя уравнениями: уравнением движения центра масс катка $x_{C_5} = \frac{1}{2}x_3 = -0{,}047gt^2$ и уравнением вращательного движения катка $\varphi_5 = \frac{x_3}{2R_5} = -0{,}024\frac{gt^2}{r}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М. И., *Джанелидзе Г. Ю.*, *Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1–2.– СПб.: Лань, 2010.

Бутенин Н. В., *Лунц Я. Л.*, *Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики: в 2-х томах.– М.: Наука, 2009.

Вебер Г. Э., *Ляпцев С. А*. Лекции по теоретической механике. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2008.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учебн. для втузов. – М.: Высшая школа, 2010.

Учебное издание

Евгений Борисович Волков
Юрий Михайлович Казаков

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

сборник заданий для расчетно-графических работ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов

Редактор *Л.В. Устьянцева*

Подписано в печать
Бумага писчая. Формат бумаги 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Печ. л. 9,75 Уч. изд. л. 6,5 Тираж экз. Заказ №

Издательство УГГУ
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
Уральский государственный горный университет.
Отпечатано с оригинал-макета
в лаборатории множительной техники УГГУ

4. ДИНАМИКА ТОЧКИ 73
4.1. Дифференциальные уравнения движения точки. 73
4.2. Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки 73
4.3. Колебания материальной точки 80
4.4. Задание Д2. Исследование колебаний точки 84
4.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. 95
4.6. Задание Д3. Исследование движения точки
с применением теоремы об изменении кинетической энергии 96
5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ 103
5.1. Описание движений твёрдых тел на основе общих теорем динамики системы . 103
5.2. Задание Д4. Динамический расчет механической системы 104
5.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы. 112
5.4. Задание Д5. Исследование движения механической системы
с применением теоремы об изменении кинетической энергии 114
6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 124
6.1. Принципы механики. Общее уравнение динамики 124
6.2. Задание Д6. Исследование механической системы
с применением общего уравнения динамики 126
6.3. Уравнения Лагранжа II рода 136
6.4. Задание Д7. Исследование механической системы с одной степенью свободы
с применением уравнений Лагранжа 137
6.5. Задание Д8. Исследование механической системы с двумя степенями свободы 145
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 155

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методическому комплексу

_____ С. А. Ушаров

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению курсового проекта

КАДАСТРОВАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Направление подготовки:
21.03.02 Землеустройство и кадастры

Направленность (профиль):
«Кадастр недвижимости»
«Геодезическое обеспечение землеустроительных и кадастровых работ»

форма обучения: очная, заочная

Автор: Назаров И.В.

Одобрено на заседании кафедры
геодезии и кадастров
(название кафедры)

Зав. кафедрой _____
(подпись)

Акулова Е. А.
(Фамилия И. О.)

Протокол № 1 от 05.09.2023
(Дата)

Рассмотрено методической комиссией
горно-технологического факультета
(название факультета)

Председатель _____
(подпись)

Колчина Н. В.
(Фамилия И. О.)

Протокол № 2 от 20.10.2023
(Дата)

Екатеринбург
2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
1 Выбор темы курсового проекта 4
2 Структура курсового проекта 5
2.1 Титульный лист 5
2.2 Содержание 6
2.3 Введение 6
2.4 Основная часть курсового проекта 7
2.5 Заключение 8
2.6 Список использованных источников 8
2.7 Приложения 9
3 Порядок выполнения курсового проекта 9
4 Правила оформления курсового проекта 12
4.1 Общие требования 12
4.2 Построение документа 12
4.3 Нумерация страниц 13
4.4 Нумерация разделов, подразделов, пунктов и подпунктов 13
4.5 Иллюстрации 14
4.6 Таблицы 15
4.7 Формулы и уравнения 16
4.8 Ссылки 16
5. Руководство курсовыми проектами 18
6. Процедура защиты и оценка курсовых проектов 18
Приложение А Тематики курсовых проектов 19
Приложение Б Задание на курсовой проект 20
Приложение В Титульный лист 21

ВВЕДЕНИЕ

Курсовой проект выполняется студентом в части дисциплины, в ходе которой осуществляется обучение применению полученных знаний и умений при решении комплексных задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

Выполнение курсовых проектов, является частью основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) и является обаятельным для каждого студента.

Курсовой проект студента может стать составной частью (разделом, главой) выпускной квалификационной работы по данному направлению.

Выполнение студентом курсового проекта по дисциплине проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений по общепрофессиональным и специальным дисциплинам;
- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;
- формирования умения применять теоретические знания при решении поставленных профессиональных задач;
- формирования умения использовать справочную, нормативную и правовую документацию;
- развития творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- подготовки к итоговой государственной аттестации.

В процессе работы студент должен приобрести и закрепить навыки:

- работы со специальной литературой фундаментального и прикладного характера;
- систематизации, обобщения и анализа фактического материала по изучаемой проблеме;
- обоснования выводов и предложений по совершенствованию рассматриваемого вопроса.

Курсовой проект по дисциплине является индивидуальной, самостоятельно выполненной работой студента. Методические указания призваны помочь студенту выбрать тему и выполнить исследование на высоком уровне.

Выполнение работы предполагает консультационную помощь со стороны преподавателя и творческое развитие студентом темы и разделов работы.

Курсовой проект выполняется и защищается в сроки, определенные учебным графиком.

1 ВЫБОР ТЕМЫ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Тематики курсовых проектов представлены в комплекте оценочных средств, а также в Приложении А.

Конкретные темы курсовых проектов могут определяться разными способами:

1. Преподаватель определяет тему работы студента.

2. Студент сам выбирает тему, соответствующую его интересам. При этом тема должна быть согласована с руководителем работы.

Темы работ должны отвечать следующим требованиям:

- соответствовать задачам подготовки специалистов;
- учитывать направления и проблематику современных научных исследований;
- приобщать студентов к работе над проблемами, которые исследуют отдельные преподаватели и коллектив методической комиссии в целом;
- учитывать разнообразие интересов студентов в области теории и практики по избранному направлению обучения.

При выборе темы необходимо учитывать, в какой мере разрабатываемые вопросы актуальны для работодателя, обеспечены исходными данными, литературными источниками, соответствуют индивидуальным способностям и интересам студента.

Не допускаются односложные формулировки тем, соответствующие названию дисциплины или темы дисциплины, констатирующего типа, носящие откровенно реферативный характер, дублирующие в какой-то степени темы работ по другим дисциплинам.

После того как тема работы выбрана и согласована с руководителем (преподавателем), оформляется бланк задания (Приложение Б).

Работа над курсовым проектом осуществляется по плану, который облегчает контроль за ходом выполнения исследования и помогает студенту самостоятельно и осознано выполнять работу.

2 СТРУКТУРА КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Структура курсового проекта должна быть четкой и обоснованной, так чтобы была видна логика рассмотрения проблемы.

По содержанию работа может носить теоретический или практический характер.

Структура курсового проекта теоретического характера:

- титульный лист;
- содержание;
- введение, в котором раскрываются актуальность и значение темы, формулируется цель работы;
- теоретическая часть, в которой даны история вопроса, уровень разработанности проблемы в теории и практике посредством сравнительного анализа литературы;
- заключение, в котором содержатся выводы и рекомендации относительно возможностей использования материалов работы;
- список использованных источников;
- приложения.

Структура курсового проекта практического характера:

- титульный лист;
- содержание;
- введение, в котором раскрываются актуальность и значение темы, формулируются цели и задачи работы;
- основная часть, которая обычно состоит из двух разделов. В первом разделе содержатся теоретические основы разрабатываемой темы. Вторым разделом является практическая часть, которая представлена материалами судебной практики, анализом деятельности конкретной организации, расчетами, графиками, таблицами, схемами и т.п.;
- заключение, в котором содержатся выводы и рекомендации относительно возможностей практического применения материалов работы;
- список использованных источников;
- приложения.

2.1 Титульный лист

Титульный лист (Приложение В) должен содержать:

- наименование учебного заведения,
- наименование дисциплины, по которой выполняется работа;
- тему работы,
- код и наименование направления, профиль, по которой обучается студент;
- фамилию, инициалы руководителя работы;
- фамилию, инициалы студента, номер его учебной группы;
- наименование города, в котором находится учебное заведение;
- год написания работы.

2.2 Содержание

В содержании последовательно излагаются наименования глав, разделов и подразделов работы. При этом их формулировки должны точно соответствовать содержанию работы, быть краткими, четкими, последовательно и точно отражать ее внутреннюю логику.

В содержании указывают страницы, с которых начинаются каждая глава, раздел или подраздел. Страницы в работе должны быть пронумерованы. Счет нумерации страниц начинается с титульного листа, на котором номер страницы не указывается. Введение, отдельные главы, заключение, список литературы и каждое приложение должны всегда начинаться на новой странице. Текст работы должен соответствовать содержанию.

2.3 Введение

Введение - это обоснование и доказательство важности рассматриваемой темы. Введение знакомит с существом рассматриваемого вопроса, вводит в тему.

Введение к курсовому проекту в обязательном порядке содержит следующие элементы:

- **Определение темы** работы. Необходимо привести несколько (2-3) фраз из литературы, характеризующих основные понятия темы.

- **Актуальность** работы. Следует обозначить существующее положение, почему именно это проблема актуальна. Обоснование может начинаться с фразы «Актуальность темы исследования обусловлена тем, что …» или «Данная тема актуальна, так как …».

- **Цель** работы. Цель показывает направление раскрытия темы работы. Выглядеть это может следующим образом: «Цель курсового проекта исследовать …» или «Целью данной работы является изучение (описание, определение, установление, исследование, рассмотрение, разработка, раскрытие, освещение, выявление, анализ, обобщение) …».

- **Задачи** курсового проекта. Задачи - это способы достижения цели. В соответствии с основной целью следует выделить 3-4 целевые задачи, которые необходимо решить для достижения главной цели исследования. Это либо решение подпроблем, вытекающих из общей проблемы, либо задачи анализа, обобщения, выявления, обоснования, разработки, оценки отдельных аспектов общей проблемы. Каждая из задач формулируется в соответствии с главами курсового проекта. Формулируются задачи следующим образом: «Для достижения поставленной в курсовом проекте цели решались следующие задачи:

1. Выявить актуальность ….
2. Рассмотреть практику применения и актуальные вопросы …».

- **Объект и предмет** курсового проекта. Объект - это процесс или явление, порождающие проблемную ситуацию и избранные для изучения. У разных наук может быть один объект, но разные предметы. Предмет более узок и конкретен. Благодаря его формулированию в курсовом проекте из общей системы,

представляющей объект исследования, выделяется часть системы или процесс, протекающий в системе, являющийся непосредственным предметом исследования.

- **Обзор используемых источников информации**. Здесь перечисляются источники, которые использовались для написания своей работы: «Теоретической основной курсового проекта послужили исследования отечественными ученными вопросов …. Среди российских ученых можно назвать … и других авторов. Нормативную базу исследования составили: Конституция Российской Федерации, Федеральные законы регулирующих …, Гражданский кодекс РФ и иные нормы права. Практическая часть работы выполнялась на основании документов судебной практики.».

- **Структура** работы. В данном элементе указывается, из скольких глав состоит работа, дается их краткая характеристика: Курсовой проект состоит из введения, двух глав, и заключения. Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цель и задачи исследования, указываются объект и предмет исследования. Первая глава посвящена исследованию теоретических вопросов, …. Во второй главе …. В заключении подведены итоги и сделаны выводы исследования.».

2.4 Основная часть курсового проекта

Теоретическая часть должна содержать анализ состояния изучаемой проблемы на основе обзора научной, научно-информационной, учебной и справочной литературы. Представленный материал должен быть логически связан с целью работы. В параграфах теоретической части необходимо отражать отдельные части проблемы и завершать их выводами.

Эта часть включает в себя содержание нескольких (не менее двух) глав. В первой главе необходимо:

- определить сущность исследуемого вопроса, т.е. установить, в чем главная цель реализации рассматриваемой проблемы в деятельности организации и какие процессы (организационные, экономические, социальные) составляют основу данного вопроса;
- определить состав и краткое содержание принципов и методов реализации изучаемой проблемы на практике;
- дать характеристику степени проработанности темы в литературных источниках (монографиях, журнальных и газетных статьях, материалах конференций и т.п.), что в итоге должно выразиться в достаточно полном перечне литературы, приведенном в конце работы.

В данной главе необходимо указать, какое место занимает рассматриваемая проблема в соответствующей области знаний; какой опыт (как положительный, так и негативный) накоплен по данной проблеме в нашей стране и за рубежом.

При разработке данной и последующих глав работы следует иметь в виду, что те материалы по выбранной теме, которые содержатся в лекциях по

дисциплине, должны восприниматься студентом как уже известные истины, и не подлежат описанию.

Вторая глава должна содержать подробное изучение, анализ объекта, темы работы. В ней желательно использовать примеры и факты из практики, иллюстрирующие применение теоретических знаний в жизни. Автором обязательно должна быть изложена своя точка зрения, собственные предложения.

При выполнении данного этапа должен быть указан способ получения информации (или исходных данных для расчета), позволяющей оценить фактическое состояние проблемы.

При анализе современного состояния проблемы в организации необходимо выполнить:

1. Предварительное изучение объекта исследования, т.е. необходимо определить и зафиксировать особенности объекта исследования, к условиям которого будет привязываться проектная часть работы.
2. Анализ практических материалов, материалов судебной практики.
3. Исходя из характеристики современного состояния проблемы, а также на основании краткого анализа направлений ее развития за определенный период времени необходимо сформулировать прогнозную оценку ситуаций: к каким последствиям (негативным или позитивным) приведет дальнейшее развитие рассматриваемой проблемы в том или ином направлении.
4. В тезисной форме следует подвести общий итог, характеризующий современное состояние проблемы, тенденции ее развития, нерешенность ряда методических вопросов, как в теоретических разработках, так и в практических материалах.

2.5 Заключение

Заключение должно содержать итоги работы, важнейшие выводы, к которым пришел автор работы; в нем даются сведения о практической значимости работы, возможности внедрения ее результатов и дальнейших перспективах исследования темы. Важнейшее требование к заключению - его краткость и обстоятельность; в нем не следует повторять содержание введения и основной части работы. В целом заключение должно давать ответ на следующие вопросы:

1. С какой целью автором предпринято данное исследование?
2. Что сделано автором в процессе данного исследования?
3. К каким выводам пришел автор?

2.6 Список использованных источников

Список должен содержать сведения об источниках, использованных при составлении документа. Сведения об источниках приводятся в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1, ГОСТ 7.80, ГОСТ 7.82.

Список использованных источников должен включать библиографические записи на документы, использованные при составлении документа, ссылки на которые оформляют арабскими цифрами в квадратных скобках.

Библиографический список помещают после основной части работы перед приложениями.

При составлении библиографического списка необходимо соблюдать определенную последовательность в перечислении библиографических записей. Сведения об источниках следует располагать в порядке появления ссылок на источники в тексте работы и нумеровать арабскими цифрами с точкой и печатать с абзацного отступа.

2.7 Приложения

Приложения помещаются после списка использованных источников.

Приложения могут включать: графический материал, таблицы не более формата А3, расчеты, описания алгоритмов и программ. В тексте работы на все приложения должны быть даны ссылки. Приложения располагают в порядке ссылок на них в тексте. Каждое приложение следует размещать с новой страницы с указанием в центре верхней части страницы слова «ПРИЛОЖЕНИЕ».

Приложение должно иметь заголовок, который записывают с прописной буквы, полужирным шрифтом, отдельной строкой по центру без точки в конце.

Приложения обозначают прописными буквами кириллического алфавита, начиная с А, за исключением букв Ё, З, Й, О, Ч, Ъ, Ы, Ь. После слова «ПРИЛОЖЕНИЕ» следует буква, обозначающая его последовательность. Допускается обозначение приложений буквами латинского алфавита, за исключением букв I и O. В случае полного использования букв кириллического или латинского алфавита допускается обозначать приложения арабскими цифрами. Если в документе одно приложение, оно обозначается «ПРИЛОЖЕНИЕ А».

Приложения, как правило, выполняют на листах формата А4. Допускается оформление приложения на листах формата А3.

Текст каждого приложения при необходимости может быть разделен на разделы, подразделы, пункты, подпункты, которые нумеруют в пределах каждого приложения. Перед номером ставится обозначение этого приложения. Приложения должны иметь общую с остальной частью документа сквозную нумерацию страниц.

Все приложения должны быть перечислены в содержании документа с указанием их обозначений, статуса и наименования.

Объем приложений не включается в обязательное количество страниц работы.

3 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Курсовой проект выполняется в несколько этапов:

1. Выбор тематики курсового проекта.

2. Уточнение темы и содержания курсового проекта (задание на курсовой проект).

3. Изучение научной и методической литературы.

4. Сбор материалов, подготовка плана курсового проекта.

5. Составление списка используемой литературы.

6. Анализ собранного материала.

7. Предварительное консультирование с руководителем (при необходимости).

8. Написание теоретической части.

9. Проведение исследования, получение материалов исследования, обобщение полученных результатов (при наличии исследования).

10. Проверка курсового проекта на заимствования.

11. Представление руководителю курсового проекта.

12. Защита курсового проекта.

Работу следует начинать с подбора литературы по теме исследования. Здесь студенту необходимо обратиться к справочно-поисковому аппарату библиотеки. Составной его частью являются справочные издания: энциклопедии, словари, справочники, статистические сборники.

Необходимо различать библиографическую информацию (где, в каких источниках содержатся нужные сведения) и собственно научную - о самом содержании уже известных знаний.

При написании работы следует просмотреть журналы, а также ознакомиться с обзорами литературы по определенным темам.

Тематические указатели статей за год печатаются в последних номерах журналов.

В результате сбора информации по теме исследования должны быть получены следующие сведения:

1. Кто и где (какие исследователи, и в каких научных центрах) уже работал и работает по теме исследования?

2. Где опубликованы результаты этой работы (в каких конкретно источниках)?

3. В чем конкретно они состоят?

Как показала практика руководства курсовыми проектами, для написания обзора по теме исследования необходимо использовать не менее 5 источников.

Курсовой проект может быть иллюстрирована таблицами, схемами, графиками, диаграммами и другими материалами, которые размещаются по тексту работы или в виде приложений. Все эти материалы должны иметь номер, подпись (название), возможно краткое пояснение, расшифровку сокращений. В таблицах и графиках указывают единицы измерения.

Текст работы по объему должен быть не менее 15 и не более 25 страниц.

Оригинальность текста должна составлять более 55%.

Не рекомендуется вести изложение от первого лица единственного числа: «я наблюдал», «я считаю», «по моему мнению» и т.п. Корректнее использовать местоимение «мы», но желательно обойтись и без него. Допускаются обороты с

сохранением первого лица множественного числа, в которых исключается местоимение «мы», т.е. фразы строятся с употреблением слов «наблюдаем», «устанавливаем», «имеем». Можно использовать выражения: «на наш взгляд», «по нашему мнению», однако предпочтительнее писать «по мнению автора» (курсового проекта) или выражать ту же мысль в безличной форме: «изучение опыта работы предприятия свидетельствует о том, что...», «на основе выполненного анализа можно утверждать...», «проведенные исследования подтвердили...» и т.п.

В работе должно быть соблюдено единство стиля изложения, обеспечена орфографическая, синтаксическая и стилистическая грамотность в соответствии с нормами современного русского языка.

4 ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Для оформления работы применяется ГОСТ 7.32-2017.

4.1 Общие требования

Изложение текста и оформление документа выполняют в соответствии с требованиями настоящего стандарта. Страницы текста документа и включенные в документ иллюстрации и таблицы должны соответствовать формату А4 по ГОСТ 9327. Допускается применение формата А3 при наличии большого количества таблиц и иллюстраций данного формата.

Курсовой проект должна быть выполнен любым печатным способом на одной стороне листа белой бумаги формата А4 через полтора интервала.

Цвет шрифта должен быть черным, размер шрифта - не менее 12 пт. Рекомендуемый тип шрифта для основного текста документа - Times New Roman. Полужирный шрифт применяют только для заголовков разделов и подразделов, заголовков структурных элементов. Использование курсива допускается для обозначения объектов (биология, геология, медицина, нанотехнологии, генная инженерия и др.) и написания терминов (например, in vivo, in vitro) и иных объектов и терминов на латыни.

Для акцентирования внимания может применяться выделение текста с помощью шрифта иного начертания, чем шрифт основного текста, но того же кегля и гарнитуры. Разрешается для написания определенных терминов, формул, теорем применять шрифты разной гарнитуры.

Текст документа следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: левое - 30 мм, правое - 15 мм, верхнее и нижнее - 20 мм. Абзацный отступ должен быть одинаковым по всему тексту документа и равен 1,25 см.

Вне зависимости от способа выполнения работы качество напечатанного текста и оформления иллюстраций, таблиц, распечаток программ должно удовлетворять требованию их четкого воспроизведения.

При выполнении работы необходимо соблюдать равномерную плотность и четкость изображения по всему документу. Все линии, буквы, цифры и знаки должны иметь одинаковую контрастность по всему тексту документа.

Сокращения слов и словосочетаний на русском, белорусском и иностранных европейских языках оформляют в соответствии с требованиями ГОСТ 7.11, ГОСТ 7.12.

4.2 Построение документа

Наименования структурных элементов работы: «ОГЛАВЛЕНИЕ», «ВВЕДЕНИЕ», главы, «ЗАКЛЮЧЕНИЕ», «СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ», «ПРИЛОЖЕНИЕ» служат заголовками структурных элементов документа.

Заголовки структурных элементов следует располагать в середине строки без точки в конце, прописными буквами, не подчеркивая. Каждый структурный элемент и каждый раздел основной части документа начинают с новой страницы.

Основную часть работы следует делить на разделы, подразделы и пункты. Пункты при необходимости могут делиться на подпункты. Разделы и подразделы документа должны иметь заголовки. Пункты и подпункты, как правило, заголовков не имеют.

Заголовки разделов и подразделов основной части работы следует начинать с абзацного отступа и размещать после порядкового номера, печатать с прописной буквы, полужирным шрифтом, не подчеркивать, без точки в конце. Пункты и подпункты могут иметь только порядковый номер без заголовка, начинающийся с абзацного отступа.

Если заголовок включает несколько предложений, их разделяют точками. Переносы слов в заголовках не допускаются.

4.3 Нумерация страниц

Страницы документа следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту документа, включая приложения. Номер страницы проставляется в центре нижней части страницы без точки. Приложения, которые приведены в документе и имеющие собственную нумерацию, допускается не перенумеровать.

Титульный лист включают в общую нумерацию страниц работы. Номер страницы на титульном листе не проставляют.

Иллюстрации и таблицы, расположенные на отдельных листах, включают в общую нумерацию страниц документа. Иллюстрации и таблицы на листе формата А3 учитывают как одну страницу.

4.4 Нумерация разделов, подразделов, пунктов и подпунктов

Разделы должны иметь порядковые номера в пределах всей работы, обозначенные арабскими цифрами без точки и расположенные с абзацного отступа. Подразделы должны иметь нумерацию в пределах каждого раздела. Номер подраздела состоит из номеров раздела и подраздела, разделенных точкой. В конце номера подраздела точка не ставится. Разделы, как и подразделы, могут состоять из одного или нескольких пунктов.

Если работа не имеет подразделов, то нумерация пунктов в нем должна быть в пределах каждого раздела и номер пункта должен состоять из номеров раздела и пункта, разделенных точкой. В конце номера пункта точка не ставится.

Если работа имеет подразделы, то нумерация пунктов должна быть в пределах подраздела и номер пункта должен состоять из номеров раздела, подраздела и пункта, разделенных точками.

Если раздел или подраздел состоит из одного пункта, то пункт не нумеруется.

Если текст работы подразделяется только на пункты, они нумеруются порядковыми номерами в пределах документа.

Пункты при необходимости могут быть разбиты на подпункты, которые должны иметь порядковую нумерацию в пределах каждого пункта: 4.2.1.1, 4.2.1.2, 4.2.1.3 и т. д.

Внутри пунктов или подпунктов могут быть приведены перечисления. Перед каждым элементом перечисления следует ставить тире. При необходимости ссылки в тексте документа на один из элементов перечисления вместо тире ставят строчные буквы русского алфавита со скобкой, начиная с буквы «а» (за исключением букв ё, з, й, о, ч, ъ, ы, ь). Простые перечисления отделяются запятой, сложные - точкой с запятой.

При наличии конкретного числа перечислений допускается перед каждым элементом перечисления ставить арабские цифры, после которых ставится скобка.

Перечисления приводятся с абзацного отступа в столбик.

Заголовки должны четко и кратко отражать содержание разделов, подразделов. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой.

4.5 Иллюстрации

Иллюстрации (чертежи, графики, схемы, компьютерные распечатки, диаграммы, фотоснимки) следует располагать в работе непосредственно после текста такой работы, где они упоминаются впервые, или на следующей странице (по возможности ближе к соответствующим частям текста работы). На все иллюстрации должны быть даны ссылки. При ссылке необходимо писать слово «рисунок» и его номер, например: «в соответствии с рисунком 2» и т. д.

Чертежи, графики, диаграммы, схемы должны соответствовать требованиям стандартов Единой системы конструкторской документации (ЕСКД).

Количество иллюстраций должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста документа. Не рекомендуется приводить объемные рисунки.

Иллюстрации, за исключением иллюстраций, приведенных в приложениях, следует нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией. Если рисунок один, то он обозначается: Рисунок 1.

Иллюстрации каждого приложения обозначают отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения: Рисунок А.3.

Допускается нумеровать иллюстрации в пределах раздела. В этом случае номер иллюстрации состоит из номера раздела и порядкового номера иллюстрации, разделенных точкой: Рисунок 2.1.

Иллюстрации при необходимости могут иметь наименование и пояснительные данные (подрисуночный текст). Слово «Рисунок», его номер и через тире наименование помещают после пояснительных данных и располагают в центре под рисунком без точки в конце.

Если наименование рисунка состоит из нескольких строк, то его следует записывать через один межстрочный интервал. Наименование рисунка приводят с прописной буквы без точки в конце. Перенос слов в наименовании графического материала не допускается.

4.6 Таблицы

Цифровой материал должен оформляться в виде таблиц. Таблицы применяют для наглядности и удобства сравнения показателей.

Таблицу следует располагать непосредственно после текста, в котором она упоминается впервые, или на следующей странице.

На все таблицы должны быть ссылки. При ссылке следует печатать слово «таблица» с указанием ее номера.

Наименование таблицы, при ее наличии, должно отражать ее содержание, быть точным, кратким. Наименование следует помещать над таблицей слева, без абзацного отступа в следующем формате: Таблица Номер таблицы - Наименование таблицы. Наименование таблицы приводят с прописной буквы без точки в конце.

Если наименование таблицы занимает две строки и более, то его следует записывать через один межстрочный интервал.

Таблицу с большим количеством строк допускается переносить на другую страницу. При переносе части таблицы на другую страницу слово «Таблица», ее номер и наименование указывают один раз слева над первой частью таблицы, а над другими частями также слева пишут слова «Продолжение таблицы» и указывают номер таблицы.

При делении таблицы на части допускается ее головку или боковик заменять соответственно номерами граф и строк. При этом нумеруют арабскими цифрами графы и (или) строки первой части таблицы. Таблица оформляется в соответствии с рисунком 1.

Таблицы, за исключением таблиц приложений, следует нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией.

Таблицы каждого приложения обозначаются отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения. Если одна таблица, она должна быть обозначена «Таблица 1» или «Таблица А.1» (если она приведена в приложении А).

Допускается нумеровать таблицы в пределах раздела при большом объеме текста. В этом случае номер таблицы состоит из номера раздела и порядкового номера таблицы, разделенных точкой: Таблица 2.3.

Заголовки граф и строк таблицы следует печатать с прописной буквы, а подзаголовки граф - со строчной буквы, если они составляют одно предложение с заголовком, или с прописной буквы, если они имеют самостоятельное значение. В конце заголовков и подзаголовков таблиц точки не ставятся. Названия заголовков и подзаголовков таблиц указывают в единственном числе.

Таблицы слева, справа, сверху и снизу ограничивают линиями. Разделять заголовки и подзаголовки боковика и граф диагональными линиями не

допускается. Заголовки граф выравнивают по центру, а заголовки строк - по левому краю.

Горизонтальные и вертикальные линии, разграничивающие строки таблицы, допускается не проводить, если их отсутствие не затрудняет пользование таблицей.

Текст, повторяющийся в строках одной и той же графы и состоящий из одиночных слов, заменяют кавычками. Ставить кавычки вместо повторяющихся цифр, буквенно-цифровых обозначений, знаков и символов не допускается.

Если текст повторяется, то при первом повторении его заменяют словами «то же», а далее кавычками.

В таблице допускается применять размер шрифта меньше, чем в тексте.

4.7 Формулы и уравнения

Уравнения и формулы следует выделять из текста в отдельную строку. Выше и ниже каждой формулы или уравнения должно быть оставлено не менее одной свободной строки. Если уравнение не умещается в одну строку, оно должно быть перенесено после знака равенства (=) или после знаков плюс (+), минус (-), умножения (х), деления (:) или других математических знаков. На новой строке знак повторяется. При переносе формулы на знаке, символизирующем операцию умножения, применяют знак «Х».

Пояснение значений символов и числовых коэффициентов следует приводить непосредственно под формулой в той же последовательности, в которой они представлены в формуле. Значение каждого символа и числового коэффициента необходимо приводить с новой строки. Первую строку пояснения начинают со слова «где» без двоеточия с абзаца.

Формулы следует располагать посередине строки и обозначать порядковой нумерацией в пределах всего документа арабскими цифрами в круглых скобках в крайнем правом положении на строке. Одну формулу обозначают (1).

Ссылки на порядковые номера формул приводятся в скобках: в формуле (1).

Формулы, помещаемые в приложениях, нумеруются арабскими цифрами в пределах каждого приложения с добавлением перед каждой цифрой обозначения приложения: (В.1).

Допускается нумерация формул в пределах раздела. В этом случае номер формулы состоит из номера раздела и порядкового номера формулы, разделенных точкой: (3.1).

4.8 Ссылки

Рекомендуется приводить ссылки на использованные источники. При нумерации ссылок на документы, использованные при составлении документа, приводится сплошная нумерация для всего текста документа в целом или для отдельных разделов. Порядковый номер ссылки (отсылки) приводят арабскими цифрами в квадратных скобках в конце текста ссылки. Порядковый номер

библиографического описания источника в списке использованных источников соответствует номеру ссылки.

Ссылаться следует на документ в целом или на его разделы и приложения.

При ссылках на стандарты и технические условия указывают их обозначение, при этом допускается не указывать год их утверждения при условии полного описания стандарта и технических условий в списке использованных источников в соответствии с ГОСТ 7.1.

5. РУКОВОДСТВО КУРСОВЫМИ ПРОЕКТАМИ

Руководство курсовыми проектами осуществляют преподаватели университета.

Курсовой проект студент выполняет самостоятельно, пользуясь консультациями руководителя и отчитываясь перед ним по мере выполнения ее отдельных частей и работы в целом.

Руководитель курсового проекта:

- помогает студенту определить круг вопросов по изучению избранной темы и методы исследования, наметить план подготовки и план изложения работы;
- консультирует студента в ходе работы, осуществляет систематический контроль и проводит поэтапную аттестацию;
- проверяет работу.

Законченная работа, представляется руководителю.

6. ПРОЦЕДУРА ЗАЩИТЫ И ОЦЕНКА КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ

К защите допускаются только курсовые проекты, оформленные в строгом соответствии с изложенными выше требованиями. За содержание и оформление работы, принятые в ней решения, правильность всех данных и сделанные выводы отвечает студент-автор курсового проекта.

Подведение итогов подготовки курсового проекта включает следующие этапы:

- сдачу курсового проекта на проверку руководителю;
- доработку курсового проекта с учетом замечаний руководителя;
- сдачу готовой курсового проекта на защиту;
- защиту курсового проекта.

Срок сдачи готовой курсового проекта и ее защиты определяется учебным графиком.

Срок доработки курсового проекта устанавливается руководителем с учетом сущности замечаний и объема необходимой доработки.

Руководитель работы определяет требования к содержанию и продолжительности доклада при защите, устанавливает регламент для оппонентов.

Защита курсового проекта, как правило, состоит в коротком (8 - 10 минут) докладе студента с демонстрацией презентации, выполненной в PowerPoint, и ответах на вопросы по существу работы. Выполнение презентации обязательно для каждого студента.

Курсовые проекты, имеющие творческий характер и представляющие практический интерес, могут быть представлены на конкурс научных работ.

Критерии оценивания работы представлены в комплекте оценочных средств. Оценка записывается в ведомость группы, а положительная оценка ставится в зачетную книжку и удостоверяется подписью руководителя.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ТЕМАТИКИ КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ

1. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка из земель, находящихся в государственной собственности.
2. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка из земель, находящихся в муниципальной собственности.
3. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка под индивидуальное жилищное строительство.
4. Проведение кадастровых работ при образовании многоконтурного земельного участка.
5. Проведение кадастровых работ при образовании лесного участка.
6. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка под линией электропередач.
7. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка под автодорогой.
8. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка и создании здания на нем.
9. Проведение кадастровых работ при образовании части земельного участка.
10. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка путем перераспределения земельного участка и земель, находящихся в муниципальной собственности.
11. Проведение кадастровых работ при образовании земельных участков путем перераспределения земельных участков.
12. Проведение кадастровых работ при образовании земельного участка путем объединения земельных участков.
13. Проведение кадастровых работ при образовании земельных участков путем раздела земельного участка.
14. Проведение кадастровых работ при создании здания.
15. Проведение кадастровых работ при создании многоквартирного жилого дома.
16. Проведение кадастровых работ при образовании здания.
17. Проведение кадастровых работ при образовании части здания.
18. Проведение кадастровых работ при создании сооружения.
19. Проведение кадастровых работ при образовании сооружения.
20. Проведение кадастровых работ при образовании части сооружения.
21. Проведение кадастровых работ при образовании помещения.
22. Проведение кадастровых работ при образовании части помещения.
23. Проведение кадастровых работ при создании единого недвижимого комплекса.
24. Проведение кадастровых работ при создании объекта незавершенного строительства.
25. Проведение кадастровых работ при уничтожении объекта капитального строительства.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»
(ФГБОУ ВО «УГГУ»)

Факультет _____
Кафедра Геодезии и кадастров
Направление Землеустройство и кадастры
Профиль подготовки _____

УТВЕРЖДАЮ

Колчина Н. В. _____

«____»_____ 20____ г.

ЗАДАНИЕ
НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

Студенту _____
Группы _____
По дисциплине _____
Тема _____
Срок сдачи _____
Исходные данные _____
Содержание Титульный лист
Задание на курсовой проект
Оглавление
Введение
…
Заключение
Список использованных источников
Приложения (при необходимости)
Краткий отчет системы Антиплагиат
Дата выдачи задания _____

Задание по курсовому проектированию получил _____/_____/

Примечание: Задание оформляется в 2-х экземплярах, один из которых хранится на кафедре, другой выдается студенту и подшивается к курсовому проекту.

ПРИЛОЖЕНИЕ В
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный горный университет»
(ФГБОУ ВО «УГГУ»)
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Курсовой проект

Тема курсового проекта

по дисциплине: Кадастровая деятельность

Направление: 21.03.02
ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВО И КАДАСТРЫ

Профиль:
КАДАСТР НЕДВИЖИМОСТИ

Студент: Иванов И. И.
Группа: КН-20

Старший преподаватель: Назаров И.В.

Оценка _____

Подпись _____

Екатеринбург
2023